

CALCUL LITTÉRAL

Cours — Première spécialité

Comment utiliser ce cours

Chaque partie commence par ce qu'il faut **savoir** (définitions, théorèmes), puis vient ce qu'il faut **savoir faire** : une méthode, avec des **exemples corrigés** faits en classe, puis des exercices « **À vous de jouer** » à chercher seul.

I — Réduire, développer, identités remarquables

Définition 1 — Réduire

Des termes **semblables** ont la même partie littérale : $3x^2$ et $-5x^2$ sont semblables, $3x^2$ et $3x$ ne le sont pas.

Réduire une somme, c'est regrouper les termes semblables en additionnant leurs coefficients. **Réduire un produit**, c'est multiplier les nombres entre eux et les lettres entre elles.

On peut **toujours** réduire un produit : $3x \times 2x = 6x^2$. On ne peut **pas toujours** réduire une somme : $3x^2 + 2x$ n'a pas de termes semblables, elle reste ainsi.

Méthode 1 — Réduire une somme ou un produit

Exemples corrigés

Réduire et ordonner les expressions suivantes.

a) $A = 5x^2 - 3x + 7 - 2x^2 + 8x - 4$

b) $B = 2x \times (-4x^2) \times 3$

a)

$$A = 5x^2 - 3x + 7 - 2x^2 + 8x - 4$$

on recopie : attention aux erreurs de recopie

$$A = 5x^2 - 2x^2 - 3x + 8x + 7 - 4$$

on rapproche les termes semblables

$$A = 3x^2 + 5x + 3$$

on ordonne suivant les puissances décroissantes de x

b)

$$B = 2x \times (-4x^2) \times 3$$

on recopie

$$B = 2 \times (-4) \times 3 \times x \times x^2$$

les nombres d'un côté, les lettres de l'autre

$$B = -24x^3$$

$x \times x^2 = x^3$

À vous de jouer

Réduire :

$$C = 6x - 4 + x^2 - 9x + 10$$

$$D = 2x^2 + 5x - 3x^2 + x$$

$$E = -3x \times 5x$$

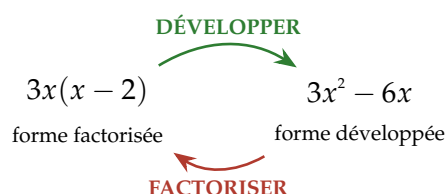
$$F = 7x \times (-2x^2)$$

Réponses : $C = x^2 - 3x + 6$; $D = -x^2 + 6x$; $E = -15x^2$; $F = -14x^3$.

Définition 2 — Développer, factoriser

Développer, c'est transformer un produit en une somme.

Factoriser, c'est transformer une somme en un produit.



Propriété 1 — Distributivité et identités remarquables

Pour tous réels a, b, c, d et k :

$$\begin{aligned} k(a+b) &= ka + kb & (a+b)^2 &= a^2 + 2ab + b^2 \\ (a+b)(c+d) &= ac + ad + bc + bd & (a-b)^2 &= a^2 - 2ab + b^2 \\ & & (a+b)(a-b) &= a^2 - b^2 \end{aligned}$$

Méthode 2 — Développer et réduire**Exemples corrigés**

Développer et réduire les expressions suivantes.

a) $A = (2x + 5)(x - 3)$

b) $B = (3x - 2)^2$

c) $C = (x + 4)^2 - (x + 1)(x - 1)$

a)

$$A = (2x + 5)(x - 3) \quad \text{on recopie ; pas d'identité remarquable}$$

$$A = 2x^2 - 6x + 5x - 15 \quad \text{on distribue : chaque terme par chaque terme}$$

$$A = 2x^2 - x - 15 \quad \text{on réduit}$$

b)

$$B = (3x - 2)^2 \quad \text{identité remarquable } (a - b)^2, \text{ avec } a = 3x \text{ et } b = 2$$

$$B = (3x)^2 - 2 \times 3x \times 2 + 2^2 \quad a^2 - 2ab + b^2$$

$$B = 9x^2 - 12x + 4$$

c)

$$C = (x + 4)^2 - (x + 1)(x - 1) \quad \text{deux identités remarquables}$$

$$C = x^2 + 8x + 16 - (x^2 - 1) \quad \text{on garde la parenthèse derrière le « - »}$$

$$C = x^2 + 8x + 16 - x^2 + 1 \quad \text{le « - » change le signe des deux termes}$$

$$C = 8x + 17 \quad \text{on réduit}$$

À vous de jouer

Développer et réduire :

$$D = (x - 6)(4x + 1) \quad E = (5x + 2)^2 \quad F = (2x - 7)(2x + 7) \quad G = 3x(x - 2) - (x - 5)^2$$

