

LE SECOND DEGRÉ

Cours — Première spécialité
Version élève

Comment utiliser ce cours

Chaque partie commence par ce qu'il faut **savoir** (définitions, théorèmes), puis vient ce qu'il faut **savoir faire** : une méthode, avec des **exemples** faits en classe, puis des exercices « **À vous de jouer** » à chercher seul.
Sur cette feuille, les exemples n'ont que leur **énoncé** : la résolution, marquée (au tableau), s'écrit dans le cahier pendant le cours. Les réponses des « À vous de jouer » ne sont pas données.

I — La forme canonique du trinôme

Définition 1 — Trinôme du second degré

Un **trinôme du second degré** (ou **trinôme**) est une expression de la forme

$$P(x) = ax^2 + bx + c \quad \text{où } a, b, c \text{ sont des réels, avec } a \neq 0.$$

Exemple

$P(x) = 3x^2 - 5x + 2$ est un trinôme : $a = 3$, $b = -5$ et $c = 2$.

Un même trinôme peut s'écrire de plusieurs façons : forme développée, forme canonique et forme factorisée (si elle existe). La **forme canonique** est celle qui montre s'il se factorise et quel est son extremum. Pour l'obtenir, on fait apparaître une **identité remarquable**.

Exemple — compléter un carré

Soit $P(x) = x^2 + 8x + 5$. On sait que $(x + 4)^2 = x^2 + 8x + 16$: les deux premiers termes de $P(x)$ sont le début de ce carré, auquel il manque 16.

$$P(x) = x^2 + 8x + 16 - 16 + 5 \quad \text{on ajoute 16 et on le retire aussitôt}$$

$$P(x) = (x + 4)^2 - 11 \quad \text{forme } (x - \alpha)^2 + \beta \text{ avec } \alpha = -4 \text{ et } \beta = -11$$

Théorème 1 — Forme canonique

Tout trinôme $P(x) = ax^2 + bx + c$ s'écrit, d'une seule façon,

$$P(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta \quad \text{avec} \quad \alpha = -\frac{b}{2a} \quad \text{et} \quad \beta = P(\alpha)$$

Dans l'exemple, $a = 1$ et $b = 8$:

$$\alpha = -\frac{8}{2} = -4$$

$$\beta = P(-4) = 16 - 32 + 5$$

$$\beta = -11 \quad \text{on retrouve la forme } (x + 4)^2 - 11$$

Démonstration (non exigible)

C'est le même calcul que dans l'exemple, avec des lettres.

$$P(x) = a \left(x^2 + \frac{b}{a}x \right) + c \quad \text{on met } a \neq 0 \text{ en facteur dans les deux premiers termes}$$

$$P(x) = a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} \right] + c \quad x^2 + \frac{b}{a}x \text{ est le début de } \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2$$

$$P(x) = a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2}{4a} + c \quad \text{on distribue } a$$

On reconnaît $a(x - \alpha)^2 + \beta$ avec $\alpha = -\frac{b}{2a}$. Pour β , inutile de retenir une formule : en $x = \alpha$ le carré est nul, donc $P(\alpha) = \beta$.

Méthode 1 — Mettre un trinôme sous forme canonique

Exemples

(au tableau)

Écrire chaque trinôme sous forme canonique.

a) $P(x) = x^2 - 10x + 16$

b) $Q(x) = 2x^2 + 10x + 7 \quad (a \neq 1)$

c) $R(x) = -x^2 + 6x - 11 \quad (a < 0)$

À vous de jouer

Écrire chaque trinôme sous forme canonique, puis contrôler avec α et β :

$$A(x) = x^2 + 12x + 20 \quad B(x) = 2x^2 - 2x - 3 \quad C(x) = -3x^2 + 12x - 14$$

À quoi sert la forme canonique ?

Dans $a(x - \alpha)^2 + \beta$, on regarde les signes de a et de β :

- **signes contraires** : on factorise avec $u^2 - v^2 = (u - v)(u + v)$;
- **même signe** ($\beta \neq 0$) : le trinôme ne s'annule jamais, il ne se factorise pas.

