

1^{re} spécialité — Le second degré

Fiche d'exercices du chapitre

I — Forme canonique

Exercice 1 : Compléter un carré ($a = 1$)

Écrire chaque trinôme sous la forme $(x - \alpha)^2 + \beta$.

$$A = x^2 + 8x - 3$$

$$D = x^2 + 5x + 2$$

$$B = x^2 - 6x + 2$$

$$E = x^2 - 12x + 35$$

$$C = x^2 - 3x + 1$$

$$F = x^2 - 9x$$

Exercice 2 : Compléter un carré ($a \neq 1$)

Écrire chaque trinôme sous la forme $a(x - \alpha)^2 + \beta$.

$$A = 2x^2 + 8x + 3$$

$$D = -x^2 + 5x - 4$$

$$B = -x^2 + 3x + 2$$

$$E = 2x^2 + 2x - 1$$

$$C = 4x^2 - 8x + 4$$

$$F = -2x^2 + 8x - 5$$

Exercice 3 : Forme canonique par α et β

Pour chaque trinôme, calculer $\alpha = -\frac{b}{2a}$ et β , écrire la forme canonique, puis la développer pour vérifier.

$$1) P(x) = x^2 - 6x + 1$$

$$2) Q(x) = 3x^2 + 6x - 2$$

$$3) R(x) = -x^2 - 4x - 9$$

Exercice 4 : De la forme canonique à la factorisation

Écrire chaque trinôme sous forme canonique. Le factoriser avec $u^2 - v^2 = (u - v)(u + v)$ quand c'est possible ; sinon, expliquer pourquoi il ne se factorise pas.

$$A = x^2 - 4x - 5$$

$$C = 2x^2 + x - 3$$

$$B = x^2 + 4x + 7$$

$$D = -x^2 - 2x - 3$$

II — Équations du second degré

Exercice 5 : Factoriser plutôt que calculer Δ

Résoudre chaque équation en factorisant, sans discriminant.

$$1) 9x^2 - 4 = 0$$

$$4) x^2 - 5 = 0$$

$$2) x^2 - 6x = 0$$

$$5) (3x - 2)(x + 5) = 0$$

$$3) 2x^2 - 18 = 0$$

$$6) x^2 - 10x + 25 = 0$$

Exercice 6 : Avec le discriminant

Résoudre dans $\mathbb{R}$ en calculant le discriminant.

$$1) x^2 + x - 12 = 0$$

$$2) x^2 + 3x + 5 = 0$$

$$3) -x^2 + 6x - 9 = 0$$

$$4) t^2 - 4t - 21 = 0$$

$$5) 2 - y - 3y^2 = 0$$

$$6) -2x^2 + 5x + 1 = 0$$

Exercice 7 : Des racines carrées dans les coefficients

Résoudre dans $\mathbb{R}$:

$$1) x^2 - 2\sqrt{5}x - 4 = 0$$

$$2) \sqrt{3}t^2 - 4t + \sqrt{3} = 0$$

$$3) x^2 - (1 + \sqrt{2})x + \sqrt{2} = 0$$

$$4) 4x - x^2 - 5 = 0$$

$$5) x^3 + 2x^2 - 15x = 0$$

$$6) (3x + 2)^2 + 1 = 0$$

Exercice 8 : Une parabole et une droite

- Dans un même repère, tracer l'allure de la parabole d'équation $y = x^2$ et la droite d'équation $y = 2x + 3$.
- Expliquer pourquoi les solutions de $x^2 - 2x - 3 = 0$ sont les abscisses des points communs aux deux courbes. Combien cette équation a-t-elle de solutions ? Les lire.
- Résoudre $x^2 - 2x - 3 = 0$ par le calcul.

Exercice 9 : Un programme Python

La fonction `racines` renvoie la liste des solutions de $ax^2 + bx + c = 0$.

```
from math import sqrt
```

```
def racines(a, b, c):  
    d = b*b - 4*a*c  
    if d < 0:  
        return []  
    if d == 0:  
        return [-b/(2*a)]  
    r = sqrt(d)  
    return [(-b - r)/(2*a), (-b + r)/(2*a)]
```

- Que représente la variable `d` ? Que renvoie la fonction selon son signe ?
- Saisir ce programme, puis le tester sur les six équations de l'exercice 6 : retrouve-t-on les résultats obtenus à la main ?
- Que se passe-t-il avec `racines(0, 3, -12)` ? Pourquoi ? Quelle est pourtant la solution de $3x - 12 = 0$?
- Comparer `racines(1, 6, 9)` et `racines(0.2, 1.2, 1.8)`. Le second trinôme vaut $0,2(x + 3)^2$: quelle réponse attendait-on ? Pourquoi un test d'égalité est-il fragile avec des nombres à virgule ?