Réponses : $D = 4x^2 - 23x - 6$; $E = 25x^2 + 20x + 4$; $F = 4x^2 - 49$; $G = 3x^2 - 6x - (x^2 - 10x + 25) = 2x^2 + 4x - 25$.

► **À faire** : fiche d'exercices du chapitre, exercices 1 à 3.

II — Substituer une valeur**Définition 3 — Valeur d'une expression, valeur interdite**

Calculer la **valeur** d'une expression pour $x = a$, c'est remplacer chaque x par a , puis effectuer les calculs.

On ne peut pas diviser par 0 : une valeur qui annule un dénominateur est une **valeur interdite**. L'expression n'a pas de valeur pour ce nombre.

Méthode 3 — Calculer une image**Exemples corrigés**

- a) $P(x) = 2x^2 - 3x + 1$: calculer $P(-2)$.
- b) $f(x) = \frac{x+5}{x-1}$: donner la valeur interdite, puis calculer $f(3)$ et $f\left(\frac{1}{3}\right)$.
- c) Avec la même fonction f , calculer $f(\sqrt{3})$ sans racine au dénominateur.

a)

$$P(-2) = 2 \times (-2)^2 - 3 \times (-2) + 1 \quad \text{on remplace } x \text{ par } -2, \text{ entre parenthèses}$$

$$P(-2) = 8 + 6 + 1$$

$$P(-2) = 15$$

b)

$x - 1 = 0$ pour $x = 1$: la valeur interdite est 1.

un dénominateur ne peut pas être nul : on ne peut pas diviser par 0

$$f(3) = \frac{3+5}{3-1} \quad \text{numérateur et dénominateur calculés à part}$$

$$f(3) = 4$$

$$f\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{\frac{1}{3}+5}{\frac{1}{3}-1} \quad 5 = \frac{15}{3} \text{ et } 1 = \frac{3}{3}$$

$$f\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{16}{3} \times \left(-\frac{3}{2}\right) \quad \text{on divise par } -\frac{2}{3} : \text{on multiplie par } -\frac{3}{2}$$

$$f\left(\frac{1}{3}\right) = -8$$

c)

$$f(\sqrt{3}) = \frac{\sqrt{3}+5}{\sqrt{3}-1} \quad \text{il reste une racine au dénominateur}$$

$$f(\sqrt{3}) = \frac{(\sqrt{3}+5)(\sqrt{3}+1)}{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)} \quad \text{on multiplie en haut et en bas par la quantité conjuguée } \sqrt{3}+1$$

$$(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1) = 3-1 \quad \text{calcul intermédiaire : } (a-b)(a+b) = a^2 - b^2$$

$$(\sqrt{3}+5)(\sqrt{3}+1) = 3 + \sqrt{3} + 5\sqrt{3} + 5 \quad \text{calcul intermédiaire}$$

$$f(\sqrt{3}) = \frac{8+6\sqrt{3}}{2}$$

$$f(\sqrt{3}) = 4 + 3\sqrt{3}$$

À vous de jouer

1°) Avec $Q(x) = x^2 - 4x + 3$, calculer $Q(-1)$ et $Q(\sqrt{2})$.

2°) Avec $g(x) = \frac{x+4}{x-2}$, donner la valeur interdite, puis calculer $g(4)$ et $g\left(\frac{1}{2}\right)$.

3°) Calculer $g(\sqrt{5})$, sans racine au dénominateur.

Réponses : 1°) $Q(-1) = 8$ et $Q(\sqrt{2}) = 5 - 4\sqrt{2}$; 2°) valeur interdite 2; $g(4) = 4$ et $g\left(\frac{1}{2}\right) = -3$; 3°) le dénominateur devient $5 - 4 = 1$, et $g(\sqrt{5}) = 13 + 6\sqrt{5}$.

