

1^{re} spécialité — Fonctions

Fiche d'exercices du chapitre

I — Images et antécédents

Exercice 1 : Vocabulaire

- Écrire chaque phrase sous la forme d'une égalité.
 - L'image de 3 par la fonction f est -1 .
 - Le nombre -2 est un antécédent de 6 par la fonction g .
 - Le point $B(0;5)$ est sur la courbe de la fonction h .
 - Par la fonction k , le nombre 4 a pour image 9.
- On sait que $f(5) = -7$. Écrire trois phrases : la première avec le mot « image », la deuxième avec « antécédent », la troisième avec « courbe ».

Exercice 2 : Calculer des images

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x^2 - 5x$.

- Calculer l'image par f de 3; de -2 ; de $\frac{1}{2}$; de $-1,5$; de $\sqrt{3}$.
- Le nombre -1 est-il un antécédent de 7? Le nombre 2 a-t-il pour image 2?

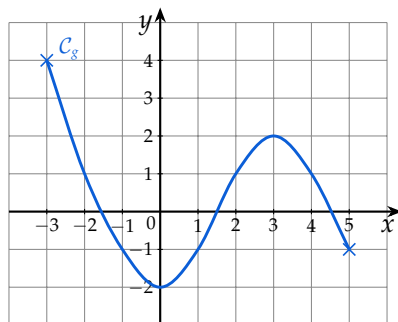
Exercice 3 : Calculer des antécédents

Pour chaque fonction, déterminer les antécédents du nombre indiqué.

- $f(x) = x - 7$; antécédents de 2.
- $g(x) = x^2$; antécédents de 49.
- $h(x) = 5x + 3$; antécédents de 0.
- $k(x) = (x - 1)(x + 4)$; antécédents de 0.
- $m(x) = x^2 + 3$; antécédents de 2.

Exercice 4 : Lire des images et des antécédents

La courbe C_g d'une fonction g définie sur $[-3;5]$ est tracée ci-dessous.



- Lire les images de -2 ; 0 ; 3 ; 5 .
- Lire les antécédents de 1 ; -1 ; -2 ; 5 .
- Combien de solutions l'équation $g(x) = 0$ a-t-elle?
- Compléter : $g(\dots) = 4$.

Exercice 5 : Points d'une courbe

Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = x^2 + 2x - 8$, de courbe C_h .

- Les points $A(1; -5)$ et $B(-2; 0)$ sont-ils sur C_h ?
- Calculer les coordonnées du point où C_h coupe l'axe des ordonnées.
- Développer $(x - 2)(x + 4)$, puis en déduire les points où C_h coupe l'axe des abscisses.

II — Ensemble de définition

Exercice 6 : Un nombre sans image

Pour chaque fonction f, g, h , l'un des nombres $-2; 0; 5; 10$ n'a pas d'image. Lequel?

$$f(x) = \frac{3}{x} \quad g(x) = \frac{x+3}{x-5} \quad h(x) = \sqrt{x+1}$$

Exercice 7 : Ensembles de définition

Déterminer l'ensemble de définition de chaque fonction.

$$\begin{array}{ll} \text{a) } f(x) = \frac{2}{x+6} & \text{b) } g(x) = \frac{5}{4x-12} \\ \text{c) } h(x) = \frac{x}{x^2+5} & \text{d) } k(x) = \frac{1}{x^2-16} \\ \text{e) } m(x) = \sqrt{12-3x} & \text{f) } p(x) = \frac{1}{\sqrt{x-1}} \end{array}$$

Exercice 8 : Avec une valeur interdite

Soit f la fonction définie par $f(x) = \frac{6}{x-1}$.

- Déterminer l'ensemble de définition de f .
- Calculer $f(0)$; $f(4)$; $f(-2)$.
- Déterminer les antécédents de 3; de -6 ; de 0.

Exercice 9 : Avec une racine carrée

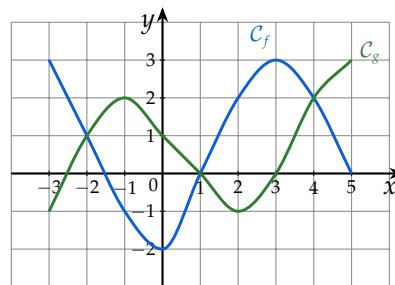
Soit g la fonction définie par $g(x) = \sqrt{4x+8}$.

