

FONCTIONS

Rappels et compléments

Cours — Première spécialité
Version élève

Comment utiliser ce cours

Chaque partie commence par ce qu'il faut **savoir** (définitions, théorèmes), puis vient ce qu'il faut **savoir faire** : une méthode, avec des **exemples** faits en classe, puis des exercices « **À vous de jouer** » à chercher seul.

Sur cette feuille, seuls les **énoncés** des exemples figurent : la résolution, signalée par la mention *(au tableau)*, est à rédiger dans le cahier.

I — Images et antécédents

Définition 1 — Fonction, image, antécédent

Une **fonction** f associe à chaque nombre x d'un ensemble D **un seul** nombre, noté $f(x)$: c'est l'**image** de x par f . On écrit $f : x \mapsto f(x)$.

Si $f(x) = y$, on dit que x est un **antécédent** de y par f .

La **courbe** C_f de f est formée des points de coordonnées $(x; f(x))$: un point $M(a; b)$ est sur C_f lorsque $b = f(a)$. On dit que $y = f(x)$ est une **équation** de C_f .

À retenir

- Un nombre a **une seule** image; il peut avoir **aucun, un ou plusieurs** antécédents.
- Sur la courbe, on lit les images sur l'axe des **ordonnées** et les antécédents sur l'axe des **abscisses**.

Méthode 1 — Calculer une image, chercher un antécédent

Exemples

(au tableau)

Calculer l'image demandée, puis chercher les antécédents demandés.

- $f(x) = 3x - 4$: image de -2 ; antécédents de 11 .
- $g(x) = x^2 + 2$: image de -3 ; antécédents de 6 , puis de 1 .

À vous de jouer

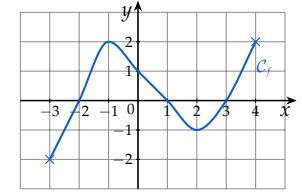
- $h(x) = -2x + 7$: calculer $h(3)$ et $h(-4)$, puis chercher les antécédents de 13 .
- $k(x) = x^2 - 5$: calculer $k(-1)$, puis chercher les antécédents de 4 et de -6 .

Méthode 2 — Lire une image, des antécédents sur une courbe

Exemples

La courbe ci-contre est celle d'une fonction f définie sur $[-3; 4]$.

- Lire $f(-1)$ et $f(0)$.
- Lire les antécédents de 0 , puis ceux de 3 .



(au tableau)

À vous de jouer

- Lire les images de -3 , de 2 et de 4 .
- Lire les antécédents de 2 .
- Combien de solutions l'équation $f(x) = 1$ a-t-elle?

► **À faire** : fiche d'exercices du chapitre, exercices 1 à 5.

II — Ensemble de définition

Définition 2 — Ensemble de définition

L'**ensemble de définition** de f est l'ensemble des nombres x qui ont une image par f . Quand l'énoncé ne le donne pas, c'est l'ensemble de **tous** les nombres pour lesquels on peut calculer $f(x)$.

Propriété 1 — Les deux calculs impossibles

- **Diviser par 0**. Dans un quotient, les valeurs de x qui annulent le **dénominateur** sont des **valeurs interdites**.
Exemple : $x \mapsto \frac{1}{x}$ est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, noté $\mathbb{R}^*$.

- **Prendre la racine carrée d'un nombre négatif**. Pour $\sqrt{A}$, il faut $A \geq 0$.
Exemple : $x \mapsto \sqrt{x}$ est définie sur $[0; +\infty[$.

Sans quotient ni racine carrée (par exemple $x \mapsto 2x^2 - x + 3$), la fonction est définie sur $\mathbb{R}$.

Méthode 3 — Ensemble de définition d'un quotient

Exemples

(au tableau)

Déterminer l'ensemble de définition de chaque fonction, puis les antécédents demandés.

