

FONCTIONS

Rappels et compléments

Cours — Première spécialité

Comment utiliser ce cours

Chaque partie commence par ce qu'il faut **savoir** (définitions, théorèmes), puis vient ce qu'il faut **savoir faire** : une méthode, avec des **exemples corrigés** faits en classe, puis des exercices « **À vous de jouer** » à chercher seul.

I — Images et antécédents

Définition 1 — Fonction, image, antécédent

Une **fonction** f associe à chaque nombre x d'un ensemble D **un seul** nombre, noté $f(x)$: c'est l'**image** de x par f . On écrit $f : x \mapsto f(x)$.

Si $f(x) = y$, on dit que x est **un antécédent** de y par f .

La **courbe** $\mathcal{C}_f$ de f est formée des points de coordonnées $(x; f(x))$: un point $M(a; b)$ est sur $\mathcal{C}_f$ lorsque $b = f(a)$. On dit que $y = f(x)$ est une **équation** de $\mathcal{C}_f$.

À retenir

- Un nombre a **une seule** image ; il peut avoir **aucun**, **un** ou **plusieurs** antécédents.
- Sur la courbe, on lit les images sur l'axe des **ordonnées** et les antécédents sur l'axe des **abscisses**.

Méthode 1 — Calculer une image, chercher un antécédent

Exemples corrigés

Calculer l'image demandée, puis chercher les antécédents demandés.

- $f(x) = 3x - 4$: image de -2 ; antécédents de 11 .
- $g(x) = x^2 + 2$: image de -3 ; antécédents de 6 , puis de 1 .

a)

$$f(-2) = 3 \times (-2) - 4 \quad \text{on remplace } x \text{ par } -2, \text{ entre parenthèses}$$

$$f(-2) = -10$$

$$3x - 4 = 11 \quad \text{antécédents de } 11 : \text{on résout } f(x) = 11$$

$$3x = 15 \quad \text{on ajoute } 4$$

$$x = 5 \quad \text{on divise par } 3$$

Le nombre 11 a un seul antécédent par f : 5 .

on conclut par une phrase : combien d'antécédents, et lesquels

b)

$$g(-3) = (-3)^2 + 2 \quad (-3)^2 = 9$$

$$g(-3) = 11$$

$$x^2 + 2 = 6 \quad \text{on résout } g(x) = 6$$

$$x^2 = 4$$

6 a **deux** antécédents : -2 et 2 .

deux nombres ont pour carré 4

$$x^2 + 2 = 1 \quad \text{on résout } g(x) = 1$$

$$x^2 = -1$$

1 n'a **aucun** antécédent par g .

un carré n'est jamais négatif

À vous de jouer

1°) $h(x) = -2x + 7$: calculer $h(3)$ et $h(-4)$, puis chercher les antécédents de 13.

2°) $k(x) = x^2 - 5$: calculer $k(-1)$, puis chercher les antécédents de 4 et de -6.

Réponses : 1°) $h(3) = 1$; $h(-4) = 15$; 13 a un antécédent : -3; 2°) $k(-1) = -4$; 4 a deux antécédents, -3 et 3; -6 n'en a aucun ($x^2 = -1$).

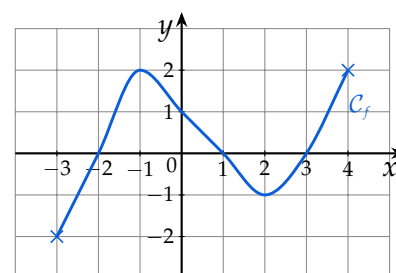
Méthode 2 — Lire une image, des antécédents sur une courbe

Exemples corrigés

La courbe ci-contre est celle d'une fonction f définie sur $[-3; 4]$.

a) Lire $f(-1)$ et $f(0)$.

b) Lire les antécédents de 0, puis ceux de 3.



a)

La courbe passe par $(-1; 2)$ et par $(0; 1)$: $f(-1) = 2$ et $f(0) = 1$.

b)

La droite d'équation $y = 0$ coupe la courbe en trois points : 0 a **trois** antécédents, -2; 1 et 3.

La droite d'équation $y = 3$ ne coupe pas la courbe : 3 n'a **aucun** antécédent.

on part de -1 sur l'axe des abscisses, on va verticalement jusqu'à la courbe, on lit l'ordonnée

*on trace la droite horizontale $y = 0$ et on lit les abscisses de tous les points communs
aucun point commun : aucun antécédent*

À vous de jouer

1°) Lire les images de -3, de 2 et de 4.

2°) Lire les antécédents de 2.

3°) Combien de solutions l'équation $f(x) = 1$ a-t-elle?

Réponses : 1°) $f(-3) = -2$; $f(2) = -1$; $f(4) = 2$; 2°) -1 et 4; 3°) trois solutions (la droite $y = 1$ coupe la courbe trois fois).

► **À faire** : fiche d'exercices du chapitre, exercices 1 à 5.

II — Ensemble de définition

Définition 2 — Ensemble de définition

L'**ensemble de définition** de f est l'ensemble des nombres x qui ont une image par f . Quand l'énoncé ne le donne pas, c'est l'ensemble de **tous** les nombres pour lesquels on peut calculer $f(x)$.

Propriété 1 — Les deux calculs impossibles

• **Diviser par 0**. Dans un quotient, les valeurs de x qui annulent le **dénominateur** sont des **valeurs interdites**.

Exemple : $x \mapsto \frac{1}{x}$ est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, noté $\mathbb{R}^*$.