- Déterminer l'ensemble de définition de g .
- Calculer, si possible, $g(2)$; $g(-1)$; $g(-3)$.
- Déterminer les antécédents de 6; de 0; de -1 .

III — Comparaison de deux fonctions

Exercice 10 : Comparer sur un graphique

Les courbes de deux fonctions f et g définies sur $[-3;5]$ sont tracées ci-dessous.



Résoudre graphiquement :

- l'équation $f(x) = g(x)$;
- l'inéquation $f(x) > g(x)$ (réponse avec des intervalles);
- l'inéquation $g(x) \geq 2$.

Exercice 11 : Signe d'une différence

Pour chaque couple de fonctions définies sur $\mathbb{R}$, calculer $f(x) - g(x)$, étudier son signe, puis en déduire la position relative de C_f et C_g .

- $f(x) = 3x - 4$ et $g(x) = x + 2$
- $f(x) = x^2$ et $g(x) = 2x - 1$
- $f(x) = x^2 - x$ et $g(x) = -x + 4$

Exercice 12 : Une parabole et une droite

Soient f et g définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - 2x - 2$ et $g(x) = x + 2$.

- Dresser un tableau de valeurs de f et de g pour x entier de -2 à 5 , puis tracer C_f et C_g dans un même repère.
- Résoudre graphiquement $f(x) = g(x)$, puis $f(x) \leq g(x)$.
- Démontrer que $f(x) - g(x) = (x+1)(x-4)$.
- Dresser le tableau de signes de $f(x) - g(x)$.
- En déduire la position relative de C_f et C_g ; comparer avec le 2).

Exercice 13 : Une fonction quotient

Soit f la fonction définie par $f(x) = \frac{2x+1}{x-3}$.

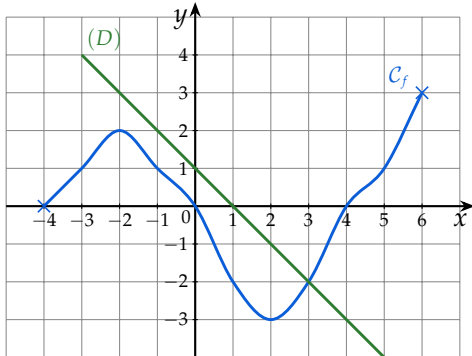
- Déterminer l'ensemble de définition D de f .
- Calculer $f(0)$; $f(4)$; $f(2)$.

- 3) Les nombres 1 ; 0 ; 2 ont-ils des antécédents ? Si oui, lesquels ?
- 4) Justifier que, pour tout x de D , $f(x) = 2 + \frac{7}{x-3}$.
- 5) En déduire la position de C_f par rapport à la droite d'équation $y = 2$.
- 6) Calculer $f(x)$ pour $x = -4 ; -1 ; 5 ; 10$ (au centième près), puis tracer C_f et la droite d'équation $y = 2$.

IV — Sens de variation

Exercice 14 : Lecture graphique complète

La courbe C_f d'une fonction f définie sur $[-4; 6]$ est tracée ci-dessous, avec la droite (D) d'équation $y = -x + 1$.



- 1) Lire les antécédents de 0 ; 1 ; -2 ; 4.
- 2) Donner le maximum et le minimum de f sur $[-4; 6]$, et en quelles valeurs ils sont atteints.
- 3) Dresser le tableau de variations de f .
- 4) Résoudre graphiquement $f(x) \geq 0$, puis $f(x) < 1$.
- 5) Compléter : si $-2 \leq x \leq 2$, alors $\dots \leq f(x) \leq \dots$; si $2 \leq x \leq 5$, alors $\dots \leq f(x) \leq \dots$.
- 6) Résoudre graphiquement $f(x) = -x + 1$, puis $f(x) \leq -x + 1$.