Exemple — factoriser grâce à la forme canonique

$P(x) = x^2 - 10x + 16 = (x - 5)^2 - 9$, avec $a = 1 > 0$ et $\beta = -9 < 0$:

$$P(x) = (x - 5)^2 - 3^2 \quad \text{forme } u^2 - v^2$$

$$P(x) = (x - 5 - 3)(x - 5 + 3)$$

$$P(x) = (x - 8)(x - 2)$$

► À faire : fiche d'exercices du chapitre, exercices 1 à 4.

II — Racines du trinôme et équations du second degré

Définition 2 — Racines et discriminant

Les **racines** d'un trinôme sont les solutions de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$.

Le **discriminant** du trinôme est le nombre $\Delta = b^2 - 4ac$.

Théorème 2 — Nombre de racines

- Si $\Delta > 0$: deux racines $x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$.

- Si $\Delta = 0$: une seule racine (dite **double**) $x_0 = -\frac{b}{2a}$.
- Si $\Delta < 0$: aucune racine réelle.

Pourquoi ?
En reprenant la démonstration de la partie I, la forme canonique s’écrit

$$P(x) = a \left[(x - \alpha)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} \right]$$

Si $\Delta < 0$, le crochet est la somme d’un carré et d’un nombre strictement positif : il ne s’annule pas. Si $\Delta = 0$, il reste $a(x - \alpha)^2$, nul seulement en α . Si $\Delta > 0$, le crochet est une différence de deux carrés, qui se factorise et donne deux racines.

Méthode 2 — Résoudre une équation du second degré

Exemples

(au tableau)

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes.

a) $3x^2 - 4x - 4 = 0$
b) $5x^2 - 20x + 20 = 0$
c) $x^2 - 3x + 5 = 0$
d) $9x^2 - 16 = 0$ et $4x^2 + 12x + 9 = 0$

À vous de jouer
Résoudre dans $\mathbb{R}$:

$x^2 - 9x + 20 = 0$ $3x^2 + 2x + 1 = 0$ $9x^2 + 6x + 1 = 0$ $4x^2 - 25 = 0$

► **À faire** : fiche d’exercices du chapitre, exercices 5 à 9.

III — Factorisation du trinôme

Quand $\Delta > 0$, la différence de deux carrés de la partie II se factorise ; ses deux facteurs s’annulent en x_1 et en x_2 . On obtient :

- Théorème 3 — Forme factorisée**
- Si $\Delta > 0$: $P(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$.
 - Si $\Delta = 0$: $P(x) = a(x - x_0)^2$.
 - Si $\Delta < 0$: le trinôme **ne se factorise pas**.

⚠ Le facteur a
On n’oublie pas a devant les parenthèses. Contrôle rapide : le terme constant de $a(x - x_1)(x - x_2)$ est $a x_1 x_2$, qui doit valoir c .

Méthode 3 — Factoriser un trinôme

Exemples

(au tableau)

Factoriser, quand c’est possible, les trinômes suivants.

a) $P(x) = 3x^2 - 4x - 4$
b) $Q(x) = 5x^2 - 20x + 20$
c) $R(x) = x^2 - 3x + 5$
d) $T(x) = x^2 + 2x - 15$

À vous de jouer

Factoriser quand c’est possible :

$A(x) = x^2 + x - 12$ $B(x) = 3x^2 - 7x + 2$ $C(x) = x^2 - 2x + 3$ $D(x) = -2x^2 + 3x + 2$

► **À faire** : fiche d’exercices du chapitre, exercices 10 à 12.

IV — Somme et produit des racines

On suppose que le trinôme a deux racines x_1 et x_2 . On note $S = x_1 + x_2$ leur **somme** et $P = x_1 x_2$ leur **produit**. On développe la forme factorisée :

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c &= a(x - x_1)(x - x_2) \\ (x - x_1)(x - x_2) &= x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1 x_2 && \text{calcul intermédiaire : on développe} \\ ax^2 + bx + c &= a(x^2 - Sx + P) && \text{avec } S = x_1 + x_2 \text{ et } P = x_1 x_2 \\ ax^2 + bx + c &= ax^2 - aSx + aP \end{aligned}$$

En identifiant les coefficients : $b = -aS$ et $c = aP$.

