

CALCUL LITTÉRAL

Cours — Première spécialité

Version élève

Comment utiliser ce cours

Chaque partie commence par ce qu'il faut **savoir** (définitions, théorèmes), puis vient ce qu'il faut **savoir faire** : une méthode, avec des **exemples** faits en classe, puis des exercices « **À vous de jouer** » à chercher seul.

Sur cette feuille, seuls les **énoncés** des exemples figurent : la résolution, signalée par la mention *(au tableau)*, est à rédiger dans le cahier.

I — Réduire, développer, identités remarquables

Définition 1 — Réduire

Des termes **semblables** ont la même partie littérale : $3x^2$ et $-5x^2$ sont semblables, $3x^2$ et $3x$ ne le sont pas.

Réduire une somme, c'est regrouper les termes semblables en additionnant leurs coefficients. **Réduire un produit**, c'est multiplier les nombres entre eux et les lettres entre elles.

On peut **toujours** réduire un produit : $3x \times 2x = 6x^2$. On ne peut **pas toujours** réduire une somme : $3x^2 + 2x$ n'a pas de termes semblables, elle reste ainsi.

Méthode 1 — Réduire une somme ou un produit

Exemples

(au tableau)

Réduire et ordonner les expressions suivantes.

a) $A = 5x^2 - 3x + 7 - 2x^2 + 8x - 4$

b) $B = 2x \times (-4x^2) \times 3$

À vous de jouer

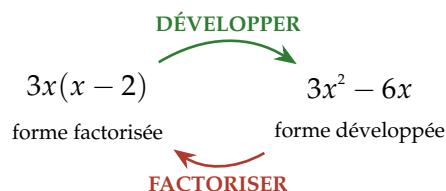
Réduire :

$$C = 6x - 4 + x^2 - 9x + 10 \quad D = 2x^2 + 5x - 3x^2 + x \quad E = -3x \times 5x \quad F = 7x \times (-2x^2)$$

Définition 2 — Développer, factoriser

Développer, c'est transformer un produit en une somme.

Factoriser, c'est transformer une somme en un produit.



Propriété 1 — Distributivité et identités remarquables

Pour tous réels a, b, c, d et k :

$$k(a + b) = ka + kb$$

$$(a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd$$

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$

Méthode 2 — Développer et réduire

Exemples

(au tableau)

Développer et réduire les expressions suivantes.

a) $A = (2x + 5)(x - 3)$

b) $B = (3x - 2)^2$

c) $C = (x + 4)^2 - (x + 1)(x - 1)$

À vous de jouer

Développer et réduire :

$$D = (x - 6)(4x + 1) \quad E = (5x + 2)^2 \quad F = (2x - 7)(2x + 7) \quad G = 3x(x - 2) - (x - 5)^2$$

► À faire : fiche d'exercices du chapitre, exercices 1 à 3.

II — Substituer une valeur

Définition 3 — Valeur d'une expression, valeur interdite

Calculer la **valeur** d'une expression pour $x = a$, c'est remplacer chaque x par a , puis effectuer les calculs.On ne peut pas diviser par 0 : une valeur qui annule un dénominateur est une **valeur interdite**. L'expression n'a pas de valeur pour ce nombre.

Méthode 3 — Calculer une image

Exemples

(au tableau)

a) $P(x) = 2x^2 - 3x + 1$: calculer $P(-2)$.

b) $f(x) = \frac{x+5}{x-1}$: donner la valeur interdite, puis calculer $f(3)$ et $f\left(\frac{1}{3}\right)$.

c) Avec la même fonction f , calculer $f(\sqrt{3})$ sans racine au dénominateur.

À vous de jouer

1°) Avec $Q(x) = x^2 - 4x + 3$, calculer $Q(-1)$ et $Q(\sqrt{2})$.

2°) Avec $g(x) = \frac{x+4}{x-2}$, donner la valeur interdite, puis calculer $g(4)$ et $g\left(\frac{1}{2}\right)$.

3°) Calculer $g(\sqrt{5})$, sans racine au dénominateur.

► À faire : fiche d'exercices du chapitre, exercices 4 à 6.

III — Factoriser une expression

Pour factoriser, on dispose de deux outils : le **facteur commun**, $ka + kb = k(a + b)$, et les **identités remarquables** lues de droite à gauche, $a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$, $a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$ et $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$.