- **Prendre la racine carrée d'un nombre négatif.** Pour $\sqrt{A}$, il faut $A \geq 0$.

Exemple : $x \mapsto \sqrt{x}$ est définie sur $[0; +\infty[$.

Sans quotient ni racine carrée (par exemple $x \mapsto 2x^2 - x + 3$), la fonction est définie sur $\mathbb{R}$.

Méthode 3 — Ensemble de définition d'un quotient

Exemples corrigés

Déterminer l'ensemble de définition de chaque fonction, puis les antécédents demandés.

a) $f(x) = \frac{1}{x-2}$: antécédents de 1, puis de 0.

b) $g(x) = \frac{5}{x^2+4}$: antécédents de 1.

a)

$$x - 2 = 0 \quad \text{on ne peut pas diviser par 0 : on cherche où le dénominateur s'annule}$$

$$x = 2 \quad 2 \text{ est la valeur interdite}$$

f est définie sur $D = \mathbb{R} \setminus \{2\}$.

on retire la valeur interdite de $\mathbb{R}$

$$\frac{1}{x-2} = 1 \quad \text{antécédents de 1 : on résout } f(x) = 1$$

$$x - 2 = 1 \quad \text{le quotient vaut 1 quand le dénominateur vaut 1}$$

$$x = 3 \quad 3 \neq 2 : \text{la solution convient}$$

Le nombre 1 a un antécédent : 3. Le nombre 0 n'a **aucun** antécédent.

un quotient est nul seulement si son numérateur est nul ; ici il vaut 1

b)

Pour tout x , $x^2 + 4 \geq 4$: g est définie sur $\mathbb{R}$.

un carré est positif : le dénominateur ne s'annule jamais

$$\frac{5}{x^2+4} = 1 \quad \text{on résout } g(x) = 1$$

$$x^2 + 4 = 5 \quad \text{le quotient vaut 1 quand le dénominateur vaut 5}$$

$$x^2 = 1$$

Le nombre 1 a deux antécédents : -1 et 1 .

deux nombres ont pour carré 1

À vous de jouer

1°) Déterminer l'ensemble de définition de chaque fonction h, k, m :

$$h(x) = \frac{7}{x+5} \quad k(x) = \frac{x-1}{3x-6} \quad m(x) = \frac{2}{x^2+3}$$

2°) $p(x) = \frac{4}{x+1}$: ensemble de définition ; calculer $p(1)$ et $p(3)$; antécédents de -4 et de 0 .

Réponses : 1°) $h : \mathbb{R} \setminus \{-5\}$; $k : \mathbb{R} \setminus \{2\}$; $m : \mathbb{R}$, car $x^2 + 3 \geq 3$; 2°) $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$; $p(1) = 2$ et $p(3) = 1$; -4 a un antécédent, -2 ; 0 n'en a aucun.

Méthode 4 — Ensemble de définition avec une racine carrée

Exemples corrigés

Déterminer l'ensemble de définition de chaque fonction.

a) $f(x) = \sqrt{x+3}$; calculer ensuite, si possible, $f(1)$ et $f(-7)$.

b) $g(x) = \sqrt{8-2x}$.

a)

$$x + 3 \geq 0 \quad \text{le nombre sous la racine doit être positif ou nul}$$

$$x \geq -3$$

f est définie sur $[-3; +\infty[$.

$f(1) = \sqrt{4}$, soit $f(1) = 2$. Mais $f(-7) = \sqrt{-4}$ n'existe pas.

borne comprise : $\sqrt{0} = 0$ existe

$-7 < -3$: -7 n'est pas dans l'ensemble de définition

b)

$$8 - 2x \geq 0 \quad \text{nombre sous la racine positif ou nul}$$

$$-2x \geq -8 \quad \text{on retire 8}$$

$$x \leq 4 \quad \text{on divise par } -2, \text{ négatif : le sens change}$$

g est définie sur $]-\infty; 4]$.

contrôle : $g(4) = \sqrt{0}$ existe, $g(5) = \sqrt{-2}$ n'existe pas

À vous de jouer

1°) Déterminer l'ensemble de définition de chaque fonction h, k, m :

$$h(x) = \sqrt{x-6} \quad k(x) = \sqrt{3x+9} \quad m(x) = \sqrt{10-5x}$$

2°) $p(x) = \sqrt{x+4}$: ensemble de définition ; calculer $p(0)$ et $p(5)$; antécédents de 4 et de -2 .

Réponses : 1°) h : $[6; +\infty[$; k : $[-3; +\infty[$; m : $]-\infty; 2]$; 2°) $[-4; +\infty[$; $p(0) = 2$ et $p(5) = 3$; 4 a un antécédent, 12 ($x+4 = 16$) ; -2 n'en a aucun, car une racine carrée est positive.

► **À faire** : fiche d'exercices du chapitre, exercices 6 à 9.

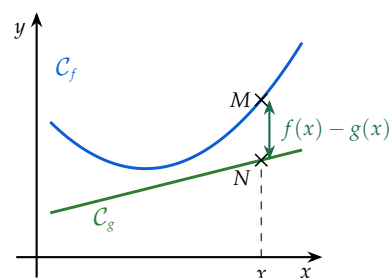
III — Comparaison de deux fonctions

Définition 3 — Position relative de deux courbes

Soient f et g deux fonctions définies sur un intervalle I . Pour un même x , les points $M(x; f(x))$ de $\mathcal{C}_f$ et $N(x; g(x))$ de $\mathcal{C}_g$ sont sur la même verticale :

- si $f(x) > g(x)$, M est **au-dessus** de N ;
- si $f(x) < g(x)$, M est **au-dessous** de N ;
- si $f(x) = g(x)$, M et N sont confondus : les courbes se **coupent**.