III — Factoriser une expression

Pour factoriser, on dispose de deux outils : le **facteur commun**, $ka + kb = k(a + b)$, et les **identités remarquables** lues de droite à gauche, $a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$, $a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$ et $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$.

Méthode 4 — Factoriser

Exemples corrigés

Factoriser les expressions suivantes.

a) $A = 6x^2 + 10x$

b) $B = (x + 3)(2x - 1) - (x + 3)(x + 4)$

c) $C = 9x^2 - 30x + 25$

d) $D = (x + 2)^2 - 49$

a)

$$A = 6x^2 + 10x \quad \text{on cherche d'abord un facteur commun}$$

$$A = 2x \times 3x + 2x \times 5 \quad 2x \text{ est dans les deux termes}$$

$$A = 2x(3x + 5)$$

b)

$$B = (x + 3)(2x - 1) - (x + 3)(x + 4) \quad \text{facteur commun : la parenthèse entière } (x + 3)$$

$$B = (x + 3)[(2x - 1) - (x + 4)]$$

$$B = (x + 3)(2x - 1 - x - 4) \quad \text{le « - » change les signes de } x + 4$$

$$B = (x + 3)(x - 5) \quad \text{on réduit chaque facteur}$$

c)

$$C = 9x^2 - 30x + 25 \quad \text{pas de facteur commun : une identité remarquable ?}$$

$$C = (3x)^2 - 2 \times 3x \times 5 + 5^2 \quad \text{forme } a^2 - 2ab + b^2, \text{ avec } a = 3x \text{ et } b = 5$$

$$C = (3x - 5)^2$$

d)

$$D = (x + 2)^2 - 49$$

$$D = (x + 2)^2 - 7^2 \quad \text{forme } a^2 - b^2, \text{ avec } a = x + 2 \text{ et } b = 7$$

$$D = (x + 2 - 7)(x + 2 + 7) \quad (a - b)(a + b)$$

$$D = (x - 5)(x + 9) \quad \text{on réduit chaque facteur}$$

À vous de jouer

Factoriser :

$$E = 12x^2 - 8x \quad F = (2x + 1)(x - 3) + (2x + 1)(4x + 5) \quad G = x^2 + 14x + 49$$

$$H = 16 - (x - 1)^2 \quad I = 25x^2 - 4$$

Réponses : $E = 4x(3x - 2)$; $F = (2x + 1)(5x + 2)$; $G = (x + 7)^2$; $H = (4 - x + 1)(4 + x - 1) = (5 - x)(x + 3)$; $I = (5x - 2)(5x + 2)$.

► **À faire** : fiche d'exercices du chapitre, exercices 7 à 9.

IV — Équations

Propriété 2 — Produit nul

Un produit est nul si et seulement si l'un au moins de ses facteurs est nul :

$$A \times B = 0 \iff A = 0 \text{ ou } B = 0$$

Propriété 3 — Équation $x^2 = k$

- Si $k > 0$, l'équation $x^2 = k$ a deux solutions : $-\sqrt{k}$ et $\sqrt{k}$.
- Si $k = 0$, elle a une seule solution : 0.
- Si $k < 0$, elle n'a pas de solution, car un carré n'est jamais négatif.

Méthode 5 — Résoudre une équation

Exemples corrigés

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes.

a) $5x - 3 = 2x + 9$

b) $(2x - 6)(5x + 1) = 0$

c) $x^2 = 36$; $x^2 = 11$; $x^2 = -9$; $(x + 1)^2 = 25$

d) $x^2 = 3x$

a)

$$\begin{aligned} 5x - 3 &= 2x + 9 \iff 5x - 2x = 9 + 3 && \text{les } x \text{ à gauche, les nombres à droite} \\ &\iff 3x = 12 \\ &\iff x = 4 && \text{on divise par le coefficient de } x \end{aligned}$$

$$S = \{4\}. \quad \text{on conclut par l'ensemble des solutions}$$

b)

$$\begin{aligned} (2x - 6)(5x + 1) &= 0 \iff 2x - 6 = 0 \text{ ou } 5x + 1 = 0 && \text{produit nul : un des facteurs est nul} \\ &\iff x = 3 \text{ ou } x = -\frac{1}{5} \end{aligned}$$

$$S = \left\{-\frac{1}{5}; 3\right\}. \quad \text{solutions rangées dans l'ordre croissant}$$