Méthode 4 — Factoriser

Exemples

(au tableau)

Factoriser les expressions suivantes.

a) $A = 6x^2 + 10x$

b) $B = (x + 3)(2x - 1) - (x + 3)(x + 4)$

c) $C = 9x^2 - 30x + 25$

d) $D = (x + 2)^2 - 49$

À vous de jouer

Factoriser :

$$E = 12x^2 - 8x \quad F = (2x + 1)(x - 3) + (2x + 1)(4x + 5) \quad G = x^2 + 14x + 49$$

$$H = 16 - (x - 1)^2 \quad I = 25x^2 - 4$$

► **À faire** : fiche d'exercices du chapitre, exercices 7 à 9.**IV — Équations****Propriété 2 — Produit nul**

Un produit est nul si et seulement si l'un au moins de ses facteurs est nul :

$$A \times B = 0 \iff A = 0 \text{ ou } B = 0$$

Propriété 3 — Équation $x^2 = k$

- Si $k > 0$, l'équation $x^2 = k$ a deux solutions : $-\sqrt{k}$ et $\sqrt{k}$.
- Si $k = 0$, elle a une seule solution : 0.
- Si $k < 0$, elle n'a pas de solution, car un carré n'est jamais négatif.

Méthode 5 — Résoudre une équation**Exemples***(au tableau)*Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes.

a) $5x - 3 = 2x + 9$

b) $(2x - 6)(5x + 1) = 0$

c) $x^2 = 36$; $x^2 = 11$; $x^2 = -9$; $(x + 1)^2 = 25$

d) $x^2 = 3x$

À vous de jouerRésoudre dans $\mathbb{R}$:

$$4(x - 2) = x + 7 \quad (3x + 12)(7 - x) = 0 \quad x^2 = 49$$

$$x^2 = -5 \quad (x - 2)^2 = 16 \quad x^2 = 5x$$

Méthode 6 — Mettre un problème en équation**Exemples***(au tableau)*

Un samedi, une salle d'escalade a vendu 120 entrées : des entrées adultes à 14 € et des entrées jeunes à 9 €. La recette est de 1 430 €. Combien d'entrées de chaque sorte ont été vendues ?

À vous de jouer

- 1°) Une association a vendu 300 billets pour un concert : en prévente à 18 €, ou sur place à 25 €. La recette est de 6 100 €. Combien de billets ont été vendus en prévente ?
- 2°) La longueur d'un rectangle dépasse sa largeur de 4 cm, et son périmètre mesure 36 cm. Quelles sont ses dimensions ?

► **À faire** : fiche d'exercices du chapitre, exercices 10 à 12.

V — Fractions rationnelles

Définition 4 — Fraction rationnelle

Une **fraction rationnelle** est un quotient de deux expressions en x , comme $\frac{3x+1}{x-2}$. Ses valeurs interdites sont celles qui annulent le dénominateur.

L'**ensemble de définition** est l'ensemble des réels qui ne sont pas interdits : ici $D = \mathbb{R} \setminus \{2\}$, qui se lit « $\mathbb{R}$ privé de 2 ».

Méthode 7 — Trouver les valeurs interdites, simplifier

Exemples

(au tableau)

a) Donner l'ensemble de définition de $f(x) = \frac{4}{x+3}$ et de $g(x) = \frac{x-1}{2x-5}$.

b) Simplifier $h(x) = \frac{x^2-4}{x^2+2x}$, en précisant les valeurs interdites.

À vous de jouer

1°) Donner l'ensemble de définition de $k(x) = \frac{7}{x-6}$ et de $m(x) = \frac{3x+1}{4x+2}$.

2°) Simplifier $n(x) = \frac{x^2-25}{x^2-5x}$, en précisant les valeurs interdites.

Méthode 8 — Écrire sous la forme d'un seul quotient

Exemples

(au tableau)

Écrire sous la forme d'un seul quotient, en précisant les valeurs interdites.

a) $A = 2 + \frac{3}{x-1}$

b) $B = \frac{1}{x} - \frac{2}{x+3}$

À vous de jouer

Écrire sous la forme d'un seul quotient, en précisant les valeurs interdites :

$$C = 5 - \frac{2}{x+4} \quad D = \frac{3}{x-2} + \frac{1}{x} \quad E = \frac{x}{x+1} - 2$$

► **À faire** : fiche d'exercices du chapitre, exercices 13 à 16.