Étudier la **position relative** de $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$, c'est trouver où $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de $\mathcal{C}_g$, et où elle est au-dessous.



Propriété 2 — Deux façons de comparer

- **Sur le graphique** : les solutions de $f(x) = g(x)$ sont les abscisses des points d'intersection de $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$; celles de $f(x) > g(x)$, les abscisses des points où $\mathcal{C}_f$ est strictement au-dessus de $\mathcal{C}_g$.
- **Par le calcul** : $f(x) > g(x)$ revient à $f(x) - g(x) > 0$, c'est-à-dire « $f(x) - g(x)$ est **positif** ». Comparer $f(x)$ et $g(x)$, c'est donc étudier le **signe de la différence** $f(x) - g(x)$:
 - là où $f(x) - g(x) > 0$ (positif), $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de $\mathcal{C}_g$;
 - là où $f(x) - g(x) < 0$ (négatif), $\mathcal{C}_f$ est au-dessous de $\mathcal{C}_g$;
 - là où $f(x) - g(x) = 0$, les courbes se coupent.

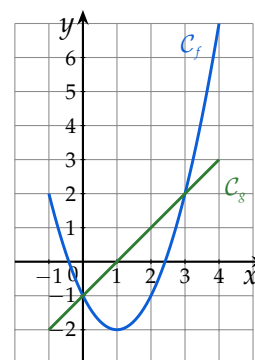
Le graphique permet de **conjecturer** ; le calcul **démontre**.

Méthode 5 — Comparer deux fonctions sur un graphique

Exemples corrigés

Les courbes ci-contre sont celles de $f(x) = x^2 - 2x - 1$ et de $g(x) = x - 1$, sur $[-1; 4]$. Résoudre graphiquement :

- l'équation $f(x) = g(x)$;
- l'inéquation $f(x) < g(x)$.



a)

Les courbes se coupent en $(0; -1)$ et $(3; 2)$: $S = \{0; 3\}$.

on lit les **abscisses** des points d'intersection ;
erreur fréquente : répondre -1 et 2

b)

C_f est strictement sous C_g entre ces deux points : $S =]0; 3[$.

on répond par un intervalle ; bornes exclues, car en 0 et en 3 , $f(x) = g(x)$

À vous de jouer

1°) Résoudre graphiquement $f(x) \geq g(x)$.

2°) Résoudre graphiquement $f(x) = 2$.

Réponses : 1°) $S = [-1; 0] \cup [3; 4]$; 2°) $S = \{-1; 3\}$.

Méthode 6 — Position relative par le signe de $f(x) - g(x)$

Exemples corrigés

Étudier la position relative de C_f et C_g sur $\mathbb{R}$.

- $f(x) = x^2 + 5$ et $g(x) = 4x + 1$.
- $f(x) = x^2 - 2x - 1$ et $g(x) = x - 1$ (les fonctions de la méthode 5).

a)

$$f(x) - g(x) = x^2 + 5 - (4x + 1) \quad \text{on calcule la différence ; parenthèses autour de } g(x)$$

$$f(x) - g(x) = x^2 - 4x + 4$$

$$f(x) - g(x) = (x - 2)^2 \quad \text{identité remarquable : une forme dont on connaît le signe}$$

$f(x) - g(x) \geq 0$ pour tout x , et $f(x) - g(x) = 0$ seulement pour $x = 2$. un carré est positif ; il est nul quand $x - 2 = 0$

C_f est au-dessus de C_g sur $\mathbb{R}$; un seul point commun, $(2; 9)$. on conclut, puis on calcule l'ordonnée : $g(2) = 9$

b)

$$f(x) - g(x) = x^2 - 2x - 1 - (x - 1) \quad \text{parenthèses autour de } g(x)$$

$$f(x) - g(x) = x^2 - 3x$$

$$f(x) - g(x) = x(x - 3) \quad \text{facteur commun } x : \text{un produit}$$

$x = 0$ pour $x = 0$, et $x - 3 = 0$ pour $x = 3$.

le signe d'un produit se lit dans un tableau de signes

x	$-\infty$	0	3	$+\infty$
x	$-$	0	$+$	$+$
$x - 3$	$-$	$-$	0	$+$
$f(x) - g(x)$	$+$	0	0	$+$

$\mathcal{C}_f$ est au-dessus de $\mathcal{C}_g$ sur $]-\infty; 0[$ et sur $]3; +\infty[$, au-dessous sur $]0; 3[$; elles se coupent en $(0; -1)$ et $(3; 2)$.

signe $+$: au-dessus; signe $-$: au-dessous;
ordonnées : $g(0) = -1$ et $g(3) = 2$. Le calcul
démontre ce que le graphique laissait voir

À vous de jouer

Étudier la position relative de $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$, sur $\mathbb{R}$:

1°) $f(x) = 2x + 3$ et $g(x) = 5x - 6$.

2°) $f(x) = x^2 + 1$ et $g(x) = -2x$.

3°) $f(x) = x^2 + 3x$ et $g(x) = 3x + 16$.