c)

$$\begin{aligned} x^2 = 36 : S &= \{-6; 6\}; \quad x^2 = 11 : S = \{-\sqrt{11}; \sqrt{11}\}; && \text{propriété 3 : deux solutions si } k > 0, \text{ aucune si } k < 0 \\ x^2 = -9 : S &= \emptyset. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (x + 1)^2 &= 25 \iff x + 1 = 5 \text{ ou } x + 1 = -5 && \text{propriété 3, avec } x + 1 \text{ à la place de } x \\ &\iff x = 4 \text{ ou } x = -6 \end{aligned}$$

$$S = \{-6; 4\}.$$

d)

$$\begin{aligned} x^2 &= 3x \iff x^2 - 3x = 0 && \text{tout dans un membre} \\ &\iff x(x - 3) = 0 && \text{on factorise : facteur commun } x \\ &\iff x = 0 \text{ ou } x = 3 && \text{produit nul} \end{aligned}$$

$$S = \{0; 3\}. \quad \text{on ne divise jamais par } x : \text{on aurait perdu la solution } 0$$

À vous de jouerRésoudre dans $\mathbb{R}$:

$$4(x-2) = x+7 \quad (3x+12)(7-x) = 0 \quad x^2 = 49$$

$$x^2 = -5 \quad (x-2)^2 = 16 \quad x^2 = 5x$$

Réponses : $S = \{5\}$; $S = \{-4; 7\}$; $S = \{-7; 7\}$; $S = \emptyset$; $S = \{-2; 6\}$; $x(x-5) = 0$, $S = \{0; 5\}$.**Méthode 6 — Mettre un problème en équation****Exemples corrigés**

Un samedi, une salle d'escalade a vendu 120 entrées : des entrées adultes à 14 € et des entrées jeunes à 9 €. La recette est de 1 430 €. Combien d'entrées de chaque sorte ont été vendues ?

Résolution

Soit x le nombre d'entrées adultes ; il y a alors $120 - x$ entrées jeunes.

inconnue : on écrit ce que représente x

$$14x + 9(120 - x) = 1\,430 \iff 14x + 1\,080 - 9x = 1\,430$$

équation : on traduit la recette, puis on résout

$$\iff 5x = 350$$

$$\iff x = 70$$

$70 \times 14 + 50 \times 9 = 980 + 450$, soit bien 1 430 €.

vérification : la solution convient-elle à l'énoncé ?

La salle a vendu 70 entrées adultes et 50 entrées jeunes.

*conclusion : une phrase qui répond à la question***À vous de jouer**

1°) Une association a vendu 300 billets pour un concert : en prévente à 18 €, ou sur place à 25 €. La recette est de 6 100 €. Combien de billets ont été vendus en prévente ?

2°) La longueur d'un rectangle dépasse sa largeur de 4 cm, et son périmètre mesure 36 cm. Quelles sont ses dimensions ?

Réponses : 1°) $18x + 25(300 - x) = 6\,100$ donne $x = 200$ billets en prévente (et 100 sur place); 2°) $2(x + x + 4) = 36$ donne $x = 7$: 7 cm sur 11 cm.

► **À faire** : fiche d'exercices du chapitre, exercices 10 à 12.**V — Fractions rationnelles****Définition 4 — Fraction rationnelle**

Une **fraction rationnelle** est un quotient de deux expressions en x , comme $\frac{3x+1}{x-2}$. Ses valeurs interdites sont celles qui annulent le dénominateur.

L'**ensemble de définition** est l'ensemble des réels qui ne sont pas interdits : ici $D = \mathbb{R} \setminus \{2\}$, qui se lit « $\mathbb{R}$ privé de 2 ».