Théorème 4 — Somme et produit des racines

Si le trinôme $ax^2 + bx + c$ a deux racines, leur somme S et leur produit P valent

$$S = -\frac{b}{a} \quad \text{et} \quad P = \frac{c}{a}$$

En pratique, on met a en facteur : $ax^2 + bx + c = a(x^2 - Sx + P)$.

Exemple — lire S et P

$$3x^2 - 4x - 4 = 3 \left(x^2 - \frac{4}{3}x - \frac{4}{3} \right)$$

donc $S = \frac{4}{3}$ et $P = -\frac{4}{3}$. Avec les racines 2 et $-\frac{2}{3}$ de la méthode 2 : $2 - \frac{2}{3} = \frac{4}{3}$ et $2 \times \left(-\frac{2}{3}\right) = -\frac{4}{3}$.

Définition 3 — Racine évidente

Une **racine évidente** est une racine que l’on trouve de tête, en essayant des valeurs simples : 1, −1, 2, −2...

Méthode 4 — Trouver les racines sans discriminant

Exemples

(au tableau)

Résoudre les équations suivantes sans calculer de discriminant.

a) $3x^2 - 8x + 5 = 0$
b) $4x^2 + 3x - 1 = 0$
c) $x^2 - 8x + 12 = 0$

À vous de jouer
Trouver une racine évidente, puis l’autre racine avec la somme :

$x^2 + 5x + 4 = 0$ $4x^2 - 7x + 3 = 0$ $x^2 + 2x - 8 = 0$ $-3x^2 + 2x + 1 = 0$

► **À faire** : fiche d’exercices du chapitre, exercices 13 à 18.

V — Signe du trinôme et inéquations du second degré

Deux racines

Si $\Delta > 0$, avec $x_1 < x_2$, le signe de $P(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$ se lit dans un tableau de signes :

x	$-\infty$	x_1	x_2	$+\infty$
$x - x_1$	−	0	+	+
$x - x_2$	−	−	0	+
$a(x - x_1)(x - x_2)$	signe de a	0	signe de $-a$	signe de a

Le trinôme a le signe de a à l’extérieur des racines, le signe contraire **entre** les racines.

Une seule racine ou aucune

Si $\Delta = 0$, $P(x) = a(x - x_0)^2$: un carré est positif, donc $P(x)$ a le signe de a , et s’annule en x_0 .
Si $\Delta < 0$, $P(x) = a\left[(x - \alpha)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right]$ et le crochet est strictement positif : $P(x)$ a toujours le signe de a .

Théorème 5 — Signe du trinôme

Le signe de $P(x)$ dépend de Δ et du signe de a :

$\Delta > 0$

x	$-\infty$	x_1	x_2	$+\infty$
$P(x)$	a	0	$-a$	a

$\Delta = 0$

x	$-\infty$	x_0	$+\infty$
$P(x)$	a	0	a

$\Delta < 0$

x	$-\infty$	$+\infty$
$P(x)$	a	a

Dans chaque case, « a » signifie « du signe de a ».

Exemple — signe de $-4x^2 + 4x + 3$

$\Delta = 4^2 - 4 \times (-4) \times 3$
 $\Delta = 64$ *deux racines*

$x_1 = \frac{-4 + 8}{-8} = -\frac{1}{2}$
 $x_2 = \frac{-4 - 8}{-8} = \frac{3}{2}$

$a = -4 < 0$: négatif à l’extérieur des racines, positif entre elles.

x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	$+\infty$
$-4x^2 + 4x + 3$	−	0	+	−

Méthode 5 — Résoudre une inéquation du second degré

Exemples

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes.