- $f(x) = \frac{1}{x-2}$: antécédents de 1 , puis de 0 .
- $g(x) = \frac{5}{x^2+4}$: antécédents de 1 .

À vous de jouer

- Déterminer l'ensemble de définition de chaque fonction h, k, m :

$$h(x) = \frac{7}{x+5} \quad k(x) = \frac{x-1}{3x-6} \quad m(x) = \frac{2}{x^2+3}$$

- $p(x) = \frac{4}{x+1}$: ensemble de définition; calculer $p(1)$ et $p(3)$; antécédents de -4 et de 0 .

Méthode 4 — Ensemble de définition avec une racine carrée

Exemples

(au tableau)

Déterminer l'ensemble de définition de chaque fonction.

a) $f(x) = \sqrt{x+3}$; calculer ensuite, si possible, $f(1)$ et $f(-7)$.b) $g(x) = \sqrt{8-2x}$.

À vous de jouer

1°) Déterminer l'ensemble de définition de chaque fonction h, k, m :

$$h(x) = \sqrt{x-6} \quad k(x) = \sqrt{3x+9} \quad m(x) = \sqrt{10-5x}$$

2°) $p(x) = \sqrt{x+4}$: ensemble de définition; calculer $p(0)$ et $p(5)$; antécédents de 4 et de -2.

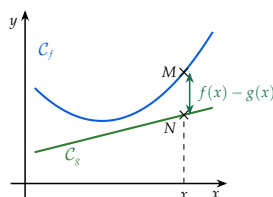
► À faire : fiche d'exercices du chapitre, exercices 6 à 9.

III — Comparaison de deux fonctions

Définition 3 — Position relative de deux courbes

Soient f et g deux fonctions définies sur un intervalle I . Pour un même x , les points $M(x; f(x))$ de $\mathcal{C}_f$ et $N(x; g(x))$ de $\mathcal{C}_g$ sont sur la même verticale :

- si $f(x) > g(x)$, M est **au-dessus** de N ;
- si $f(x) < g(x)$, M est **au-dessous** de N ;
- si $f(x) = g(x)$, M et N sont confondus : les courbes se **coupent**.

Étudier la **position relative** de $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$, c'est trouver où $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de $\mathcal{C}_g$, et où elle est au-dessous.

Propriété 2 — Deux façons de comparer

- **Sur le graphique** : les solutions de $f(x) = g(x)$ sont les abscisses des points d'intersection de $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$; celles de $f(x) > g(x)$, les abscisses des points où $\mathcal{C}_f$ est strictement au-dessus de $\mathcal{C}_g$.
- **Par le calcul** : $f(x) > g(x)$ revient à $f(x) - g(x) > 0$, c'est-à-dire « $f(x) - g(x)$ est **positif** ». Comparer $f(x)$ et $g(x)$, c'est donc étudier le **signe de la différence** $f(x) - g(x)$:
 - là où $f(x) - g(x) > 0$ (positif), $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de $\mathcal{C}_g$;
 - là où $f(x) - g(x) < 0$ (négatif), $\mathcal{C}_f$ est au-dessous de $\mathcal{C}_g$;
 - là où $f(x) - g(x) = 0$, les courbes se coupent.

Le graphique permet de **conjecturer**; le calcul **démontre**.

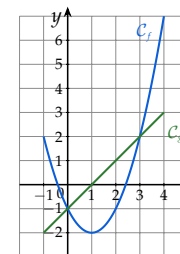
Méthode 5 — Comparer deux fonctions sur un graphique

Exemples

(au tableau)

Les courbes ci-contre sont celles de $f(x) = x^2 - 2x - 1$ et de $g(x) = x - 1$, sur $[-1; 4]$. Résoudre graphiquement :

- l'équation $f(x) = g(x)$;
- l'inéquation $f(x) < g(x)$.