Exercice 15 : Du tableau de variations à la courbe

Voici le tableau de variations d'une fonction g .

x	-3	0	2	4
$g(x)$	-1	3	-2	1

- 1) Quel est l'ensemble de définition de g ?
- 2) Décrire les variations de g par des phrases.
- 3) Donner le maximum et le minimum de g , et où ils sont atteints.
- 4) Tracer une courbe qui peut représenter g .

Exercice 16 : Le bénéfice d'un atelier

Un atelier assemble et vend des trottinettes électriques. Pour x dizaines de trottinettes vendues dans la semaine, avec $x \in [1; 11]$, le bénéfice, en centaines d'euros, est $B(x) = -x^2 + 12x - 20$.

- 1) Calculer $B(x)$ pour x entier de 1 à 11.
- 2) Tracer la courbe de B (en abscisses 1 cm pour une dizaine, en ordonnées 1 cm pour 200 €).
- 3) Dresser le tableau de variations de B .
- 4) Quel est le bénéfice maximal ? Pour combien de trottinettes ?
- 5) Pour quelles ventes l'atelier ne perd-il pas d'argent ($B(x) \geq 0$) ?

Exercice 17 : Sens de variation par le calcul

Dans tout l'exercice, a et b sont deux réels tels que $a < b$.

- 1) Soit $f(x) = 4x - 7$ sur $\mathbb{R}$. Calculer et factoriser $f(a) - f(b)$, en déduire son signe, puis le sens de variation de f .
- 2) Même travail avec $g(x) = -3x + 2$.

- 3) Que peut-on conclure pour une fonction affine $x \mapsto mx + p$, selon le signe de m ?
- 4) Soit $u(x) = x^2 + 4x$ sur $[0; +\infty[$. Démontrer que $u(a) - u(b) = (a - b)(a + b + 4)$, puis conclure.
- 5) Soit $v(x) = 1 - \frac{1}{x}$ sur $]0; +\infty[$. Démontrer que $v(a) - v(b) = \frac{a - b}{ab}$, puis conclure.

V — Fonction carré

Exercice 18 : Équations avec des carrés

Résoudre dans $\mathbb{R}$:

- a) $x^2 = 36$
- b) $x^2 = 11$
- c) $2x^2 - 5 = x^2 + 4$
- d) $(3x + 1)^2 = 16$
- e) $x^2 + 9 = 0$

Exercice 19 : Comparer et encadrer des carrés

- 1) Comparer sans calculatrice, en citant le sens de variation utilisé : $(-4, 2)^2$ et $(-3, 9)^2$; puis $1, 05^2$ et $1, 5^2$.
- 2) Encadrer x^2 sachant que $3 \leq x \leq 6$; puis $-5 \leq x \leq -2$; puis $-3 \leq x \leq 1$.

Exercice 20 : Deux paraboles

Soient f et g définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x^2 + x + 7$ et $g(x) = x^2 - 3x + 3$.

- 1) Calculer $f(x) - g(x)$, puis vérifier que $f(x) - g(x) = (x + 2)^2$.
- 2) En déduire la position relative de C_f et C_g , et leur point commun.

VI — Fonction cube

Exercice 21 : Variations de la fonction cube

Soient a et b deux réels tels que $a < b$.

- 1) Développer $(a - b)(a^2 + ab + b^2)$ et vérifier que l'on obtient $a^3 - b^3$.
- 2) On suppose $a < b \leq 0$. Justifier que $a^2 + ab + b^2 > 0$, puis en déduire le signe de $a^3 - b^3$ et le sens de variation de la fonction cube sur $]-\infty; 0]$.
- 3) Même travail pour $0 \leq a < b$. Conclure sur $\mathbb{R}$.

Exercice 22 : Calculs et équations

- 1) Calculer le cube de 3 ; de -2 ; de $\frac{1}{3}$; de -0,2.
- 2) Résoudre dans $\mathbb{R}$:
 - a) $x^3 = -125$
 - b) $x^3 = 1$
 - c) $3x^3 + 24 = 0$
 - d) $x^3 = 4x$

Exercice 23 : Encadrer des cubes

- 1) Encadrer x^3 sachant que $-3 \leq x \leq 2$.
- 2) Comparer sans calculatrice $(-2, 1)^3$ et $(-1, 9)^3$.
- 3) Une boîte cubique a une arête de x cm. Son arête est comprise entre 2 et 3 cm : encadrer son volume. Quelle arête donne un volume de 64 cm^3 ?