Méthode 7 — Trouver les valeurs interdites, simplifier**Exemples corrigés**

a) Donner l'ensemble de définition de $f(x) = \frac{4}{x+3}$ et de $g(x) = \frac{x-1}{2x-5}$.

b) Simplifier $h(x) = \frac{x^2-4}{x^2+2x}$, en précisant les valeurs interdites.

a)

$x + 3 = 0$ pour $x = -3$, donc $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-3\}$.

on résout « dénominateur = 0 » : la solution est la valeur interdite

$2x - 5 = 0$ pour $x = \frac{5}{2}$, donc $D_g = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{5}{2}\right\}$.

b)

$x^2 + 2x = x(x + 2)$ s'annule pour $x = 0$ et pour $x = -2$: ce sont les valeurs interdites.

on factorise le dénominateur pour trouver où il s'annule

$$h(x) = \frac{x^2 - 4}{x^2 + 2x} \quad \text{pour } x \neq 0 \text{ et } x \neq -2$$

$$h(x) = \frac{(x-2)(x+2)}{x(x+2)} \quad \text{on factorise en haut et en bas}$$

$$h(x) = \frac{x-2}{x} \quad \text{on simplifie par le facteur commun } x+2$$

Les valeurs interdites restent 0 et -2.

$\frac{x-2}{x}$ a une valeur pour $x = -2$, mais pas h : simplifier ne supprime pas une valeur interdite

À vous de jouer

1°) Donner l'ensemble de définition de $k(x) = \frac{7}{x-6}$ et de $m(x) = \frac{3x+1}{4x+2}$.

2°) Simplifier $n(x) = \frac{x^2 - 25}{x^2 - 5x}$, en précisant les valeurs interdites.

Réponses : 1°) $D_k = \mathbb{R} \setminus \{6\}$ et $D_m = \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{1}{2}\right\}$; 2°) valeurs interdites 0 et 5; $n(x) = \frac{(x-5)(x+5)}{x(x-5)} = \frac{x+5}{x}$.

Méthode 8 — Écrire sous la forme d'un seul quotient

Exemples corrigés

Écrire sous la forme d'un seul quotient, en précisant les valeurs interdites.

a) $A = 2 + \frac{3}{x-1}$

b) $B = \frac{1}{x} - \frac{2}{x+3}$

a)

Valeur interdite : 1.

on commence par les valeurs interdites

$$A = 2 + \frac{3}{x-1} \quad \text{on recopie}$$

$$A = \frac{2(x-1)}{x-1} + \frac{3}{x-1} \quad \text{même dénominateur : } 2 = \frac{2(x-1)}{x-1}$$

$$A = \frac{2x-2+3}{x-1} \quad \text{on développe le numérateur seulement}$$

$$A = \frac{2x+1}{x-1} \quad \text{on réduit}$$

b)

Valeurs interdites : 0 et -3.

dénominateur commun : le produit $x(x+3)$

$$B = \frac{1}{x} - \frac{2}{x+3} \quad \text{on recopie}$$

$$B = \frac{x+3}{x(x+3)} - \frac{2x}{x(x+3)} \quad \text{chaque fraction reçoit ce qui lui manque}$$

$$B = \frac{x+3-2x}{x(x+3)}$$

$$B = \frac{-x+3}{x(x+3)} \quad \text{on réduit le numérateur}$$

À vous de jouer

Écrire sous la forme d'un seul quotient, en précisant les valeurs interdites :

$$C = 5 - \frac{2}{x+4} \quad D = \frac{3}{x-2} + \frac{1}{x} \quad E = \frac{x}{x+1} - 2$$

Réponses : $C = \frac{5x+18}{x+4}$ ($x \neq -4$); $D = \frac{4x-2}{x(x-2)}$ ($x \neq 0$ et $x \neq 2$); $E = \frac{-x-2}{x+1}$ ($x \neq -1$).

► **À faire** : fiche d'exercices du chapitre, exercices 13 à 16.

VI — Équations quotient

Propriété 4 — Quotient nul

Un quotient est nul si et seulement si son numérateur est nul, son dénominateur ne l'étant pas :

$$\frac{A}{B} = 0 \iff A = 0 \text{ et } B \neq 0$$

Méthode 9 — Résoudre une équation quotient

Exemples corrigés

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes.

a) Un quotient égal à 0 : $\frac{2x-8}{x+5} = 0$.

b) Un quotient égal à un nombre : $\frac{x+7}{x-2} = 4$.

c) Un quotient égal à un quotient : $\frac{x+1}{x-3} = \frac{x+2}{x-1}$.

a)

Valeur interdite : -5 .