(au tableau)

a) $x^2 - 5x + 4 > 0$
b) $-x^2 + 2x + 4 > 0$
c) $x^2 + 2x + 6 > 0$
d) $3x^2 - 12x + 12 \leq 0$

À vous de jouer

Résoudre :

$x^2 + 2x - 8 < 0$ $x^2 - 6x + 5 \geq 0$ $x^2 + x + 2 < 0$ $2x^2 + 8x + 8 > 0$

► À faire : fiche d’exercices du chapitre, exercices 19 à 21.

VI — Représentation graphique de la fonction trinôme

Dans cette partie, $f(x) = ax^2 + bx + c = a(x - \alpha)^2 + \beta$ sur $\mathbb{R}$.

Exemple — l’extremum se lit sur la forme canonique

Soit $f(x) = 3(x + 2)^2 - 1$. Pour tout réel x :

$(x + 2)^2 \geq 0$ *un carré est positif*
 $3(x + 2)^2 - 1 \geq -1$ *on multiplie par 3 > 0, puis on retranche 1*
 $f(x) \geq -1$

Et $f(-2) = -1$: f a un **minimum**, égal à -1 , atteint en -2 .

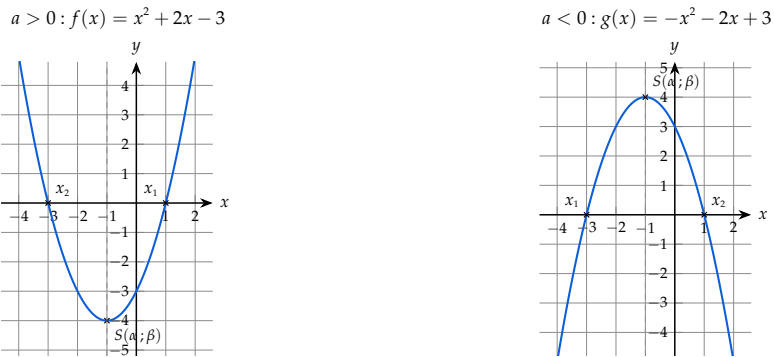
Définition 4 — Parabole et sommet

La courbe d’une fonction trinôme est une **parabole**. Son **sommet** est le point $S(\alpha; \beta)$.

Théorème 6 — Orientation et extremum

- Si $a > 0$: parabole **tournée vers le haut** ; f a un **minimum** β , atteint en α .
- Si $a < 0$: parabole **tournée vers le bas** ; f a un **maximum** β , atteint en α .

La parabole est **symétrique** par rapport à la droite d’équation $x = \alpha$.



Racines et parabole

Les racines sont les abscisses des points où la parabole **coupe l’axe des abscisses** : deux points si $\Delta > 0$, un seul (le sommet) si $\Delta = 0$, aucun si $\Delta < 0$. Avec deux racines, α est leur **milieu** : sur les figures, $\frac{-3 + 1}{2} = -1 = \alpha$.

Méthode 6 — Tracer l’allure d’une parabole

Exemples

(au tableau)

Tracer l’allure de la courbe de chaque fonction.

a) $f(x) = x^2 + 2x - 3$

b) $g(x) = -x^2 - 2x + 3$

c) $h(x) = x^2 + 4x + 6$

À vous de jouer

Pour chaque fonction : orientation, sommet, racines éventuelles, puis allure de la courbe.

$f_1(x) = x^2 - 4x + 3$ $f_2(x) = -x^2 + 6x - 5$ $f_3(x) = x^2 - 2x + 5$

► À faire : fiche d’exercices du chapitre, exercices 22 à 26.

VII — Variations de la fonction trinôme

Théorème 7 — Tableau de variations

$a > 0$: minimum β en α

$a < 0$: maximum β en α

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$f(x)$			

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$f(x)$			

avec $\alpha = -\frac{b}{2a}$ et $\beta = f(\alpha)$.