VII — Fonction inverse

Exercice 24 : Variations de la fonction inverse

- 1) Soient $0 < a < b$. Justifier que $\frac{1}{a} - \frac{1}{b} = \frac{b - a}{ab}$, puis que ce nombre est positif. En déduire le sens de variation de la fonction inverse sur $]0; +\infty[$.
- 2) Même travail pour $a < b < 0$.
- 3) Dresser le tableau de variations de la fonction inverse.
- 4) Comparer $\frac{1}{-2}$ et $\frac{1}{2}$. La fonction inverse est-elle décroissante sur $\mathbb{R}^*$?

Exercice 25 : Équations et encadrements

- 1) Résoudre :
 - a) $\frac{1}{x} = 8$
 - b) $\frac{1}{x} = -\frac{2}{3}$
 - c) $\frac{4}{x} = 6$
 - d) $\frac{5}{x} = \frac{x}{5}$
- 2) Encadrer $\frac{1}{x}$ sachant que $2 \leq x \leq 8$; puis $-10 \leq x \leq -5$.

- 3) Comparer sans calculatrice $\frac{1}{0,3}$ et $\frac{1}{0,4}$.

Exercice 26 : Équations et inéquations quotient

- Résoudre $\frac{x+3}{x-2} = \frac{3}{2}$, après avoir donné la valeur interdite.
- Résoudre en se ramenant à un quotient comparé à 0, puis avec un tableau de signes :
 - $\frac{1}{x} - 3 \leq 0$
 - $\frac{4}{x-1} \geq 2$

VIII — Fonction racine carrée

Exercice 27 : Se ramener au second degré

- Résoudre $\sqrt{x} = x - 20$; on admet que $x^2 - 41x + 400 = (x - 16)(x - 25)$.
- Résoudre $\sqrt{x} = x - 30$; on admet que $x^2 - 61x + 900 = (x - 25)(x - 36)$.
- On considère l'équation (E) : $\sqrt{x+3} = x+1$. À la calculatrice, conjecturer le nombre de solutions de (E) et leur valeur.
- Démontrer que toute solution de (E) vérifie $x+1 \geq 0$ et $x^2 + x - 2 = 0$.
- Vérifier que $x^2 + x - 2 = (x+2)(x-1)$, puis résoudre (E).
- Même démarche pour $2\sqrt{x} = x - 3$: se ramener à $x^2 - 10x + 9 = 0$, puis vérifier que $x^2 - 10x + 9 = (x-5)^2 - 4^2$ pour factoriser.

Exercice 28 : Équations avec des racines carrées

Résoudre, en précisant d'abord les valeurs de x possibles :

- $\sqrt{x} = 9$
- $\sqrt{x} = -3$
- $\sqrt{x-4} = 5$
- $3\sqrt{2x+1} = 15$

Exercice 29 : Calculer avec des racines carrées

- Écrire plus simplement :
 - $\sqrt{18} - \sqrt{2}$
 - $(\sqrt{5} - \sqrt{2})(\sqrt{5} + \sqrt{2})$
 - $(\sqrt{3} + \sqrt{6})^2$
- Soient $A = 3 - \sqrt{10}$ et $B = \sqrt{19 - 6\sqrt{10}}$. Calculer A^2 et B^2 . A-t-on $A = B$?
- Justifier les égalités :
 - $\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$
 - $\frac{1}{\sqrt{7}-2} = \frac{\sqrt{7}+2}{3}$
 - $\sqrt{50} - \sqrt{32} + \sqrt{2} = 2\sqrt{2}$
- Calculer $(\sqrt{6} + \sqrt{7})(\sqrt{6} - \sqrt{7})$; en déduire, sans calculatrice, que $\sqrt{6} < \sqrt{7}$.