Réponses : 1°) $f(x) - g(x) = -3x + 9$: $\mathcal{C}_f$ au-dessus sur $]-\infty; 3[$, au-dessous sur $]3; +\infty[$, intersection $(3; 9)$; 2°) $(x + 1)^2$: $\mathcal{C}_f$ au-dessus sur $\mathbb{R}$, point commun $(-1; 2)$; 3°) $(x - 4)(x + 4)$: $\mathcal{C}_f$ au-dessous sur $]-4; 4[$, au-dessus ailleurs, intersections $(-4; 4)$ et $(4; 28)$.

► **À faire** : fiche d'exercices du chapitre, exercices 10 à 13.

IV — Sens de variation

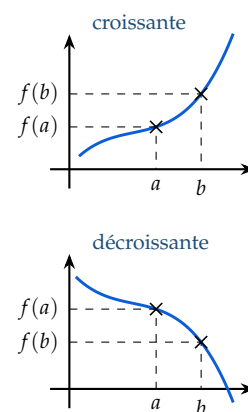
Définition 4 — Fonction croissante, décroissante

Soit f une fonction définie sur un intervalle I .

- f est **croissante** sur I si, pour tous a et b de I tels que $a < b$, on a $f(a) \leq f(b)$: f **conserve** l'ordre.
- f est **décroissante** sur I si, pour tous a et b de I tels que $a < b$, on a $f(a) \geq f(b)$: f **inverse** l'ordre.

Avec $f(a) < f(b)$ (ou $f(a) > f(b)$), on dit **strictement** croissante (ou décroissante).

Le **maximum** de f sur I est la plus grande valeur prise par $f(x)$; le **minimum**, la plus petite. Un **tableau de variations** résume tout cela.



Méthode 7 — Démontrer un sens de variation avec la définition

Exemples corrigés

Démontrer, avec la définition, le sens de variation de la fonction $f(x) = -2x + 5$ sur $\mathbb{R}$.

Résolution

Soient a et b deux réels tels que $a < b$.

on prend deux nombres *quelconques*, avec $a < b$

$$f(a) - f(b) = (-2a + 5) - (-2b + 5) \quad \text{on calcule } f(a) - f(b); \text{ parenthèses autour de } f(b)$$

$$f(a) - f(b) = -2a + 5 + 2b - 5$$

$$f(a) - f(b) = -2a + 2b$$

$$f(a) - f(b) = -2(a - b) \quad \text{on factorise pour faire apparaître } a - b$$

$a - b < 0$ et $-2 < 0$, donc $f(a) - f(b) > 0$, c'est-à-dire $f(a) > f(b)$.

f est strictement **décroissante** sur $\mathbb{R}$.

À vous de jouer

1°) Démontrer de la même façon le sens de variation de $g(x) = 4x - 3$ sur $\mathbb{R}$.

2°) Même travail pour $h(x) = -\frac{1}{3}x + 2$.

3°) Que peut-on conjecturer pour une fonction $x \mapsto mx + p$, selon le signe de m ?

Réponses : 1°) $g(a) - g(b) = 4(a - b) < 0$, donc $g(a) < g(b)$: g est strictement croissante; 2°) $h(a) - h(b) = -\frac{1}{3}(a - b) > 0$, donc $h(a) > h(b)$: h est strictement décroissante; 3°) croissante si $m > 0$, décroissante si $m < 0$, constante si $m = 0$.

$a < b$ donne $a - b < 0$; le produit de deux négatifs est positif

$a < b$ entraîne $f(a) > f(b)$: f inverse l'ordre

► **À faire** : fiche d'exercices du chapitre, exercices 14 à 17.

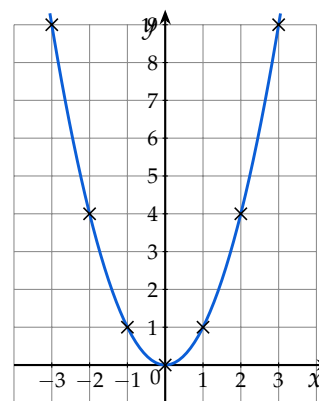
V — Fonction carré

Définition 5 — Fonction carré

La **fonction carré** est la fonction $x \mapsto x^2$, définie sur $\mathbb{R}$.

Sa courbe est une **parabole** de sommet l'origine. Elle est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées, car $(-x)^2 = x^2$: on dit que la fonction carré est **paire**.

Équation $x^2 = k$: si $k > 0$, deux solutions, $-\sqrt{k}$ et $\sqrt{k}$; si $k = 0$, une solution, 0; si $k < 0$, aucune solution.



Propriété 3 — Variations de la fonction carré

La fonction carré est strictement **décroissante** sur $]-\infty; 0]$ et strictement **croissante** sur $[0; +\infty[$. Son minimum est 0, atteint en 0.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
x^2			

Démonstration

Soient $a < b$. On factorise : $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$, et $a - b < 0$.

- Sur $[0; +\infty[$: $a \geq 0$ et $b > 0$, donc $a + b > 0$. Le produit est négatif : $a^2 < b^2$, la fonction est croissante.
- Sur $]-\infty; 0]$: $a < 0$ et $b \leq 0$, donc $a + b < 0$. Le produit de deux négatifs est positif : $a^2 > b^2$, la fonction est décroissante.

Méthode 8 — Comparer ou encadrer des carrés

Exemples corrigés

a) Comparer $(-2,7)^2$ et $(-2,3)^2$ sans les calculer.

b) Encadrer x^2 sachant que $-4 \leq x \leq -1$, puis sachant que $-2 \leq x \leq 3$.

a)

$-2,7 < -2,3 \leq 0$, donc $(-2,7)^2 > (-2,3)^2$.

b)

deux nombres négatifs : la fonction carré est décroissante sur $]-\infty; 0]$, elle inverse l'ordre

$-4 \leq x \leq -1$ donne $(-1)^2 \leq x^2 \leq (-4)^2$, soit $1 \leq x^2 \leq 16$.