VI — Équations quotient

Propriété 4 — Quotient nul

Un quotient est nul si et seulement si son numérateur est nul, son dénominateur ne l'étant pas :

$$\frac{A}{B} = 0 \iff A = 0 \text{ et } B \neq 0$$

Méthode 9 — Résoudre une équation quotient

Exemples

(au tableau)

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes.

- a) Un quotient égal à 0 : $\frac{2x-8}{x+5} = 0$.
- b) Un quotient égal à un nombre : $\frac{x+7}{x-2} = 4$.
- c) Un quotient égal à un quotient : $\frac{x+1}{x-3} = \frac{x+2}{x-1}$.

Deux remarques

- Une solution du numérateur peut être interdite : on l'écarte. Ainsi $\frac{x^2-9}{x-3} = 0$ donne $x = 3$ ou $x = -3$, mais 3 est interdit : $S = \{-3\}$.
- Le produit en croix donne aussi le résultat en c), mais il ne sert plus pour les inéquations (partie VII) : on retient la méthode du quotient nul.

À vous de jouer

Résoudre dans $\mathbb{R}$, en donnant d'abord les valeurs interdites :

$$\frac{3x+9}{x-4} = 0 \quad \frac{x+9}{x+1} = 3 \quad \frac{x+4}{x+2} = \frac{x-1}{x-2}$$

► **À faire** : fiche d'exercices du chapitre, exercices 17 à 19.

VII — Inéquations et tableaux de signes

Propriété 5 — Signe de $ax + b$ (avec $a \neq 0$)

$ax + b$ s'annule pour $x = -\frac{b}{a}$; après cette valeur, il a le signe de a , avant, le signe contraire.

$$a > 0$$

x	$-\infty$	$-\frac{b}{a}$	$+\infty$
$ax + b$	-	0	+

$$a < 0$$

x	$-\infty$	$-\frac{b}{a}$	$+\infty$
$ax + b$	+	0	-

Exemple — signe de $2x - 6$ et de $-4x + 2$

$2x - 6$ s'annule en 3 et $a = 2 > 0$: négatif avant 3, positif après.

$-4x + 2$ s'annule en $\frac{1}{2}$ et $a = -4 < 0$: positif avant $\frac{1}{2}$, négatif après.

Méthode 10 — Résoudre une inéquation

Exemples

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes.

- a) Premier degré : $2(x+3) \geq 5x-9$.
- b) Quotient comparé à 0 : $\frac{x-2}{x+4} < 0$.
- c) Quotient comparé à un nombre : $\frac{6}{x+2} < 2$.

À vous de jouer

Résoudre dans $\mathbb{R}$:

$$3(1-x) < x+11 \quad \frac{x+3}{x-1} \geq 0 \quad \frac{4}{x-3} \geq 2$$

(au tableau)

► **À faire** : fiche d'exercices du chapitre, exercices 20 à 22.

VIII — Composition de polynômes

Définition 5 — Fonction polynôme

Une **fonction polynôme** s'écrit $P(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$, où les **coefficients** $a_n, \dots, a_0$ sont des réels. Si $a_n \neq 0$, le nombre n est le **degré** de P .

Exemple : $P(x) = 4x^3 - x + 7$ est de degré 3.

Définition 6 — Composée

Composer deux fonctions, c'est mettre une fonction à l'intérieur d'une autre.

La **composée** de P par Q est la fonction $P \circ Q$ définie par $(P \circ Q)(x) = P(Q(x))$: dans $P(Q(x))$, on met la fonction Q à l'intérieur de la fonction P .

Concrètement, on remplace chaque x de $P(x)$ par $Q(x)$.

Méthode 11 — Calculer une composée

Exemples

(au tableau)

Soient $P(x) = x^2 - 3x$ et $Q(x) = x + 2$. Calculer $(P \circ Q)(x)$, puis $(Q \circ P)(x)$.

À vous de jouer

1°) $P(x) = 2x^2 + 1$ et $Q(x) = x - 3$: calculer $(P \circ Q)(x)$ et $(Q \circ P)(x)$.

2°) $P(x) = x^2 + 4x$ et $Q(x) = 3x - 1$: calculer $(P \circ Q)(x)$ et $(Q \circ P)(x)$.

► **À faire** : fiche d'exercices du chapitre, exercices 23 à 25.