

CORRIGÉ — FICHE D'EXERCICES

Chapitre 2 — Fonctions

Première spécialité mathématiques

I — Images et antécédents

Exercice 01 — Vocabulaire

1°) a) $f(3) = -1$ b) $g(-2) = 6$ c) $h(0) = 5$ d) $k(4) = 9$

2°) L'image de 5 par f est -7 . Le nombre 5 est un antécédent de -7 par f . Le point de coordonnées $(5; -7)$ est sur la courbe de f .

→ On dit « l'image » (il n'y en a qu'une) mais « un antécédent » (il peut y en avoir plusieurs).

Exercice 02 — Calculer des images

Avec $f(x) = 2x^2 - 5x$:

1°) $f(3) = 2 \times 9 - 15 = 3$ $f(-2) = 2 \times 4 + 10 = 18$ $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} - \frac{5}{2} = -2$

$f(-1,5) = 2 \times 2,25 + 7,5 = 12$ $f(\sqrt{3}) = 2 \times 3 - 5\sqrt{3} = 6 - 5\sqrt{3}$

2°) $f(-1) = 2 + 5 = 7$: **oui**, -1 est un antécédent de 7.

$f(2) = 8 - 10 = -2$: **non**, l'image de 2 est -2 .

→ $(-2)^2 = 4$ et $-5 \times (-2) = +10$: les parenthèses autour des nombres négatifs évitent les erreurs de signe.

Exercice 03 — Calculer des antécédents

On résout à chaque fois l'équation « $f(x) = \text{nombre}$ ».

a) $x - 7 = 2$, donc $x = 9$.

b) $x^2 = 49$: deux antécédents, -7 et 7 .

c) $5x + 3 = 0$, soit $5x = -3$, donc $x = -\frac{3}{5}$.

d) $(x - 1)(x + 4) = 0$: un produit est nul si l'un de ses facteurs est nul, donc $x = 1$ ou $x = -4$.

e) $x^2 + 3 = 2$, soit $x^2 = -1$: un carré n'est jamais négatif, 2 n'a **aucun antécédent**.

Exercice 04 — Lire des images et des antécédents

1°) $g(-2) = 1$; $g(0) = -2$; $g(3) = 2$; $g(5) = -1$

2°) Antécédents de 1 : -2 ; 2 et 4. Antécédents de -1 : -1 ; 1 et 5. Antécédent de -2 : 0 (un seul).
Antécédents de 5 : **aucun**, la courbe ne monte pas au-dessus de 4.

3°) L'axe des abscisses coupe la courbe en trois points : **trois solutions** (une entre -2 et -1 , une entre 1 et 2, une entre 4 et 5).

4°) $g(-3) = 4$.

→ Une image se lit sur l'axe des ordonnées ; un antécédent sur l'axe des abscisses.

Exercice 05 — Points d'une courbe

Avec $h(x) = x^2 + 2x - 8$:

1°) $h(1) = 1 + 2 - 8 = -5$: c'est l'ordonnée de A, donc A est sur C_h .

$h(-2) = 4 - 4 - 8 = -8$, et non 0 : B n'est pas sur C_h .

2°) Sur l'axe des ordonnées, $x = 0$: $h(0) = -8$, le point est $(0; -8)$.

$$3^\circ) (x-2)(x+4) = x^2 + 4x - 2x - 8$$

$$(x-2)(x+4) = x^2 + 2x - 8$$

donc $h(x) = (x-2)(x+4)$. Sur l'axe des abscisses, $h(x) = 0 : x = 2$ ou $x = -4$. Les points sont $(2; 0)$ et $(-4; 0)$.

→ « Le point est sur la courbe » se vérifie par un calcul : ses coordonnées vérifient $y = h(x)$.

II — Ensemble de définition

Exercice 06 — Un nombre sans image

Pour f , 0 n'a pas d'image (division par 0). Pour g , 5 n'a pas d'image ($5 - 5 = 0$). Pour h , -2 n'a pas d'image ($\sqrt{-1}$ n'existe pas).

Exercice 07 — Ensembles de définition

Quotient : on retire les valeurs qui annulent le dénominateur. Racine carrée : le nombre sous la racine doit être positif ou nul.

a) $x + 6 = 0$ pour $x = -6$: f est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-6\}$.

b) $4x - 12 = 0$ pour $x = 3$: g est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{3\}$.

c) $x^2 + 5 \geq 5$ ne s'annule jamais : h est définie sur $\mathbb{R}$.

d) $x^2 - 16 = 0$ pour $x^2 = 16$, soit $x = -4$ ou $x = 4$: k est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-4; 4\}$.

e) $12 - 3x \geq 0$

$$-3x \geq -12$$

$$x \leq 4 \quad \text{on divise par } -3 < 0 : \text{le sens change}$$

m est définie sur $] -\infty; 4]$.

f) Deux conditions : $x - 1 \geq 0$ pour la racine, et $\sqrt{x-1} \neq 0$ pour le dénominateur, soit $x \neq 1$. Il reste $x > 1$: p est définie sur $]1; +\infty[$.

→ En c), le numérateur peut s'annuler : seul le dénominateur compte.

Exercice 08 — Avec une valeur interdite

Avec $f(x) = \frac{6}{x-1}$:

1°) $x - 1 = 0$ pour $x = 1$: f est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.