$-2 \leq x \leq 3$ donne $0 \leq x^2 \leq 9$.

nombre négatifs : l'ordre s'inverse

l'intervalle contient 0 : x^2 descend de 4 à 0, puis monte jusqu'à 9. Piège : écrire $4 \leq x^2 \leq 9$

À vous de jouer

1°) Comparer sans calculatrice $1,8^2$ et $1,6^2$, puis $(-0,4)^2$ et $(-0,9)^2$.

2°) Encadrer x^2 sachant que $2 \leq x \leq 5$; puis $-3 \leq x \leq -2$; puis $-1 \leq x \leq 4$.

Réponses : 1°) $1,8^2 > 1,6^2$ (ordre conservé); $(-0,4)^2 < (-0,9)^2$ (ordre inversé); 2°) $4 \leq x^2 \leq 25$; $4 \leq x^2 \leq 9$; $0 \leq x^2 \leq 16$.

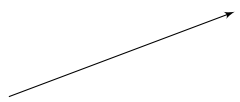
► **À faire** : fiche d'exercices du chapitre, exercices 18 à 20.

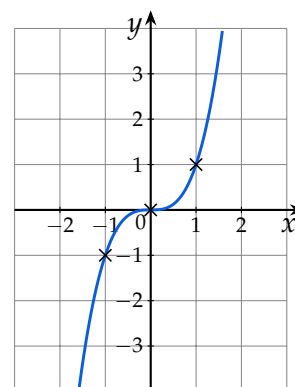
VI — Fonction cube

Définition 6 — Fonction cube

La **fonction cube** est la fonction $x \mapsto x^3$, définie sur $\mathbb{R}$.

Elle est strictement **croissante** sur $\mathbb{R}$: elle conserve toujours l'ordre.

x	$-\infty$	$+\infty$
x^3		



Sa courbe est symétrique par rapport à l'origine O , car $(-x)^3 = -x^3$: on dit que la fonction cube est **impaire**.

Équation $x^3 = k$: elle a toujours **une seule** solution, la **racine cubique** de k , notée $\sqrt[3]{k}$: le nombre dont le cube vaut k .

Exemples : $\sqrt[3]{27} = 3$; $\sqrt[3]{-8} = -2$.

Méthode 9 — Résoudre $x^3 = k$, comparer, encadrer des cubes

Exemples corrigés

a) Résoudre $x^3 = -8$, puis $2x^3 + 3 = 57$.

b) Encadrer x^3 sachant que $-1 \leq x \leq 2$.

c) Comparer sans calculatrice $(-2,5)^3$ et $(-2,4)^3$.

a)

$x = \sqrt[3]{-8}$, soit $x = -2$: $S = \{-2\}$.

une seule solution, la racine cubique de -8 ;
contrôle : $(-2)^3 = -8$

$$2x^3 + 3 = 57$$

$$2x^3 = 54 \quad \text{on isole } x^3 : \text{on retire } 3$$

$$x^3 = 27 \quad \text{on divise par } 2$$

$x = \sqrt[3]{27}$, soit $x = 3$: $S = \{3\}$.

racine cubique : le nombre dont le cube vaut 27

b)

$(-1)^3 \leq x^3 \leq 2^3$, soit $-1 \leq x^3 \leq 8$.

la fonction cube **conserve** l'ordre, même si l'intervalle contient 0

c)

$$-2,5 < -2,4, \text{ donc } (-2,5)^3 < (-2,4)^3.$$

la fonction cube est croissante sur $\mathbb{R}$: elle conserve l'ordre

À vous de jouer

1°) Résoudre $x^3 = 64$, puis $x^3 + 125 = 0$.

2°) Encadrer x^3 sachant que $-3 \leq x \leq 1$.

3°) Comparer sans calculatrice $(-1,3)^3$ et $(-1,1)^3$.

Réponses : 1°) $x = \sqrt[3]{64} : S = \{4\}$; $x = \sqrt[3]{-125} : S = \{-5\}$; 2°) $-27 \leq x^3 \leq 1$; 3°) $-1,3 < -1,1$, donc $(-1,3)^3 < (-1,1)^3$.

► **À faire** : fiche d'exercices du chapitre, exercices 21 à 23.

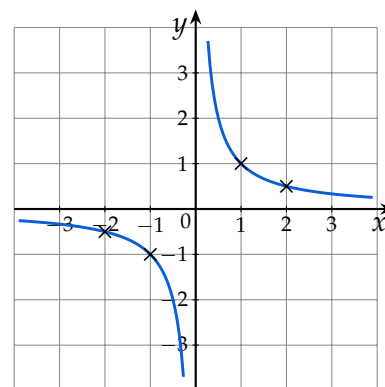
VII — Fonction inverse

Définition 7 — Fonction inverse

La **fonction inverse** est la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$, définie sur $\mathbb{R}^*$ (0 est une valeur interdite).

Elle est strictement **décroissante** sur $] -\infty ; 0[$, et strictement **décroissante** sur $] 0 ; +\infty[$. La double barre rappelle que 0 n'a pas d'image.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$\frac{1}{x}$			



Sa courbe est une **hyperbole**, symétrique par rapport à l'origine : la fonction inverse est **impaire**.