Méthode 7 — Dresser le tableau de variations d’un trinôme

Exemples

(au tableau)

Dresser le tableau de variations de chaque fonction, puis donner son extremum.

a) $f(x) = x^2 + 8x + 10$

b) $g(x) = -3x^2 - 6x - 7$

c) $h(x) = (x + 1)(x - 5)$

À vous de jouer

Dresser le tableau de variations et donner l’extremum :

$f_1(x) = x^2 + 6x + 4$ $f_2(x) = -2(x - 3)^2 + 7$ $f_3(x) = 3x^2 - 6x - 1$

► À faire : fiche d’exercices du chapitre, exercices 27 à 30.

VIII — Équations se ramenant au second degré

Une équation qui contient des produits, des carrés ou des quotients devient souvent, après calcul, une équation $ax^2 + bx + c = 0$.

Méthode 8 — Résoudre une équation se ramenant au second degré

Exemples

(au tableau)

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes.

a) Un produit : $(x + 3)(x - 2) = 14$.

b) Deux carrés : $(3x - 1)^2 = (x + 1)^2$.

c) Un quotient : $\frac{6}{x} = x + 1$.

d) Une valeur à rejeter : $\frac{x^2 - 4x + 4}{x - 2} = 3x - 4$.

e) Deux quotients : $\frac{1}{x - 1} - \frac{2}{2x - 1} = \frac{1}{3}$.

À vous de jouer

Résoudre dans $\mathbb{R}$:

$(x + 2)(x - 3) = 6$ $(2x + 1)^2 = (x + 3)^2$ $\frac{8}{x} = x + 2$ $\frac{2x^2 + 5x - 3}{x + 3} = x + 1$

► À faire : fiche d’exercices du chapitre, exercices 31 à 33.

IX — Inéquations se ramenant au second degré

Méthode 9 — Résoudre une inéquation se ramenant au second degré

Exemples

(au tableau)

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes.

a) Un produit : $(x + 4)(x - 1) < 3x + 12$.

b) Un quotient de trinômes : $\frac{x^2 - x - 2}{x^2 + 2x - 3} \geq 0$.

c) Deux quotients : $\frac{x + 1}{x - 2} < \frac{2}{x + 1}$.

À vous de jouer

Résoudre :

$(x + 3)(x - 2) < x + 3$ $\frac{x^2 - 4}{x^2 - 4x + 3} \geq 0$ $\frac{x + 2}{x - 1} < \frac{3}{x + 2}$

Erreur à éviter
Dans une inéquation, multiplier les deux membres par un dénominateur change le sens de l’inégalité quand il est négatif. Comme on ne connaît pas son signe, on étudie le signe d’un quotient.

► À faire : fiche d’exercices du chapitre, exercices 34 à 36.

X — Résoudre un problème du second degré

Méthode 10 — Résoudre un problème du second degré

Exemples

(au tableau)

a) **Deux pages d’un livre.** On ouvre un livre au hasard. Le produit des numéros des deux pages visibles vaut 156. Quels sont ces numéros ?

b) **Un panneau solaire.** Un panneau solaire rectangulaire a un périmètre de 22 dm et une aire de 28 dm². Quelles sont ses dimensions ?

c) **Une balle lancée d’une terrasse.** Sa hauteur au-dessus du sol, en mètres, t secondes après le lancer, est $h(t) = -5t^2 + 10t + 40$ pour $t \geq 0$. 1) Quelle hauteur maximale atteint-elle, et quand ? 2) Quand

touche-t-elle le sol ?

- d) **Agrandir une terrasse.** Une terrasse rectangulaire mesure 6 m sur 4 m. On allonge ses deux côtés d'une même longueur x , et son aire passe à 48 m². Trouver x .

À vous de jouer

- 1°) Deux élèves ont des numéros de casier consécutifs, dont le produit vaut 210. Quels sont ces numéros ?
- 2°) Une table rectangulaire a un périmètre de 26 dm et une aire de 42 dm² : quelles sont ses dimensions ?
- 3°) Une fusée à eau est lancée depuis un balcon ; sa hauteur en mètres est $h(t) = -5t^2 + 30t + 35$ pour $t \geq 0$. Quelle hauteur maximale atteint-elle ? Au bout de combien de temps retombe-t-elle au sol ?

► **À faire :** fiche d'exercices du chapitre, exercices 37 à 41.