$2x - 8 = 0$ pour $x = 4$, qui n'est pas interdit : $S = \{4\}$.

on commence par les valeurs interdites

un quotient est nul quand son numérateur est nul

b)

Valeur interdite : 2 .

$$\frac{x+7}{x-2} = 4 \iff \frac{x+7}{x-2} - 4 = 0 \quad \text{tout dans un membre}$$

$$\iff \frac{x+7-4(x-2)}{x-2} = 0 \quad \text{un seul quotient (méthode 8)}$$

$$\iff \frac{-3x+15}{x-2} = 0$$

$-3x + 15 = 0$ pour $x = 5$, qui n'est pas interdit : $S = \{5\}$.

on résout « numérateur = 0 », puis on écarte les valeurs interdites

c)

Valeurs interdites : 3 et 1.

$$\begin{aligned} \frac{x+1}{x-3} = \frac{x+2}{x-1} &\iff \frac{x+1}{x-3} - \frac{x+2}{x-1} = 0 \\ &\iff \frac{(x+1)(x-1) - (x+2)(x-3)}{(x-3)(x-1)} = 0 \end{aligned}$$

$$(x+1)(x-1) - (x+2)(x-3) = x^2 - 1 - (x^2 - x - 6)$$

calcul intermédiaire : le numérateur

$$(x+1)(x-1) - (x+2)(x-3) = x+5$$

$$\frac{x+1}{x-3} = \frac{x+2}{x-1} \iff \frac{x+5}{(x-3)(x-1)} = 0$$

$x+5 = 0$ pour $x = -5$, qui n'est pas interdit : $S = \{-5\}$.

numérateur nul, valeur non interdite

Deux remarques

- Une solution du numérateur peut être interdite : on l'écarte. Ainsi $\frac{x^2-9}{x-3} = 0$ donne $x = 3$ ou $x = -3$, mais 3 est interdit : $S = \{-3\}$.
- Le produit en croix donne aussi le résultat en c), mais il ne sert plus pour les inéquations (partie VII) : on retient la méthode du quotient nul.

À vous de jouer

Résoudre dans $\mathbb{R}$, en donnant d'abord les valeurs interdites :

$$\frac{3x+9}{x-4} = 0 \quad \frac{x+9}{x+1} = 3 \quad \frac{x+4}{x+2} = \frac{x-1}{x-2}$$

Réponses : $x \neq 4 : S = \{-3\}$; $x \neq -1 : \frac{-2x+6}{x+1} = 0, S = \{3\}$; $x \neq -2$ et $x \neq 2$: le numérateur vaut $x-6$, $S = \{6\}$.

► **À faire** : fiche d'exercices du chapitre, exercices 17 à 19.

VII — Inéquations et tableaux de signes

Propriété 5 — Signe de $ax + b$ (avec $a \neq 0$)

$ax + b$ s'annule pour $x = -\frac{b}{a}$; après cette valeur, il a le signe de a , avant, le signe contraire.

$a > 0$			
x	$-\infty$	$-\frac{b}{a}$	$+\infty$
$ax + b$	-	0	+

$a < 0$			
x	$-\infty$	$-\frac{b}{a}$	$+\infty$
$ax + b$	+	0	-

Exemple — signe de $2x - 6$ et de $-4x + 2$

$2x - 6$ s'annule en 3 et $a = 2 > 0$: négatif avant 3, positif après.

$-4x + 2$ s'annule en $\frac{1}{2}$ et $a = -4 < 0$: positif avant $\frac{1}{2}$, négatif après.

Méthode 10 — Résoudre une inéquation

Exemples corrigés

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes.

a) Premier degré : $2(x + 3) \geq 5x - 9$.

b) Quotient comparé à 0 : $\frac{x-2}{x+4} < 0$.

c) Quotient comparé à un nombre : $\frac{6}{x+2} < 2$.

a)

$$2(x + 3) \geq 5x - 9 \iff 2x + 6 \geq 5x - 9 \quad \text{on isole } x \text{ comme dans une équation}$$

$$\iff -3x \geq -15$$

$$\iff x \leq 5$$

on divise par $-3 < 0$: le sens change

$$S =]-\infty; 5].$$

5 est compris : inégalité large

b)

Valeur interdite : -4 . Le numérateur s'annule en 2.une ligne par facteur ; coefficients de x positifs :
négatif avant la valeur, positif après

x	$-\infty$	-4	2	$+\infty$
$x - 2$	—	—	0	+
$x + 4$	—	0	+	+
$\frac{x-2}{x+4}$	+	—	0	+

$$S =]-4; 2[.$$

inégalité stricte : 2 exclu ; -4 exclu (interdit,
double barre)

c)