Méthode 10 — Résoudre $\frac{1}{x} = k$, comparer, encadrer des inverses

Exemples corrigés

a) Résoudre $\frac{1}{x} = 5$, puis $\frac{2}{x} = 8$.

b) Encadrer $\frac{1}{x}$ sachant que $2 \leq x \leq 4$, puis sachant que $-5 \leq x \leq -1$.

c) Comparer sans calculatrice $\frac{1}{0,3}$ et $\frac{1}{0,6}$.

a)

Pour $x \neq 0$: $x = \frac{1}{5}$, donc $S = \{\frac{1}{5}\}$.

Pour $x \neq 0$: $\frac{2}{x} = 8$ donne $2 = 8x$, soit $x = \frac{1}{4}$: $S = \{\frac{1}{4}\}$.

b)

$2 \leq x \leq 4$ donne $\frac{1}{4} \leq \frac{1}{x} \leq \frac{1}{2}$.

$-5 \leq x \leq -1$ donne $\frac{1}{-1} \leq \frac{1}{x} \leq \frac{1}{-5}$, soit $-1 \leq \frac{1}{x} \leq -\frac{1}{5}$.

c)

$0 < 0,3 < 0,6$, donc $\frac{1}{0,3} > \frac{1}{0,6}$.

$\frac{1}{x} = k$ donne $x = \frac{1}{k}$; contrôle : $1 \div \frac{1}{5} = 5$

on multiplie par x ; contrôle : $2 \div \frac{1}{4} = 8$

nombre de même signe (positifs) : la fonction inverse **inverse** l'ordre

nombre négatifs : l'ordre s'inverse aussi

nombre positifs : la fonction inverse inverse l'ordre

À vous de jouer

1°) Résoudre $\frac{1}{x} = -4$, puis $\frac{3}{x} = 6$.

2°) Encadrer $\frac{1}{x}$ sachant que $1 \leq x \leq 5$, puis $-4 \leq x \leq -2$.

3°) Comparer sans calculatrice $\frac{1}{0,7}$ et $\frac{1}{0,9}$.

Réponses : 1°) $S = \left\{-\frac{1}{4}\right\}$; $S = \left\{\frac{1}{2}\right\}$; 2°) $\frac{1}{5} \leq \frac{1}{x} \leq 1$; $-\frac{1}{2} \leq \frac{1}{x} \leq -\frac{1}{4}$; 3°) $0 < 0,7 < 0,9$, donc $\frac{1}{0,7} > \frac{1}{0,9}$.

► À faire : fiche d'exercices du chapitre, exercices 24 à 26.

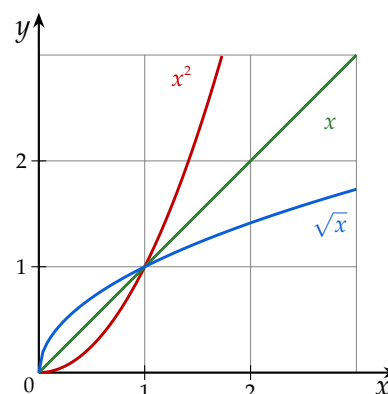
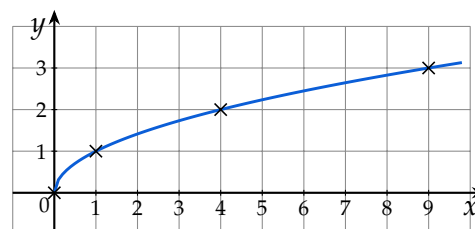
VIII — Fonction racine carrée

Définition 8 — Fonction racine carrée

La **fonction racine carrée** est la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$, définie sur $[0; +\infty[$. Pour $x \geq 0$, $\sqrt{x}$ est le nombre **positif** dont le carré vaut x .

Elle est strictement **croissante** sur $[0; +\infty[$.

x	0	$+\infty$
$\sqrt{x}$	0	$\nearrow$



Comparer x^2 , x et $\sqrt{x}$ (figure ci-dessus) : sur $[0; 1]$, $x^2 \leq x \leq \sqrt{x}$; sur $[1; +\infty[$, $\sqrt{x} \leq x \leq x^2$.

Méthode 11 — Résoudre une équation avec une racine carrée

Exemples corrigés

Résoudre l'équation $\sqrt{x} = x - 2$. On admet que $x^2 - 5x + 4 = (x - 1)(x - 4)$.

Résolution

Une solution vérifie $x - 2 \geq 0$, soit $x \geq 2$.

$$\begin{aligned} \sqrt{x} &= x - 2 && \text{on recopie l'équation} \\ x &= (x - 2)^2 && \text{on élève au carré} \\ x &= x^2 - 4x + 4 && \text{identité remarquable} \\ 0 &= x^2 - 5x + 4 && \text{une équation du second degré} \\ 0 &= (x - 1)(x - 4) && \text{factorisation donnée} \end{aligned}$$

$x = 1$ ou $x = 4$.

$1 < 2$ ne convient pas ; 4 convient. $S = \{4\}$.

la racine est isolée ; une racine carrée est positive, donc le membre de droite aussi

un produit est nul si l'un de ses facteurs est nul
on garde les solutions qui vérifient $x \geq 2$;
contrôle : $\sqrt{4} = 2 = 4 - 2$

À vous de jouer

1°) Résoudre $\sqrt{x} = x - 6$; on admet que $x^2 - 13x + 36 = (x - 4)(x - 9)$.