III — Factorisation du trinôme

Exercice 10 : Factoriser un trinôme

Écrire chaque trinôme comme un produit de facteurs.

$$1) f(x) = x^2 + 3x - 10$$

$$2) g(x) = 3x^2 - 10x + 3$$

$$3) h(x) = -2x^2 + 3x + 5$$

$$4) k(x) = -\frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{3}x + 2$$

Exercice 11 : Factoriser, ou prouver que c'est impossible

Pour chaque trinôme, donner une forme factorisée ou démontrer qu'il ne se factorise pas.

$$A = x^2 + 2x + 2$$

$$D = -x^2 + 4x - 7$$

$$B = x^2 + 8x + 16$$

$$E = 9x^2 + 12x + 4$$

$$C = 3x^2 - 5x + 2$$

$$F = 2x^2 + 3x + 1$$

Exercice 12 : Simplifier un quotient

Donner l'ensemble de définition, factoriser le numérateur et le dénominateur, puis simplifier.

$$1) A(x) = \frac{x^2 + x - 6}{x + 3}$$

$$2) B(x) = \frac{3x^2 + x - 2}{x^2 - 1}$$

IV — Somme et produit des racines

Exercice 13 : Une racine connue (1)

- Montrer que -2 est solution de $x^2 + 5x + 6 = 0$.
- Donner la somme S et le produit P des racines.
- En déduire l'autre solution, et la contrôler avec P .

Exercice 14 : Une racine connue (2)

- Montrer que 3 est solution de $x^2 - 7x + 12 = 0$.
- Donner la somme S et le produit P des racines.
- En déduire l'autre solution, et la contrôler avec P .

Exercice 15 : Racine évidente, puis somme

Pour chaque équation, trouver une racine évidente parmi

$$1, -1, 2, -2, \dots \text{ puis l'autre racine avec la somme } S = -\frac{b}{a}.$$

$$1) x^2 - 6x + 5 = 0$$

$$3) 7x^2 - 9x + 2 = 0$$

$$2) 4x^2 + x - 5 = 0$$

$$4) 3x^2 + 8x + 5 = 0$$

Exercice 16 : Sans discriminant

Résoudre chaque équation sans calculer de discriminant : racine évidente, puis somme ou produit.

- | | |
|-------------------------|------------------------------|
| 1) $x^2 - 10x + 9 = 0$ | 4) $x^2 + 7x + 6 = 0$ |
| 2) $-2x^2 + 3x + 5 = 0$ | 5) $x^2 - 9x + 18 = 0$ |
| 3) $x^2 + 4x - 12 = 0$ | 6) $x^2 + x\sqrt{2} - 4 = 0$ |

Exercice 17 : Calculer sans résoudre

On note x_1 et x_2 les racines de $2x^2 - 9x + 4 = 0$, sans les calculer.

- 1) Justifier que ces racines existent, puis donner $S = x_1 + x_2$ et $P = x_1 x_2$.

- 2) Calculer $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$ à l'aide de S et P .

- 3) Développer S^2 , puis en déduire $x_1^2 + x_2^2$.

Exercice 18 : Signe des racines

Sans calculer les racines, donner leur signe à l'aide de S et P .

- 1) $x^2 - 9x + 14 = 0$
 2) $x^2 + 2x - 15 = 0$
 3) $3x^2 + 10x + 3 = 0$

V — Signe du trinôme et inéquations

Exercice 19 : Tableau de signes

Dresser le tableau de signes de chaque trinôme.

A = $x^2 - 6x + 8$	C = $x^2 - 4x + 6$
B = $-3x^2 + 9x - 6$	D = $-x^2 - 4x - 4$

Exercice 20 : Inéquations du second degré

Résoudre :

- | | |
|--------------------------|--------------------------|
| 1) $x^2 - 7x + 10 > 0$ | 4) $x^2 + 3x + 4 < 0$ |
| 2) $x^2 + 2x - 24 < 0$ | 5) $2x^2 - 12x + 18 > 0$ |
| 3) $p^2 - p - 30 \leq 0$ | 6) $-3x^2 + 2x + 2 > 0$ |

Exercice 21 : Position d'une parabole et d'une droite

On note $\mathcal{C}_f$ la courbe de $f(x) = x^2 + 2x + 3$ et $\mathcal{D}_g$ la droite d'équation $y = 4x + 2$.