À vous de jouer

1°) Résoudre graphiquement $f(x) \geq g(x)$.2°) Résoudre graphiquement $f(x) = 2$.Méthode 6 — Position relative par le signe de $f(x) - g(x)$

Exemples

(au tableau)

Étudier la position relative de $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ sur $\mathbb{R}$.

- $f(x) = x^2 + 5$ et $g(x) = 4x + 1$.
- $f(x) = x^2 - 2x - 1$ et $g(x) = x - 1$ (les fonctions de la méthode 5).

À vous de jouer

Étudier la position relative de $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$, sur $\mathbb{R}$:

- $f(x) = 2x + 3$ et $g(x) = 5x - 6$.
- $f(x) = x^2 + 1$ et $g(x) = -2x$.
- $f(x) = x^2 + 3x$ et $g(x) = 3x + 16$.

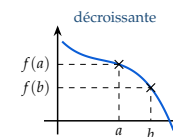
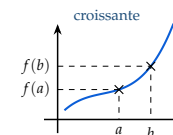
► À faire : fiche d'exercices du chapitre, exercices 10 à 13.

IV — Sens de variation

Définition 4 — Fonction croissante, décroissante

Soit f une fonction définie sur un intervalle I .

- f est **croissante** sur I si, pour tous a et b de I tels que $a < b$, on a $f(a) \leq f(b)$: f **conserve** l'ordre.
- f est **décroissante** sur I si, pour tous a et b de I tels que $a < b$, on a $f(a) \geq f(b)$: f **inverse** l'ordre.

Avec $f(a) < f(b)$ (ou $f(a) > f(b)$), on dit **strictement** croissante (ou décroissante).Le **maximum** de f sur I est la plus grande valeur prise par $f(x)$; le **minimum**, la plus petite. Un **tableau de variations** résume tout cela.

Méthode 7 — Démontrer un sens de variation avec la définition

Exemples (au tableau)

Démontrer, avec la définition, le sens de variation de la fonction $f(x) = -2x + 5$ sur $\mathbb{R}$.

À vous de jouer

1°) Démontrer de la même façon le sens de variation de $g(x) = 4x - 3$ sur $\mathbb{R}$.

2°) Même travail pour $h(x) = -\frac{1}{3}x + 2$.

3°) Que peut-on conjecturer pour une fonction $x \mapsto mx + p$, selon le signe de m ?

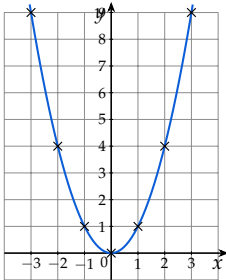
► À faire : fiche d'exercices du chapitre, exercices 14 à 17.

V — Fonction carré

Définition 5 — Fonction carré

La **fonction carré** est la fonction $x \mapsto x^2$, définie sur $\mathbb{R}$.
Sa courbe est une **parabole** de sommet l'origine. Elle est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées, car $(-x)^2 = x^2$: on dit que la fonction carré est **paire**.

Équation $x^2 = k$: si $k > 0$, deux solutions, $-\sqrt{k}$ et $\sqrt{k}$; si $k = 0$, une solution, 0; si $k < 0$, aucune solution.



Propriété 3 — Variations de la fonction carré

La fonction carré est strictement **décroissante** sur $] -\infty ; 0]$ et strictement **croissante** sur $[0 ; +\infty [$. Son minimum est 0, atteint en 0.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
x^2		0	

(au tableau)

Démonstration

Méthode 8 — Comparer ou encadrer des carrés

Exemples (au tableau)

a) Comparer $(-2,7)^2$ et $(-2,3)^2$ sans les calculer.

b) Encadrer x^2 sachant que $-4 \leq x \leq -1$, puis sachant que $-2 \leq x \leq 3$.

À vous de jouer

1°) Comparer sans calculatrice $1,8^2$ et $1,6^2$, puis $(-0,4)^2$ et $(-0,9)^2$.

2°) Encadrer x^2 sachant que $2 \leq x \leq 5$; puis $-3 \leq x \leq -2$; puis $-1 \leq x \leq 4$.