2°) $f(0) = \frac{6}{-1} = -6$ $f(4) = \frac{6}{3} = 2$ $f(-2) = \frac{6}{-3} = -2$

3°) Pour $x \neq 1$:

- $\frac{6}{x-1} = 3$ lorsque $x - 1 = 2$, soit $x = 3$;

- $\frac{6}{x-1} = -6$ lorsque $x - 1 = -1$, soit $x = 0$;

- le numérateur vaut 6, jamais 0 : 0 n'a aucun antécédent.

→ Le 3) se contrôle avec le 2) : $f(0) = -6$.

Exercice 09 — Avec une racine carrée

Avec $g(x) = \sqrt{4x+8}$:

1°) $4x + 8 \geq 0$, soit $4x \geq -8$, donc $x \geq -2$: g est définie sur $[-2; +\infty[$.

$$2^\circ) g(2) = \sqrt{16} = 4 \quad g(-1) = \sqrt{4} = 2 \quad -3 < -2 : g(-3) = \sqrt{-4} \text{ n'existe pas.}$$

3°) Pour $x \geq -2$:

- $\sqrt{4x+8} = 6$ lorsque $4x+8 = 36$, soit $4x = 28$, donc $x = 7$;
- $\sqrt{4x+8} = 0$ lorsque $4x+8 = 0$, donc $x = -2$;
- une racine carrée est positive : -1 n'a **aucun antécédent**.

III — Comparaison de deux fonctions

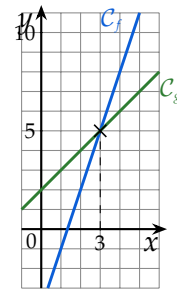
Exercice 10 — Comparer sur un graphique

- a) Les courbes se coupent aux points d'abscisses -2 ; 1 et 4 : $S = \{-2; 1; 4\}$.
- b) C_f est strictement au-dessus de C_g : $S = [-3; -2[\cup]1; 4[$.
- c) $g(x) = 2$ en -1 (le maximum local de g touche la droite $y = 2$) et en 4 ; C_g est au-dessus de cette droite après 4 : $S = \{-1\} \cup [4; 5]$.

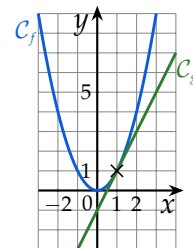
→ On répond par des abscisses, jamais par les ordonnées des points d'intersection. En c), le nombre isolé -1 est souvent oublié.

Exercice 11 — Signe d'une différence

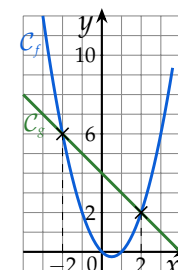
- a)
- $$f(x) - g(x) = 3x - 4 - (x + 2)$$
- $$f(x) - g(x) = 2x - 6$$
- $2x - 6 > 0$ pour $x > 3$. C_f est **au-dessous** de C_g sur $]-\infty; 3[$, **au-dessus** sur $]3; +\infty[$; les droites se coupent en $(3; 5)$, car $g(3) = 5$.



- b)
- $$f(x) - g(x) = x^2 - (2x - 1)$$
- $$f(x) - g(x) = x^2 - 2x + 1$$
- $$f(x) - g(x) = (x - 1)^2$$
- Un carré est positif : C_f est **au-dessus** de C_g sur $\mathbb{R}$, avec un seul point commun, $(1; 1)$. La droite touche la parabole sans la traverser.



- c)
- $$f(x) - g(x) = x^2 - x - (-x + 4)$$
- $$f(x) - g(x) = x^2 - 4$$
- $$f(x) - g(x) = (x - 2)(x + 2)$$
- $x + 2 = 0$ pour $x = -2$, et $x - 2 = 0$ pour $x = 2$ (tableau ci-dessous).



x	$-\infty$	-2	2	$+\infty$
$x + 2$	$-$	0	$+$	$+$
$x - 2$	$-$	$-$	0	$+$
$f(x) - g(x)$	$+$	0	$-$	$+$

$\mathcal{C}_f$ est **au-dessous** de $\mathcal{C}_g$ sur $] -2; 2[$, **au-dessus** sur $] -\infty; -2[$ et sur $] 2; +\infty[$; points d'intersection $(-2; 6)$ et $(2; 2)$.

→ L'ordonnée d'un point d'intersection se calcule avec f ou avec g : on doit trouver le même nombre, ce qui contrôle le calcul.

Exercice 12 — Une parabole et une droite

1°)

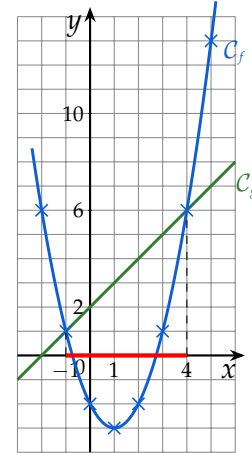
x	-2	-1	0	1	2	3	4	5
$f(x)$	6	1	-2	-3	-2	1	6	13
$g(x)$	0	1	2	3	4	5	6	7

$\mathcal{C}_f$ est une parabole, $\mathcal{C}_g$ une droite (figure ci-contre).

2°) Les courbes se coupent en $(-1; 1)$ et $(4; 6)$:

$$S = \{-1; 4\}.$$

$\mathcal{C}_f$ est sur ou sous $\mathcal{C}_g$ entre ces points : $S = [-1; 4]$ (en rouge sur l'axe).