2°) Résoudre $\sqrt{x} = x - 12$; on admet que $x^2 - 25x + 144 = (x - 9)(x - 16)$.

Réponses : 1°) $x \geq 6$; $x = (x - 6)^2$ donne $x = 4$ ou $x = 9$; $4 < 6$ ne convient pas; $S = \{9\}$; 2°) $x \geq 12$; $x = (x - 12)^2$ donne $x = 9$ ou $x = 16$; $S = \{16\}$.

► **À faire** : fiche d'exercices du chapitre, exercices 27 à 29.

IX — Fonction valeur absolue

Définition 9 — Valeur absolue

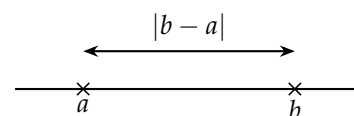
La **valeur absolue** d'un nombre x , notée $|x|$, est sa distance à 0 :

$$|x| = x \text{ si } x \geq 0 \quad \text{et} \quad |x| = -x \text{ si } x < 0.$$

Exemples : $|6| = 6$; $|-6| = 6$; $|0| = 0$. Une valeur absolue est toujours positive.

Propriété 4 — Valeur absolue et distance

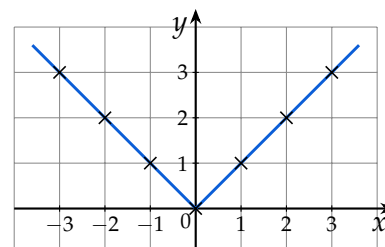
- La **distance** entre deux nombres a et b est $|b - a|$.
Exemple : entre -3 et 5 , la distance est $|5 - (-3)| = 8$.
- Pour tout réel a , $\sqrt{a^2} = |a|$.
- Si $r > 0$, $|A| = r$ équivaut à $A = r$ ou $A = -r$. Si $r < 0$, $|A| = r$ n'a pas de solution.



Propriété 5 — Fonction valeur absolue

La fonction $x \mapsto |x|$ est définie sur $\mathbb{R}$. Elle est strictement **décroissante** sur $]-\infty; 0]$ et strictement **croissante** sur $[0; +\infty[$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$ x $			



Sa courbe est un « V » formé de deux demi-droites, symétrique par rapport à l'axe des ordonnées : la fonction est **paire**.

Méthode 12 — Étudier $x \mapsto |x - k|$ et résoudre $|x - k| = r$

Exemples corrigés

Soit $f(x) = |x + 1|$.

- Dresser un tableau de valeurs de f pour x entier de -5 à 3 .
- Tracer la courbe $\mathcal{C}_f$ de f .
- Dresser le tableau de variations de f .
- Comment $\mathcal{C}_f$ se déduit-elle de la courbe de la fonction valeur absolue ?
- Résoudre $f(x) = 4$, puis $f(x) = -2$.

f) Vérifier graphiquement.

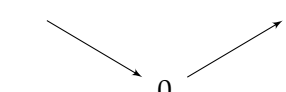
a)

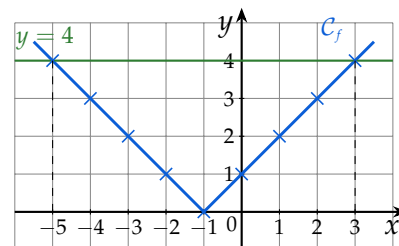
x	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$	4	3	2	1	0	1	2	3	4

b)

On place les points du tableau, *figure ci-contre*
puis on les relie : deux
demi-droites en « V ».

c)

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$ x + 1 $			



Le minimum de f est 0, atteint en -1 . *décroissante avant le sommet, croissante après*

d)

C_f est le « V » de la valeur absolue *le sommet est là où $x + 1 = 0$*
décalé de 1 unité **vers la gauche**,
de sommet $(-1; 0)$.

e)

$$|x + 1| = 4 \quad \text{on recopie l'équation}$$

$$x + 1 = 4 \quad \text{ou} \quad x + 1 = -4 \quad |A| = 4 : A = 4 \text{ ou } A = -4$$

$$x = 3 \quad \text{ou} \quad x = -5$$

$$S = \{-5; 3\}.$$

$$|x + 1| = -2 \text{ n'a pas de solution : } S = \emptyset.$$

*les deux nombres à distance 4 de -1
une valeur absolue est positive*

f)

La droite d'équation $y = 4$ coupe C_f en deux points,
d'abscisses -5 et 3 .

on retrouve $S = \{-5; 3\}$

C_f n'a aucun point sous l'axe des abscisses, donc aucun point
d'ordonnée -2 .

on retrouve $S = \emptyset$

À vous de jouer

Soit $g(x) = |x - 4|$.

1°) Dresser un tableau de valeurs de g pour x entier de 0 à 8.

2°) Tracer la courbe C_g de g .

3°) Dresser le tableau de variations de g .

4°) Comment C_g se déduit-elle de la courbe de la fonction valeur absolue ?

5°) Résoudre $g(x) = 2$, puis $g(x) = -1$.

6°) Vérifier graphiquement.

Réponses : 1°) 4; 3; 2; 1; 0; 1; 2; 3; 4; 3°) décroissante sur $]-\infty; 4]$, croissante sur $[4; +\infty[$, minimum 0 en 4; 4°) décalage de 4 unités vers la droite, sommet $(4; 0)$; 5°) $S = \{2; 6\}$; $S = \emptyset$.

► **À faire** : fiche d'exercices du chapitre, exercices 30 à 32.