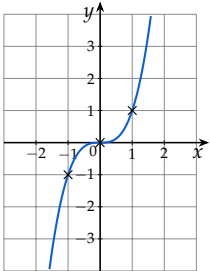
► À faire : fiche d'exercices du chapitre, exercices 18 à 20.

VI — Fonction cube

Définition 6 — Fonction cube

La **fonction cube** est la fonction $x \mapsto x^3$, définie sur $\mathbb{R}$.
Elle est strictement **croissante** sur $\mathbb{R}$: elle conserve toujours l'ordre.

x	$-\infty$	$+\infty$
x^3		



Sa courbe est symétrique par rapport à l'origine O , car $(-x)^3 = -x^3$: on dit que la fonction cube est **impaire**.

Équation $x^3 = k$: elle a toujours **une seule** solution, la **racine cubique** de k , notée $\sqrt[3]{k}$: le nombre dont le cube vaut k .
Exemples : $\sqrt[3]{27} = 3$; $\sqrt[3]{-8} = -2$.

Méthode 9 — Résoudre $x^3 = k$, comparer, encadrer des cubes

Exemples (au tableau)

- a) Résoudre $x^3 = -8$, puis $2x^3 + 3 = 57$.
- b) Encadrer x^3 sachant que $-1 \leq x \leq 2$.
- c) Comparer sans calculatrice $(-2,5)^3$ et $(-2,4)^3$.

À vous de jouer

1°) Résoudre $x^3 = 64$, puis $x^3 + 125 = 0$.

2°) Encadrer x^3 sachant que $-3 \leq x \leq 1$.

3°) Comparer sans calculatrice $(-1,3)^3$ et $(-1,1)^3$.

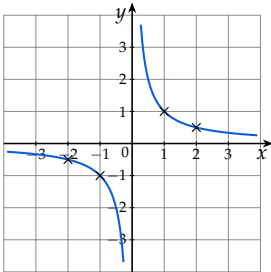
► À faire : fiche d'exercices du chapitre, exercices 21 à 23.

VII — Fonction inverse

Définition 7 — Fonction inverse

La **fonction inverse** est la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$, définie sur $\mathbb{R}^*$ (0 est une valeur interdite).
Elle est strictement **décroissante** sur $] -\infty; 0[$, et strictement **décroissante** sur $] 0; +\infty[$. La double barre rappelle que 0 n'a pas d'image.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$\frac{1}{x}$			



Sa courbe est une **hyperbole**, symétrique par rapport à l'origine : la fonction inverse est **impaire**.

Méthode 10 — Résoudre $\frac{1}{x} = k$, comparer, encadrer des inverses

Exemples

- a) Résoudre $\frac{1}{x} = 5$, puis $\frac{2}{x} = 8$.
- b) Encadrer $\frac{1}{x}$ sachant que $2 \leq x \leq 4$, puis sachant que $-5 \leq x \leq -1$.
- c) Comparer sans calculatrice $\frac{1}{0,3}$ et $\frac{1}{0,6}$.

À vous de jouer

- 1°) Résoudre $\frac{1}{x} = -4$, puis $\frac{3}{x} = 6$.
- 2°) Encadrer $\frac{1}{x}$ sachant que $1 \leq x \leq 5$, puis $-4 \leq x \leq -2$.
- 3°) Comparer sans calculatrice $\frac{1}{0,7}$ et $\frac{1}{0,9}$.

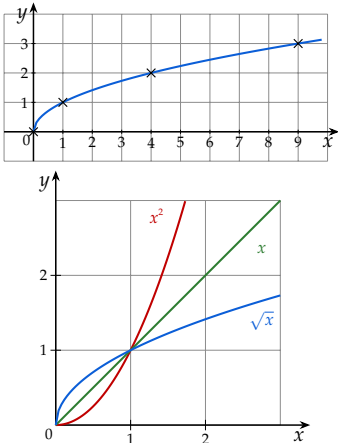
► À faire : fiche d'exercices du chapitre, exercices 24 à 26.