3°) $f(x) - g(x) = x^2 - 2x - 2 - (x + 2)$

$$f(x) - g(x) = x^2 - 3x - 4$$

$$(x + 1)(x - 4) = x^2 - 4x + x - 4$$

$$(x + 1)(x - 4) = x^2 - 3x - 4$$

Les deux expressions sont égales : $f(x) - g(x) = (x + 1)(x - 4)$.

4°) $x + 1 = 0$ pour $x = -1$ et $x - 4 = 0$ pour $x = 4$:

x	$-\infty$	-1	4	$+\infty$
$x + 1$	-	0	+	+
$x - 4$	-	-	0	+
$f(x) - g(x)$	+	0	-	+

5°) $\mathcal{C}_f$ est **au-dessus** de $\mathcal{C}_g$ sur $] -\infty; -1[$ et sur $] 4; +\infty[$, **au-dessous** sur $] -1; 4[$; elles se coupent en $(-1; 1)$ et $(4; 6)$. Le calcul *démontre* ce que la figure du 2) laissait voir.

Exercice 13 — Une fonction quotient

Avec $f(x) = \frac{2x + 1}{x - 3}$:

1°) $x - 3 = 0$ pour $x = 3$: $D = \mathbb{R} \setminus \{3\}$.

2°) $f(0) = \frac{1}{-3} = -\frac{1}{3}$ $f(4) = \frac{9}{1} = 9$ $f(2) = \frac{5}{-1} = -5$

3°) Pour $x \neq 3$:

- $f(x) = 1$ lorsque $2x + 1 = x - 3$, soit $x = -4$;
- $f(x) = 0$ lorsque $2x + 1 = 0$, soit $x = -\frac{1}{2}$;

- $f(x) = 2$ lorsque $2x + 1 = 2(x - 3)$, soit $2x + 1 = 2x - 6$, ou $1 = -6$: c'est impossible, 2 n'a **aucun antécédent**.

4°) On réduit au même dénominateur :

$$2 + \frac{7}{x-3} = \frac{2(x-3) + 7}{x-3}$$

$$2 + \frac{7}{x-3} = \frac{2x+1}{x-3}$$

c'est bien $f(x)$.

5°) $f(x) - 2 = \frac{7}{x-3}$ a le signe de $x - 3$:

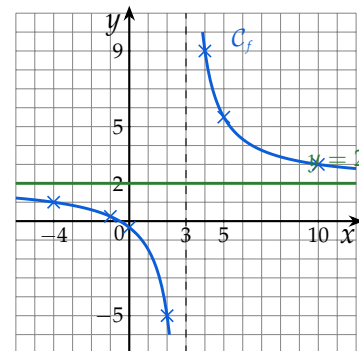
- pour $x > 3$, $f(x) - 2 > 0$: $\mathcal{C}_f$ est **au-dessus** de la droite $y = 2$;
- pour $x < 3$, $f(x) - 2 < 0$: $\mathcal{C}_f$ est **au-dessous**.

La courbe ne coupe jamais la droite : on retrouve le 3).

6°) $f(-4) = 1$; $f(-1) = 0,25$; $f(5) = 5,5$; $f(10) = 3$.

Avec le 2) : $f(0) \simeq -0,33$; $f(2) = -5$; $f(4) = 9$.

La courbe a deux branches, de part et d'autre de la droite verticale $x = 3$; elles s'approchent de la droite $y = 2$, la gauche par-dessous, la droite par-dessus.



IV — Sens de variation

Exercice 14 — Lecture graphique complète

- 1°) Antécédents de 0 : -4 ; 0 et 4. Antécédents de 1 : -3 ; -1 et 5. Antécédents de -2 : 1 et 3.
Antécédents de 4 : **aucun**, car le maximum de f vaut 3.
- 2°) Le **maximum** est 3, **atteint en 6** ; le **minimum** est -3 , **atteint en 2**.
- 3°) f est croissante sur $[-4; -2]$, décroissante sur $[-2; 2]$, croissante sur $[2; 6]$.

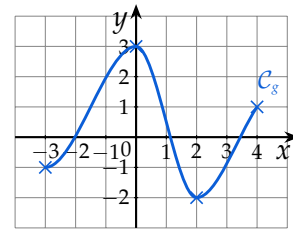
x	-4	-2	2	6
$f(x)$	0	2	-3	3

- 4°) $f(x) \geq 0$: $\mathcal{C}_f$ est sur ou au-dessus de l'axe des abscisses, $S = [-4; 0] \cup [4; 6]$.
 $f(x) < 1$: $\mathcal{C}_f$ est strictement sous la droite $y = 1$, $S = [-4; -3[\cup]-1; 5]$.
- 5°) Si $-2 \leq x \leq 2$, alors $-3 \leq f(x) \leq 2$; si $2 \leq x \leq 5$, alors $-3 \leq f(x) \leq 1$.
- 6°) $\mathcal{C}_f$ et (D) se coupent en un seul point, $(3; -2)$: $S = \{3\}$.
 $\mathcal{C}_f$ est sur ou sous (D) avant ce point : $S = [-4; 3]$.

→ En 5), on lit le tableau de variations : sur $[-2; 2]$, f descend de 2 à -3 ; sur $[2; 5]$, elle monte de -3 à $f(5) = 1$.