X — Fonctions affines

Définition 10 — Fonction affine

Une **fonction affine** est une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax + b$, où a et b sont deux nombres. Sa courbe est une **droite** d'équation réduite $y = ax + b$:

- b est l'**ordonnée à l'origine** : la droite coupe l'axe des ordonnées au point $(0; b)$;
- a est le **coefficient directeur** (la pente) : quand x augmente de 1, y varie de a .

Si $a = 0$, la fonction est **constante** et la droite est horizontale. Si $b = 0$, la fonction est **linéaire** et la droite passe par l'origine.

Propriété 6 — Variations et signe de $ax + b$ ($a \neq 0$)

Si $a > 0$: f est strictement croissante.

x	$-\infty$	$-\frac{b}{a}$	$+\infty$
$f(x)$			
signe de $ax + b$	$-$	0	$+$

$ax + b$ s'annule en $x = -\frac{b}{a}$; il a le signe de a à droite de cette valeur.

Si $a < 0$: f est strictement décroissante.

x	$-\infty$	$-\frac{b}{a}$	$+\infty$
$f(x)$			
signe de $ax + b$	$+$	0	$-$

Méthode 13 — Équation réduite d'une droite passant par deux points

Exemples corrigés

Déterminer l'équation réduite de la droite (AB) , avec $A(-2; -1)$ et $B(2; 7)$.

Résolution

$x_A \neq x_B$: la droite a une équation réduite $y = ax + b$.

$$a = \frac{7 - (-1)}{2 - (-2)} \quad \text{coefficient directeur : } \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

$$a = 2$$

$$-1 = 2 \times (-2) + b \quad A \text{ est sur la droite : } y_A = ax_A + b$$

$$-1 = -4 + b$$

$$b = 3 \quad \text{on ajoute 4}$$

L'équation réduite de (AB) est $y = 2x + 3$.

contrôle avec B : $2 \times 2 + 3 = 7$

À vous de jouer

Déterminer l'équation réduite de la droite passant par :

1°) $C(1; 4)$ et $D(3; -2)$;

2°) $E(-4; 0)$ et $F(2; 3)$;

3°) $G(1; 5)$ et $H(6; 5)$.

Réponses : 1°) $y = -3x + 7$; 2°) $y = \frac{1}{2}x + 2$; 3°) $a = 0$: droite horizontale, $y = 5$.

► **À faire** : fiche d'exercices du chapitre, exercices 33 à 35.

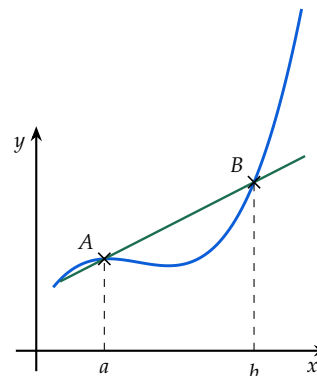
XI — Prolongement : vers la dérivation

Définition 11 — Taux de variation

Soient a et b deux nombres **distincts** où f est définie. Le **taux de variation** de f entre a et b est

$$T = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

C'est le **coefficient directeur** de la droite (AB) , avec $A(a; f(a))$ et $B(b; f(b))$: cette droite, qui coupe la courbe en A et en B , est une **sécante**.



Propriété 7 — Taux de variation et sens de variation

Si, entre deux nombres distincts quelconques d'un intervalle I , le taux de variation de f est toujours **positif**, f est croissante sur I ; s'il est toujours **négatif**, f est décroissante sur I .

En effet, $T > 0$ signifie que $f(b) - f(a)$ et $b - a$ ont le même signe : si $a < b$, alors $f(a) < f(b)$.

Méthode 14 — Calculer un taux de variation

Exemples corrigés

a) $f(x) = x^2 - x$: calculer le taux de variation de f entre 1 et 3.

b) Calculer le taux de variation de la fonction carré entre deux nombres distincts a et b , puis en déduire ses variations.

a)

$$f(1) = 0 \text{ et } f(3) = 6.$$

on calcule d'abord $f(a)$ et $f(b)$

$$T = \frac{6 - 0}{3 - 1} \quad T = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

$$T = 3$$

b)

$$T = \frac{b^2 - a^2}{b - a} \quad \text{avec des lettres}$$

$$T = \frac{(b - a)(b + a)}{b - a} \quad b^2 - a^2 = (b - a)(b + a)$$

$$T = a + b \quad \text{on simplifie par } b - a \neq 0$$

Sur $[0; +\infty[$, $T = a + b > 0$: la fonction carré est croissante.

Sur $]-\infty; 0]$, $T = a + b < 0$: elle est décroissante.

taux toujours positif : croissante

taux toujours négatif : décroissante ; on retrouve la partie V

À vous de jouer

1°) $g(x) = 2x^2$: taux de variation entre -1 et 2 .

2°) $h(x) = \frac{1}{x}$: taux de variation entre 1 et 4 .

Réponses : 1°) $g(-1) = 2$ et $g(2) = 8$, $T = \frac{6}{3} = 2$; 2°) $h(1) = 1$ et $h(4) = \frac{1}{4}$, $T = \frac{-3/4}{3} = -\frac{1}{4}$.

Et ensuite ?

Quand b se rapproche de a , le point B glisse sur la courbe vers A : la sécante (AB) se rapproche de la **tangente** en A , et le taux de variation d'un nombre appelé **nombre dérivé** de f en a . C'est l'objet du chapitre suivant.

► **À faire** : fiche d'exercices du chapitre, exercices 36 à 38.