VIII — Fonction racine carrée

Définition 8 — Fonction racine carrée

La **fonction racine carrée** est la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$, définie sur $[0; +\infty[$. Pour $x \geq 0$, $\sqrt{x}$ est le nombre **positif** dont le carré vaut x .
Elle est strictement **croissante** sur $[0; +\infty[$.

x	0	$+\infty$
$\sqrt{x}$		



Comparer x^2 , x et $\sqrt{x}$ (figure ci-dessus) : sur $[0; 1]$, $x^2 \leq x \leq \sqrt{x}$; sur $[1; +\infty[$, $\sqrt{x} \leq x \leq x^2$.

Méthode 11 — Résoudre une équation avec une racine carrée

Exemples

Résoudre l'équation $\sqrt{x} = x - 2$. On admet que $x^2 - 5x + 4 = (x - 1)(x - 4)$.

À vous de jouer

- 1°) Résoudre $\sqrt{x} = x - 6$; on admet que $x^2 - 13x + 36 = (x - 4)(x - 9)$.
- 2°) Résoudre $\sqrt{x} = x - 12$; on admet que $x^2 - 25x + 144 = (x - 9)(x - 16)$.

► À faire : fiche d'exercices du chapitre, exercices 27 à 29.

IX — Fonction valeur absolue

Définition 9 — Valeur absolue

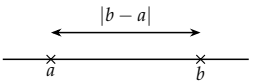
La **valeur absolue** d'un nombre x , notée $|x|$, est sa distance à 0 :

$|x| = x$ si $x \geq 0$ et $|x| = -x$ si $x < 0$.

Exemples : $|6| = 6$; $|-6| = 6$; $|0| = 0$. Une valeur absolue est toujours positive.

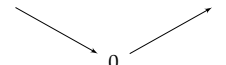
Propriété 4 — Valeur absolue et distance

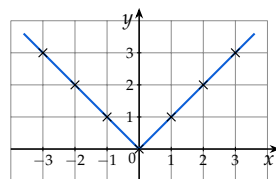
- La **distance** entre deux nombres a et b est $|b - a|$.
Exemple : entre -3 et 5 , la distance est $|5 - (-3)| = 8$.
- Pour tout réel a , $\sqrt{a^2} = |a|$.
- Si $r > 0$, $|A| = r$ équivaut à $A = r$ ou $A = -r$. Si $r < 0$, $|A| = r$ n'a pas de solution.



Propriété 5 — Fonction valeur absolue

La fonction $x \mapsto |x|$ est définie sur $\mathbb{R}$. Elle est strictement **décroissante** sur $]-\infty; 0]$ et strictement **croissante** sur $[0; +\infty[$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$ x $			



Sa courbe est un « V » formé de deux demi-droites, symétrique par rapport à l'axe des ordonnées : la fonction est **paire**.

Méthode 12 — Étudier $x \mapsto |x - k|$ et résoudre $|x - k| = r$ **Exemples**

Soit $f(x) = |x + 1|$.

- a) Dresser un tableau de valeurs de f pour x entier de -5 à 3 .
- b) Tracer la courbe $\mathcal{C}_f$ de f .
- c) Dresser le tableau de variations de f .
- d) Comment $\mathcal{C}_f$ se déduit-elle de la courbe de la fonction valeur absolue ?
- e) Résoudre $f(x) = 4$, puis $f(x) = -2$.
- f) Vérifier graphiquement.

À vous de jouer

Soit $g(x) = |x - 4|$.

- 1°) Dresser un tableau de valeurs de g pour x entier de 0 à 8 .
- 2°) Tracer la courbe $\mathcal{C}_g$ de g .
- 3°) Dresser le tableau de variations de g .
- 4°) Comment $\mathcal{C}_g$ se déduit-elle de la courbe de la fonction valeur absolue ?
- 5°) Résoudre $g(x) = 2$, puis $g(x) = -1$.
- 6°) Vérifier graphiquement.