Exercice 15 — Du tableau de variations à la courbe

- 1°) $[-3; 4]$: c'est la première ligne du tableau.
- 2°) g est **croissante** sur $[-3; 0]$ (de -1 à 3), **décroissante** sur $[0; 2]$ (de 3 à -2), puis **croissante** sur $[2; 4]$ (de -2 à 1).
- 3°) Le maximum est **3**, **atteint en 0**; le minimum est **-2** , **atteint en 2**.
- 4°) Une courbe possible ci-contre : elle passe par $(-3; -1)$, $(0; 3)$, $(2; -2)$ et $(4; 1)$, et respecte les variations.



→ Un tableau de variations ne donne que l'allure de la courbe : il y a une infinité de courbes possibles.

Exercice 16 — Le bénéfice d'un atelier

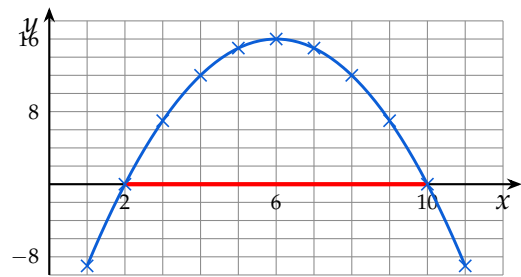
Avec $B(x) = -x^2 + 12x - 20$:

1°)

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$B(x)$	-9	0	7	12	15	16	15	12	7	0	-9

- 2°) La courbe est une parabole « tournée vers le bas », symétrique par rapport à la droite $x = 6$ (repère à unités différentes : grandeurs différentes sur les deux axes).
- 3°) B est croissante sur $[1; 6]$, décroissante sur $[6; 11]$.

x	1	6	11
$B(x)$	-9	16	-9



- 4°) Le bénéfice maximal est **16 centaines d'euros**, soit **1 600 €**, pour $x = 6$, c'est-à-dire **60 trottinettes**.
- 5°) $B(x) \geq 0$ pour $x \in [2; 10]$ (en rouge sur l'axe) : l'atelier ne perd pas d'argent lorsqu'il vend **entre 20 et 100 trottinettes**.

→ Attention aux unités : x est en dizaines de trottinettes, B en centaines d'euros.

Exercice 17 — Sens de variation par le calcul

Dans tout l'exercice, $a < b$, donc $a - b < 0$.

- 1°) $f(a) - f(b) = (4a - 7) - (4b - 7)$
 $f(a) - f(b) = 4a - 4b$
 $f(a) - f(b) = 4(a - b)$
 $4 > 0$ et $a - b < 0$: $f(a) - f(b) < 0$, donc $f(a) < f(b)$. f est **strictement croissante** sur $\mathbb{R}$.
- 2°) $g(a) - g(b) = (-3a + 2) - (-3b + 2)$
 $g(a) - g(b) = -3a + 3b$
 $g(a) - g(b) = -3(a - b)$
 $-3 < 0$ et $a - b < 0$: $g(a) - g(b) > 0$, donc $g(a) > g(b)$. g est **strictement décroissante** sur $\mathbb{R}$.
- 3°) De même, $(ma + p) - (mb + p) = m(a - b)$, de signe contraire à celui de m : **croissante si $m > 0$, décroissante si $m < 0$, constante si $m = 0$** .

$$4^\circ) u(a) - u(b) = a^2 + 4a - b^2 - 4b$$

$$u(a) - u(b) = (a^2 - b^2) + 4(a - b)$$

$$u(a) - u(b) = (a - b)(a + b) + 4(a - b)$$

$$u(a) - u(b) = (a - b)(a + b + 4) \quad \text{facteur commun } a - b$$

Sur $[0; +\infty[$, $a + b + 4 > 0$ et $a - b < 0$: $u(a) - u(b) < 0$, donc $u(a) < u(b)$. u est **croissante** sur $[0; +\infty[$.

$$5^\circ) v(a) - v(b) = \left(1 - \frac{1}{a}\right) - \left(1 - \frac{1}{b}\right)$$

$$v(a) - v(b) = -\frac{1}{a} + \frac{1}{b}$$

$$v(a) - v(b) = \frac{-b + a}{ab} \quad \text{même dénominateur } ab$$

$$v(a) - v(b) = \frac{a - b}{ab}$$

$a - b < 0$ et $ab > 0$ (deux nombres positifs) : $v(a) - v(b) < 0$, donc $v(a) < v(b)$. v est **croissante** sur $]0; +\infty[$.

→ Toujours la même démarche : calculer $f(a) - f(b)$, factoriser pour faire apparaître $a - b$, puis conclure sur le signe.

V — Fonction carré

Exercice 18 — Équations avec des carrés

On se ramène à $x^2 = k$ (ou $A^2 = k$) : deux solutions si $k > 0$, aucune si $k < 0$.

a) $x^2 = 36$: $S = \{-6; 6\}$.

b) $x^2 = 11$: $S = \{-\sqrt{11}; \sqrt{11}\}$.

c) $2x^2 - 5 = x^2 + 4$ équivaut à $x^2 = 9$: $S = \{-3; 3\}$.

d) $(3x + 1)^2 = 16$ équivaut à $3x + 1 = 4$ ou $3x + 1 = -4$, soit $x = 1$ ou $x = -\frac{5}{3}$: $S = \{-\frac{5}{3}; 1\}$.

e) $x^2 + 9 = 0$ équivaut à $x^2 = -9$: un carré n'est jamais négatif, $S = \emptyset$.