- 1) Résoudre $f(x) = 4x + 2$. Que peut-on dire des points communs à $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{D}_g$?
 2) Étudier le signe de $f(x) - (4x + 2)$.
 3) En déduire la position de $\mathcal{C}_f$ par rapport à $\mathcal{D}_g$.

VI — Représentation graphique

Exercice 22 : Sommet, racines, allure

Pour chaque fonction : orientation de la parabole, sommet $S(\alpha; \beta)$, racines éventuelles, puis allure de la courbe dans un repère.

A = $x^2 + 4x + 3$	C = $x^2 - 4x + 5$
B = $-x^2 + 4x - 3$	D = $-2x^2 - 4x$

Exercice 23 : Utiliser la symétrie

Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - 6x + 8$.

- 1) Calculer α , β et les racines de f .
 2) Calculer $f(0)$. Quel point de la parabole est le symétrique de $(0; f(0))$ par rapport à la droite $x = \alpha$? Le vérifier par un calcul.
 3) Placer ces points dans un repère, puis tracer l'allure de la parabole.

Exercice 24 : Retrouver un trinôme

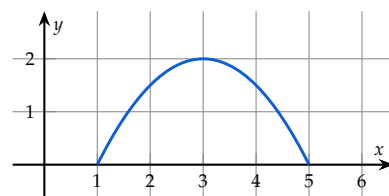
Une parabole coupe l'axe des abscisses en -1 et en 3 ; son sommet est $S(1; -8)$.

- 1) Vérifier que l'abscisse du sommet est le milieu des racines.
 2) Le trinôme s'écrit $a(x + 1)(x - 3)$. Trouver a à l'aide du sommet.
 3) Écrire le trinôme sous forme développée, et contrôler avec le sommet.

Exercice 25 : Le jet d'une fontaine

Le jet d'eau d'une fontaine suit une parabole. Dans le repère ci-dessous, x est la distance horizontale (en m) et y

la hauteur du jet au-dessus du bassin (en m). Cette parabole est la courbe d'un trinôme $P(x) = ax^2 + bx + c$.

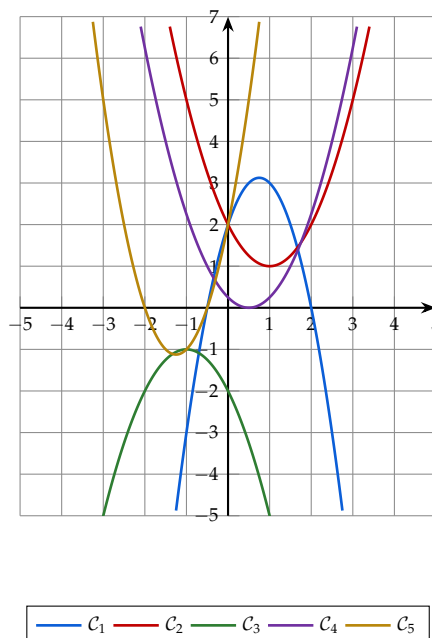


- 1) Lire les racines x_1 et x_2 de P . Que représentent-elles pour le jet ?
 2) Lire les coordonnées $(\alpha; \beta)$ du sommet. Que représente β ?
 3) Vérifier que α est le milieu de x_1 et x_2 .
 4) Quel est le signe de a ? Justifier.

Exercice 26 : À chaque parabole sa fonction

Le graphique ci-dessous montre 5 paraboles $\mathcal{C}_1, \dots, \mathcal{C}_5$. Associer à chaque fonction sa parabole, en justifiant.

- a) $f_1(x) = -x^2 - 2x - 2$
 b) $f_2(x) = x^2 - 2x + 2$
 c) $f_3(x) = 2x^2 + 5x + 2$
 d) $f_4(x) = -2x^2 + 3x + 2$
 e) $f_5(x) = x^2 - x + \frac{1}{4}$



VII — Variations de la fonction trinôme

Exercice 27 : Variations et forme canonique

Dresser le tableau de variations de chaque fonction, définie sur $\mathbb{R}$.

- 1) $f(x) = 3(x - 2)^2 + 1$
 2) $g(x) = -2(x + 3)^2 + 4$
 3) $h(x) = x(x + 6)$

Exercice 28 : Variations par α et β

Pour chaque trinôme, calculer α et β , puis dresser son tableau de variations.