► **À faire** : fiche d'exercices du chapitre, exercices 30 à 32.

X — Fonctions affines**Définition 10 — Fonction affine**

Une **fonction affine** est une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax + b$, où a et b sont deux nombres. Sa courbe est une **droite** d'équation réduite $y = ax + b$:

- b est l'**ordonnée à l'origine** : la droite coupe l'axe des ordonnées au point $(0; b)$;
- a est le **coefficient directeur** (la pente) : quand x augmente de 1 , y varie de a .

Si $a = 0$, la fonction est **constante** et la droite est horizontale. Si $b = 0$, la fonction est **linéaire** et la droite passe par l'origine.

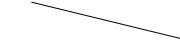
Propriété 6 — Variations et signe de $ax + b$ ($a \neq 0$)

Si $a > 0$: f est strictement croissante.

x	$-\infty$	$-\frac{b}{a}$	$+\infty$
$f(x)$			
signe de $ax + b$	$-$	0	$+$

$ax + b$ s'annule en $x = -\frac{b}{a}$; il a le signe de a à droite de cette valeur.

Si $a < 0$: f est strictement décroissante.

x	$-\infty$	$-\frac{b}{a}$	$+\infty$
$f(x)$			
signe de $ax + b$	$+$	0	$-$

Méthode 13 — Équation réduite d'une droite passant par deux points**Exemples**

Déterminer l'équation réduite de la droite (AB) , avec $A(-2; -1)$ et $B(2; 7)$.

À vous de jouer

Déterminer l'équation réduite de la droite passant par :

- 1°) $C(1; 4)$ et $D(3; -2)$;
- 2°) $E(-4; 0)$ et $F(2; 3)$;
- 3°) $G(1; 5)$ et $H(6; 5)$.

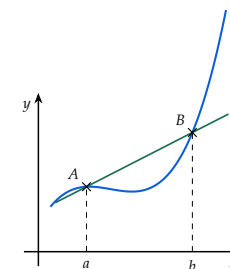
► **À faire** : fiche d'exercices du chapitre, exercices 33 à 35.

XI — Prolongement : vers la dérivation**Définition 11 — Taux de variation**

Soient a et b deux nombres **distincts** où f est définie. Le **taux de variation** de f entre a et b est

$$T = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

C'est le **coefficient directeur** de la droite (AB) , avec $A(a; f(a))$ et $B(b; f(b))$: cette droite, qui coupe la courbe en A et en B , est une **sécante**.

**Propriété 7 — Taux de variation et sens de variation**

Si, entre deux nombres distincts quelconques d'un intervalle I , le taux de variation de f est toujours **positif**, f est croissante sur I ; s'il est toujours **négatif**, f est décroissante sur I .

En effet, $T > 0$ signifie que $f(b) - f(a)$ et $b - a$ ont le même signe : si $a < b$, alors $f(a) < f(b)$.

Méthode 14 — Calculer un taux de variation**Exemples**

- a) $f(x) = x^2 - x$: calculer le taux de variation de f entre 1 et 3 .
- b) Calculer le taux de variation de la fonction carré entre deux nombres distincts a et b , puis en déduire ses variations.

À vous de jouer

1°) $g(x) = 2x^2$: taux de variation entre -1 et 2 .

2°) $h(x) = \frac{1}{x}$: taux de variation entre 1 et 4 .

Et ensuite ?

Quand b se rapproche de a , le point B glisse sur la courbe vers A : la sécante (AB) se rapproche de la **tangente** en A , et le taux de variation d'un nombre appelé **nombre dérivé** de f en a . C'est l'objet du chapitre suivant.

► **À faire** : fiche d'exercices du chapitre, exercices 36 à 38.