Exercice 19 — Comparer et encadrer des carrés

1°) $-4,2 < -3,9 \leq 0$ et la fonction carré est décroissante sur $] -\infty; 0]$: elle inverse l'ordre, $(-4,2)^2 > (-3,9)^2$.

$0 \leq 1,05 < 1,5$ et elle est croissante sur $[0; +\infty[$: elle conserve l'ordre, $1,05^2 < 1,5^2$.

2°) Sur $[3; 6]$ (positifs, ordre conservé) : $9 \leq x^2 \leq 36$.

Sur $[-5; -2]$ (négatifs, ordre inversé) : $4 \leq x^2 \leq 25$.

Sur $[-3; 1]$, qui contient 0 : x^2 descend de 9 à 0, puis monte jusqu'à 1, donc $0 \leq x^2 \leq 9$.

→ Piège du dernier cas : écrire $1 \leq x^2 \leq 9$. Dès que l'intervalle contient 0, la plus petite valeur de x^2 est 0.

Exercice 20 — Deux paraboles

1°) $f(x) - g(x) = 2x^2 + x + 7 - (x^2 - 3x + 3)$

$$f(x) - g(x) = x^2 + 4x + 4$$

$$f(x) - g(x) = (x + 2)^2 \quad \text{identité remarquable}$$

2°) Un carré est positif : $f(x) - g(x) \geq 0$ pour tout x , $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de $\mathcal{C}_g$ sur $\mathbb{R}$. L'égalité n'a lieu que pour $x = -2$: $f(-2) = 8 - 2 + 7 = 13$, le point commun est $(-2; 13)$.

VI — Fonction cube

Exercice 21 — Variations de la fonction cube

$$1^\circ) (a-b)(a^2+ab+b^2) = a^3 + a^2b + ab^2 - a^2b - ab^2 - b^3$$

$$(a-b)(a^2+ab+b^2) = a^3 - b^3$$

les termes a^2b et ab^2 s'annulent

2°) Si $a < b \leq 0$: $a^2 > 0$ (car $a < 0$), $b^2 \geq 0$, et $ab \geq 0$ (produit de deux nombres négatifs). Donc $a^2 + ab + b^2 > 0$.

Comme $a - b < 0$, le produit $a^3 - b^3$ est **négatif** : $a^3 < b^3$. La fonction cube est **croissante** sur $] -\infty ; 0]$.

3°) Si $0 \leq a < b$: $a^2 \geq 0$, $b^2 > 0$ et $ab \geq 0$, donc $a^2 + ab + b^2 > 0$, et de nouveau $a^3 < b^3$: elle est croissante sur $[0 ; +\infty[$.

Enfin, si $a < 0 < b$, alors $a^3 < 0 < b^3$. La fonction cube est **croissante** sur $\mathbb{R}$.

→ C'est la différence avec la fonction carré, qui change de sens en 0.

Exercice 22 — Calculs et équations

$$1^\circ) 3^3 = 27 ; (-2)^3 = -8 ; \left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{1}{27} ; (-0,2)^3 = -0,008$$

2°) L'équation $x^3 = k$ a une seule solution, la racine cubique $\sqrt[3]{k}$.

a) $x = \sqrt[3]{-125}$, soit $x = -5$: $S = \{-5\}$.

b) $x = \sqrt[3]{1}$, soit $x = 1$: $S = \{1\}$.

c) $3x^3 = -24$, soit $x^3 = -8$, donc $x = \sqrt[3]{-8}$: $S = \{-2\}$.

d) $x^3 - 4x = 0$, soit $x(x^2 - 4) = 0$, ou $x(x-2)(x+2) = 0$: $S = \{-2; 0; 2\}$.

→ En d), « diviser par x » ferait perdre la solution 0 : on factorise et l'on utilise le produit nul.

Exercice 23 — Encadrer des cubes

1°) La fonction cube conserve l'ordre : $(-3)^3 \leq x^3 \leq 2^3$, soit $-27 \leq x^3 \leq 8$.

2°) $-2,1 < -1,9$ et la fonction cube est croissante : $(-2,1)^3 < (-1,9)^3$.

3°) Le volume est $V = x^3$: $2 \leq x \leq 3$ donne $8 \leq V \leq 27$ (en cm^3). $x^3 = 64$ pour $x = \sqrt[3]{64}$, soit 4 : une arête de **4 cm**.

VII — Fonction inverse

Exercice 24 — Variations de la fonction inverse

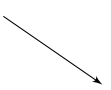
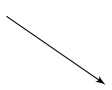
$$1^\circ) \frac{1}{a} - \frac{1}{b} = \frac{b}{ab} - \frac{a}{ab}$$

$$\frac{1}{a} - \frac{1}{b} = \frac{b-a}{ab}$$

$b - a > 0$ (car $a < b$) et $ab > 0$ (deux positifs) : $\frac{1}{a} - \frac{1}{b} > 0$, donc $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$. La fonction inverse est **décroissante** sur $]0 ; +\infty[$.

2°) Si $a < b < 0$: le calcul est le même, $b - a > 0$, et $ab > 0$ comme produit de deux négatifs. Elle est **décroissante** sur $] -\infty ; 0[$.

3°)

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$\frac{1}{x}$			

La double barre : 0 n'a pas d'image.