IX — Fonction valeur absolue

Exercice 30 : Étude de $x \mapsto |x+3|$

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = |x+3|$.

- Dresser un tableau de valeurs de f pour x entier de -6 à 0 .
- Tracer la courbe $\mathcal{C}_f$ de f .
- Dresser le tableau de variations de f ; donner son minimum.
- Comment $\mathcal{C}_f$ se déduit-elle de la courbe de la fonction valeur absolue ?
- Résoudre $f(x) = 2$, puis $f(x) = -5$.
- Vérifier graphiquement.

Exercice 31 : Calculs et distances

- Calculer :
 - $|-12|$
 - $|3-10|$
 - $|-4| \times |-5|$

d) $|\sqrt{2}-2|$ e) $|-6|-|2|$

- Calculer $\sqrt{(-8)^2}$ et $\sqrt{(-0,5)^2}$. Que vaut $\sqrt{a^2}$ pour un réel a quelconque ?

- Calculer la distance entre -6 et 3 ; entre 7 et -1 .

Exercice 32 : Équations avec des valeurs absolues

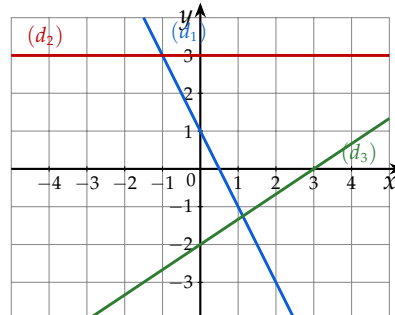
Résoudre dans $\mathbb{R}$:

- $|x| = 9$
- $|x| = -3$
- $|x+2| = 6$
- $|3x-1| = 8$

X — Fonctions affines

Exercice 33 : Lire l'expression d'une fonction affine

Donner l'expression de la fonction affine représentée par chaque droite (d_1) , (d_2) , (d_3) .



Exercice 34 : Équation réduite et alignement

On donne les points $A(-1;4)$ et $B(2;-2)$.

- Calculer le coefficient directeur de la droite (AB) .
- En déduire l'équation réduite de (AB) .
- Les points $C(5;-8)$ et $D(-3;9)$ sont-ils alignés avec A et B ?

Exercice 35 : Intersection de deux droites

Calculer les coordonnées du point d'intersection des droites (d) et (d') .

- $(d) : y = 3x - 5$ et $(d') : y = -2x + 5$.
- (d) passe par $A(0;-1)$ et $B(3;5)$; $(d') : y = -x + 5$.

XI — Prolongement : vers la dérivation

Exercice 36 : Calculer des taux de variation

- $f(x) = x^2 + 2x$: taux de variation de f entre 0 et 3 , puis entre -4 et -1 .
- $g(x) = -2x + 7$: taux de variation de g entre -1 et 4 , puis entre 2 et 10 . Que remarque-t-on ?
- Démontrer que, pour $x \mapsto mx + p$, le taux de variation entre deux nombres distincts vaut toujours m . Interpréter sur la droite.

Exercice 37 : Taux et sens de variation

- Soit $g(x) = x^2 - 4x$. Démontrer que, pour $a \neq b$, le taux de variation de g entre a et b vaut $a + b - 4$. En déduire le sens de variation de g sur $[2; +\infty[$, puis sur $] -\infty; 2]$.

- Soit $h(x) = \frac{1}{x}$. Démontrer que, pour a et b non nuls et

distincts, le taux de variation de h entre a et b vaut $-\frac{1}{ab}$.

En déduire le sens de variation de h sur $]0; +\infty[$.

Exercice 38 : Vitesse moyenne d'une chute

On lâche une bille du haut d'une tour. Au bout de t secondes, elle a parcouru $d(t) = 5t^2$ mètres. Sa vitesse moyenne entre deux instants est le taux de variation de d entre ces instants.

- Calculer la vitesse moyenne entre 1 et 3 secondes.
- Même question entre 2 et $2,5$ s, puis entre 2 et $2,1$ s.
- Quelle semble être la vitesse de la bille à l'instant $t = 2$?