Valeur interdite : -2 .

$$\frac{6}{x+2} < 2 \iff \frac{6}{x+2} - 2 < 0 \quad \text{tout dans un membre}$$

$$\iff \frac{6 - 2(x+2)}{x+2} < 0 \quad \text{un seul quotient comparé à 0}$$

$$\iff \frac{-2x+2}{x+2} < 0$$

 $-2x + 2$ s'annule en 1 et $a = -2 < 0$: positif avant 1, négatif
après. propriété 5

x	$-\infty$	-2	1	$+\infty$
$-2x + 2$	+	+	0	—
$x + 2$	—	0	+	+
$\frac{-2x+2}{x+2}$	—	+	0	—

$$S =]-\infty; -2[\cup]1; +\infty[.$$

on lit les signes $-$; crochets ouverts (stricte, et -2 interdit)

À vous de jouer

Résoudre dans $\mathbb{R}$:

$$3(1-x) < x+11 \quad \frac{x+3}{x-1} \geq 0 \quad \frac{4}{x-3} \geq 2$$

Réponses : $-4x < 8$, et la division par -4 change le sens : $S =]-2; +\infty[$; $S =]-\infty; -3[\cup]1; +\infty[$; $\frac{-2x+10}{x-3} \geq 0$: $S =]3; 5]$.

► **À faire** : fiche d'exercices du chapitre, exercices 20 à 22.

VIII — Composition de polynômes

Définition 5 — Fonction polynôme

Une **fonction polynôme** s'écrit $P(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$, où les **coefficients** $a_n, \dots, a_0$ sont des réels. Si $a_n \neq 0$, le nombre n est le **degré** de P .

Exemple : $P(x) = 4x^3 - x + 7$ est de degré 3.

Définition 6 — Composée

Composer deux fonctions, c'est mettre une fonction à l'intérieur d'une autre.

La **composée** de P par Q est la fonction $P \circ Q$ définie par $(P \circ Q)(x) = P(Q(x))$: dans $P(Q(x))$, on met la fonction Q à l'intérieur de la fonction P .

Concrètement, on remplace chaque x de $P(x)$ par $Q(x)$.

Méthode 11 — Calculer une composée

Exemples corrigés

Soient $P(x) = x^2 - 3x$ et $Q(x) = x + 2$. Calculer $(P \circ Q)(x)$, puis $(Q \circ P)(x)$.

Résolution

$$(P \circ Q)(x) = (x+2)^2 - 3(x+2) \quad \text{on recopie } P(x) : \text{chaque } x \text{ devient } (x+2), \text{ entre parenthèses}$$

$$(P \circ Q)(x) = x^2 + 4x + 4 - 3x - 6 \quad \text{on développe}$$

$$(P \circ Q)(x) = x^2 + x - 2 \quad \text{on réduit}$$

Contrôle avec 1 : $Q(1) = 3$ et $P(3) = 9 - 9 = 0$; on trouve $(P \circ Q)(1)$ doit être égal à $P(Q(1))$
aussi $1 + 1 - 2 = 0$.

$$(Q \circ P)(x) = (x^2 - 3x) + 2 \quad \text{chaque } x \text{ de } Q \text{ devient } (x^2 - 3x)$$

$$(Q \circ P)(x) = x^2 - 3x + 2$$

Les deux composées sont différentes.

l'ordre compte

À vous de jouer

1°) $P(x) = 2x^2 + 1$ et $Q(x) = x - 3$: calculer $(P \circ Q)(x)$ et $(Q \circ P)(x)$.

2°) $P(x) = x^2 + 4x$ et $Q(x) = 3x - 1$: calculer $(P \circ Q)(x)$ et $(Q \circ P)(x)$.

Réponses : 1°) $(P \circ Q)(x) = 2x^2 - 12x + 19$ et $(Q \circ P)(x) = 2x^2 - 2$; 2°) $(P \circ Q)(x) = 9x^2 + 6x - 3$ et $(Q \circ P)(x) = 3x^2 + 12x - 1$.

► **À faire** : fiche d'exercices du chapitre, exercices 23 à 25.