- 4°) $\frac{1}{-2} = -\frac{1}{2}$ et $\frac{1}{2} : -2 < 2$ et $-\frac{1}{2} < \frac{1}{2}$, l'ordre est *conservé*. La fonction inverse *n'est pas décroissante sur $\mathbb{R}^*$* : elle l'est sur chacun des deux intervalles, séparément.

Exercice 25 — Équations et encadrements

1°) Pour $x \neq 0$:

- a) $x = \frac{1}{8} : S = \{\frac{1}{8}\}$.
- b) $x = -\frac{3}{2}$ (l'inverse de $-\frac{2}{3}$) : $S = \{-\frac{3}{2}\}$.
- c) $4 = 6x$, soit $x = \frac{2}{3} : S = \{\frac{2}{3}\}$.
- d) Produit en croix : $x^2 = 25$, soit $S = \{-5; 5\}$.

2°) Sur $[2; 8]$ (positifs, ordre inversé) : $\frac{1}{8} \leq \frac{1}{x} \leq \frac{1}{2}$.
 Sur $[-10; -5]$ (négatifs, ordre inversé) : $-\frac{1}{5} \leq \frac{1}{x} \leq -\frac{1}{10}$.

3°) $0 < 0,3 < 0,4$ et la fonction inverse est décroissante sur $]0; +\infty[: \frac{1}{0,3} > \frac{1}{0,4}$.

Exercice 26 — Équations et inéquations quotient

1°) Valeur interdite : 2. Produit en croix, pour $x \neq 2$:

$$\begin{aligned} 2(x+3) &= 3(x-2) \\ 2x+6 &= 3x-6 \\ x &= 12 \end{aligned}$$

$$12 \neq 2 : S = \{12\}.$$

2°) a) Valeur interdite : 0.

$$\frac{1}{x} - 3 = \frac{1-3x}{x}$$

On cherche où $\frac{1-3x}{x} \leq 0$:

$$S =]-\infty; 0[\cup [\frac{1}{3}; +\infty[.$$

x	$-\infty$	0	$\frac{1}{3}$	$+\infty$
$1-3x$	+	+	0	-
x	-	0	+	+
$\frac{1-3x}{x}$	-	+	0	-

b) Valeur interdite : 1.

$$\frac{4}{x-1} - 2 = \frac{4-2(x-1)}{x-1}$$

$$\frac{4}{x-1} - 2 = \frac{6-2x}{x-1}$$

On cherche où $\frac{6-2x}{x-1} \geq 0 : S =]1; 3]$.

x	$-\infty$	1	3	$+\infty$
$6-2x$	+	+	0	-
$x-1$	-	0	+	+
$\frac{6-2x}{x-1}$	-	+	0	-

→ On ne multiplie jamais une inéquation par x ou par $x-1$, dont le signe est inconnu : on se ramène à un quotient comparé à 0. La valeur interdite est toujours exclue.

VIII — Fonction racine carrée

Exercice 27 — Se ramener au second degré

1°) Une solution vérifie $x-20 \geq 0$, soit $x \geq 20$. On élève au carré :

$$x = (x - 20)^2$$

$$x = x^2 - 40x + 400$$

$$0 = x^2 - 41x + 400$$

$$0 = (x - 16)(x - 25)$$

$x = 16$ ou $x = 25$; $16 < 20$ ne convient pas; contrôle pour 25 : $\sqrt{25} = 5 = 25 - 20$. $S = \{25\}$.

2°) Une solution vérifie $x \geq 30$. On élève au carré :

$$x = (x - 30)^2$$

$$x = x^2 - 60x + 900$$

$$0 = x^2 - 61x + 900$$

$$0 = (x - 25)(x - 36)$$

$x = 25$ ou $x = 36$; $25 < 30$ ne convient pas; contrôle pour 36 : $\sqrt{36} = 6 = 36 - 30$. $S = \{36\}$.

3°) La courbe de $x \mapsto \sqrt{x+3}$ et la droite $y = x + 1$ ont **un seul** point commun, d'abscisse environ 1.

4°) Une racine carrée est positive : une solution vérifie $x + 1 \geq 0$. On élève au carré :

$$x + 3 = (x + 1)^2$$

$$x + 3 = x^2 + 2x + 1$$

$$0 = x^2 + x - 2$$

5°) $(x + 2)(x - 1) = x^2 - x + 2x - 2$, soit $x^2 + x - 2$. Une solution vérifie donc $(x + 2)(x - 1) = 0$: $x = -2$ ou $x = 1$. Or $-2 + 1 < 0$: -2 ne convient pas. Contrôle pour 1 : $\sqrt{4} = 2 = 1 + 1$. $S = \{1\}$.

6°) Il faut $x - 3 \geq 0$, soit $x \geq 3$. On élève au carré :

$$4x = (x - 3)^2$$

$$4x = x^2 - 6x + 9$$

$$0 = x^2 - 10x + 9$$

$$(x - 5)^2 - 4^2 = x^2 - 10x + 25 - 16$$

$$(x - 5)^2 - 4^2 = x^2 - 10x + 9$$

Avec $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$: $x^2 - 10x + 9 = (x - 9)(x - 1)$, donc $x = 9$ ou $x = 1$. Or $1 < 3$ ne convient pas; contrôle pour 9 : $2\sqrt{9} = 6 = 9 - 3$. $S = \{9\}$.

→ Élever au carré fait apparaître une fausse solution : on revient toujours à la condition $(x + 1 \geq 0, x \geq 3)$.

Exercice 28 — Équations avec des racines carrées

a) Il faut $x \geq 0$; on élève au carré : $x = 81$. $S = \{81\}$.

b) Une racine carrée est positive : $S = \emptyset$.

c) Il faut $x \geq 4$; $x - 4 = 25$, donc $x = 29$. $S = \{29\}$.

d) $\sqrt{2x+1} = 5$; il faut $x \geq -\frac{1}{2}$; $2x + 1 = 25$, donc $x = 12$. $S = \{12\}$.

Exercice 29 — Calculer avec des racines carrées

1°) a) $\sqrt{18} = \sqrt{9 \times 2} = 3\sqrt{2}$, donc $\sqrt{18} - \sqrt{2} = 2\sqrt{2}$.

b) $(\sqrt{5} - \sqrt{2})(\sqrt{5} + \sqrt{2}) = 5 - 2 = 3$ $((a - b)(a + b) = a^2 - b^2)$.

$$\begin{aligned} \text{c) } (\sqrt{3} + \sqrt{6})^2 &= 3 + 2\sqrt{3}\sqrt{6} + 6 \\ (\sqrt{3} + \sqrt{6})^2 &= 9 + 2\sqrt{18} \\ (\sqrt{3} + \sqrt{6})^2 &= 9 + 6\sqrt{2} \end{aligned}$$

$$2^\circ) A^2 = 9 - 6\sqrt{10} + 10 = 19 - 6\sqrt{10} \text{ et } B^2 = 19 - 6\sqrt{10} : A^2 = B^2.$$

Mais $A \neq B$: $\sqrt{10} > 3$, donc $A < 0$, alors que $B \geq 0$ (une racine carrée est positive). En fait, $B = -A = \sqrt{10} - 3$.

$$3^\circ) \text{ a) } \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3} \times \sqrt{3}}, \text{ soit } \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

$$\text{b) } \frac{1}{\sqrt{7}-2} = \frac{\sqrt{7}+2}{(\sqrt{7}-2)(\sqrt{7}+2)} \quad \text{quantité conjuguée}$$

$$\frac{1}{\sqrt{7}-2} = \frac{\sqrt{7}+2}{7-4}$$

$$\frac{1}{\sqrt{7}-2} = \frac{\sqrt{7}+2}{3}$$

$$\text{c) } \sqrt{50} = 5\sqrt{2} \text{ et } \sqrt{32} = 4\sqrt{2}, \text{ donc } \sqrt{50} - \sqrt{32} + \sqrt{2} = (5 - 4 + 1)\sqrt{2}, \text{ soit } 2\sqrt{2}.$$

$$4^\circ) (\sqrt{6} + \sqrt{7})(\sqrt{6} - \sqrt{7}) = 6 - 7 = -1. \text{ Ce produit est négatif et } \sqrt{6} + \sqrt{7} > 0 : \text{ donc } \sqrt{6} - \sqrt{7} < 0, \text{ c'est-à-dire } \sqrt{6} < \sqrt{7}.$$

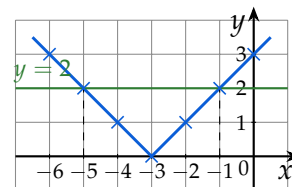
→ En 2), $A^2 = B^2$ donne seulement $|A| = |B|$: on ne peut pas conclure $A = B$.

IX — Fonction valeur absolue

Exercice 30 — Étude de $x \mapsto |x+3|$

$$1^\circ) \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c|} \hline x & -6 & -5 & -4 & -3 & -2 & -1 & 0 \\ \hline f(x) & 3 & 2 & 1 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ \hline \end{array}$$

2°) On place les points du tableau et on les relie : deux demi-droites en « V » (figure ci-contre).



$$3^\circ) \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline x & -\infty & -3 & +\infty \\ \hline |x+3| & \searrow & 0 & \nearrow \\ \hline \end{array}$$

Le minimum de f est 0, atteint en -3 .

4°) C'est le « V » de la valeur absolue, décalé de 3 unités vers la gauche, de sommet $(-3; 0)$.

5°) $x+3 = 2$ ou $x+3 = -2$, soit $x = -1$ ou $x = -5$:
 $S = \{-5; -1\}$.

Une valeur absolue est positive : $f(x) = -5$ n'a pas de solution, $S = \emptyset$.

6°) La droite d'équation $y = 2$ coupe $\mathcal{C}_f$ en deux points, d'abscisses -5 et -1 ; $\mathcal{C}_f$ n'a aucun point sous l'axe des abscisses, donc aucun d'ordonnée -5 .

Exercice 31 — Calculs et distances

- 1°) a) 12 b) $|-7| = 7$ c) $4 \times 5 = 20$ d) $\sqrt{2} \simeq 1,41 < 2$, donc $|\sqrt{2} - 2| = 2 - \sqrt{2}$ e)
 $6 - 2 = 4$
- 2°) $\sqrt{(-8)^2} = \sqrt{64} = 8$; $\sqrt{(-0,5)^2} = \sqrt{0,25} = 0,5$. En général, $\sqrt{a^2} = |a|$, et non a , qui est faux pour $a < 0$.
- 3°) Distance entre -6 et 3 : $|3 - (-6)| = 9$. Entre 7 et -1 : $|-1 - 7| = 8$.
- En d), on cherche d'abord le signe de $\sqrt{2} - 2$: $|A| = -A$ lorsque $A < 0$.

Exercice 32 — Équations avec des valeurs absolues

- a) $x = 9$ ou $x = -9$: $S = \{-9; 9\}$.
- b) Une valeur absolue est positive : $S = \emptyset$.
- c) $x + 2 = 6$ ou $x + 2 = -6$, soit $x = 4$ ou $x = -8$: $S = \{-8; 4\}$.
- d) $3x - 1 = 8$ ou $3x - 1 = -8$, soit $x = 3$ ou $x = -\frac{7}{3}$: $S = \{-\frac{7}{3}; 3\}$.

X — Fonctions affines**Exercice 33 — Lire l'expression d'une fonction affine**

On lit l'ordonnée à l'origine b (où la droite coupe l'axe des ordonnées), puis le coefficient directeur a avec deux points à coordonnées entières.

- (d_1) passe par $(0; 1)$ et descend de 2 quand x augmente de 1 : $y = -2x + 1$.
- (d_2) est horizontale, à la hauteur 3 : $y = 3$ (fonction constante).
- (d_3) passe par $(0; -2)$ et $(3; 0)$: $a = \frac{0 - (-2)}{3 - 0} = \frac{2}{3}$, donc $y = \frac{2}{3}x - 2$.

→ Pour (d_3) , la variation « quand x augmente de 1 » ne tombe pas sur le quadrillage : on prend deux points à coordonnées entières.

Exercice 34 — Équation réduite et alignement

- 1°) $a = \frac{-2 - 4}{2 - (-1)}$
 $a = -2$
- 2°) L'équation est $y = -2x + b$, et A est sur la droite : $4 = -2 \times (-1) + b$, soit $4 = 2 + b$, donc $b = 2$. (AB) : $y = -2x + 2$. Contrôle avec B : $-4 + 2 = -2$.
- 3°) C : $-2 \times 5 + 2 = -8$, c'est y_C : C est aligné avec A et B .
 D : $-2 \times (-3) + 2 = 8 \neq 9$: D n'est pas aligné avec A et B .

Exercice 35 — Intersection de deux droites

Un point commun a la même ordonnée sur les deux droites : on résout « y de $(d) = y$ de (d') ».

- 1°) $3x - 5 = -2x + 5$
 $5x = 10$
 $x = 2$
 puis $y = 3 \times 2 - 5 = 1$ (contrôle : $-4 + 5 = 1$). Le point est $(2; 1)$.
- 2°) (d) : $a = \frac{5 - (-1)}{3 - 0} = 2$ et $b = -1$ (ordonnée de A , d'abscisse 0), donc (d) : $y = 2x - 1$. Puis $2x - 1 = -x + 5$, soit $3x = 6$, donc $x = 2$ et $y = 3$ (contrôle : $-2 + 5 = 3$). Le point est $(2; 3)$.

XI — Prolongement : vers la dérivation

Exercice 36 — Calculer des taux de variation

1°) $f(0) = 0$ et $f(3) = 15$:

$$T = \frac{15 - 0}{3 - 0}$$

$$T = 5$$

$f(-4) = 8$ et $f(-1) = -1$:

$$T = \frac{-1 - 8}{-1 - (-4)}$$

$$T = -3$$

2°) $g(-1) = 9$ et $g(4) = -1$, donc $T = \frac{-10}{5}$, soit -2 . $g(2) = 3$ et $g(10) = -13$, donc $T = \frac{-16}{8}$, soit -2 . On trouve le même nombre, le coefficient directeur de la droite.

$$3^\circ) T = \frac{(mb + p) - (ma + p)}{b - a}$$

$$T = \frac{m(b - a)}{b - a}$$

$$T = m$$

La courbe d'une fonction affine est une droite : toute sécante est cette droite elle-même, de coefficient directeur m .

Exercice 37 — Taux et sens de variation

$$1^\circ) T = \frac{(b^2 - 4b) - (a^2 - 4a)}{b - a}$$

$$T = \frac{(b - a)(b + a) - 4(b - a)}{b - a}$$

$$T = a + b - 4 \quad \text{on simplifie par } b - a \neq 0$$

Sur $[2; +\infty[: a \geq 2$ et $b \geq 2$, distincts, donc $a + b > 4$ et $T > 0$: g est croissante. Sur $] -\infty; 2] : a + b < 4$, $T < 0$: g est décroissante.

$$2^\circ) T = \frac{\frac{1}{b} - \frac{1}{a}}{b - a}$$

$$T = \frac{a - b}{ab} \times \frac{1}{b - a}$$

$$T = -\frac{1}{ab} \quad a - b = -(b - a)$$

Sur $]0; +\infty[: ab > 0$, donc $T < 0$: h est décroissante.

Exercice 38 — Vitesse moyenne d'une chute

1°) $d(1) = 5$ et $d(3) = 45$: $\frac{45-5}{3-1} = 20$ m/s.

2°) $d(2) = 20$ et $d(2,5) = 31,25$: $\frac{11,25}{0,5} = 22,5$ m/s.

$$d(2,1) = 22,05 : \frac{2,05}{0,1} = 20,5 \text{ m/s.}$$

3°) Quand le second instant se rapproche de 2, la vitesse moyenne se rapproche de 20 m/s : c'est la vitesse de la bille à l'instant $t = 2$, le futur nombre dérivé de d en 2.