A = $x^2 + 6x + 7$	C = $3x^2 - 12x + 5$
B = $-x^2 + 4x + 5$	D = $-\frac{1}{2}x^2 - 2x$

Exercice 29 : Un maximum

Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -3x^2 + 12x - 10$.

- 1) Écrire $f(x)$ sous forme canonique.
 2) En déduire que $f(x) \leq 2$ pour tout réel x . Pour quelle valeur de x a-t-on $f(x) = 2$?

Exercice 30 : Étude complète d'un trinôme

Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -x^2 + 2x + 3$.

- 1) Trouver les racines de f , puis écrire $f(x)$ sous forme factorisée.
- 2) Calculer α et β , puis dresser le tableau de variations de f .
- 3) Vérifier que α est le milieu des deux racines.
- 4) Dresser le tableau de signes de f , puis tracer l'allure de sa courbe.

VIII — Équations se ramenant au second degré**Exercice 31 : Développer, puis résoudre**

Résoudre dans $\mathbb{R}$:

- | | |
|---------------------|-------------------------|
| 1) $(x+1)(x-4) = 6$ | 4) $(2x+3)^2 = (x+3)^2$ |
| 2) $(3x+1)^2 = 16$ | 5) $(x-3)^2 = x+3$ |
| 3) $x(x-4) = -3$ | 6) $(x+4)(x-4) = 6x+11$ |

Exercice 32 : Un seul quotient

Donner l'ensemble de définition, puis résoudre :

- | | |
|-------------------------|---------------------------|
| 1) $\frac{12}{x} = x+1$ | 3) $\frac{x+10}{x} = x-2$ |
| 2) $\frac{6}{x-1} = x$ | 4) $x + \frac{8}{x} = 6$ |

Exercice 33 : Équations avec quotients

Résoudre dans $\mathbb{R}$:

- 1) $\frac{x^2 - 6x + 9}{x-3} = 2x-5$
- 2) $\frac{2}{x} + \frac{2}{x-3} = 1$
- 3) $\frac{1}{x+2} - \frac{2}{x-3} = \frac{3}{2}$
- 4) $\frac{2x^2 + 9x + 10}{x+2} = x+3$

IX — Inéquations se ramenant au second degré**Exercice 34 : Développer, puis résoudre**

Résoudre :

- | | |
|---------------------------|--------------------|
| 1) $(x+1)(x+3) \leq 2x+6$ | 3) $x(x-4) \geq 5$ |
| 2) $(3x+1)^2 < (x+3)^2$ | 4) $(x+2)^2 > 9$ |

Exercice 35 : Signe d'un quotient

Donner l'ensemble de définition, puis résoudre :

- 1) $\frac{2x-6}{x+1} \leq 0$
- 2) $\frac{x^2-1}{x+2} \geq 0$
- 3) $\frac{x^2+x-6}{x^2-4x+3} > 0$

$$4) \frac{x^2 - 5x + 4}{x-2} < 0$$

Exercice 36 : Tout dans un membre

$$\text{Résoudre } \frac{x+2}{2-x} \geq 3x+1.$$

On ne multipliera pas par un dénominateur dont on ignore le signe.

X — Problèmes

Pour chaque problème : choisir l'inconnue et dire ce qu'elle représente, mettre en équation, résoudre, puis revenir à l'énoncé et répondre par une phrase.

Exercice 37 : Le nombre mystère

Le carré d'un nombre positif, diminué de son triple, vaut 40. Quel est ce nombre ?

Exercice 38 : Une voile d'ombrage

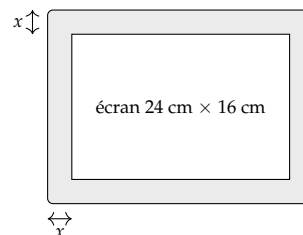
Une voile d'ombrage a la forme d'un triangle rectangle. L'un des côtés de l'angle droit mesure 2 m de plus que l'autre, et l'aire de la voile est de 12 m². Quelles sont les longueurs des côtés de l'angle droit ?

Exercice 39 : Agrandir une photo

On agrandit une photo carrée en ajoutant 12 cm à son côté : son aire est alors multipliée par 4. Quel était le côté de la photo de départ ?

Exercice 40 : La bordure d'une tablette

L'écran d'une tablette mesure 24 cm sur 16 cm. Il est entouré d'une bordure de largeur constante x . La face avant de la tablette a une aire de 560 cm².



Trouver la largeur x de la bordure.

Exercice 41 : Des vélos reconditionnés

Un atelier remet en état et vend x vélos électriques par mois, avec $0 \leq x \leq 40$. Son bénéfice mensuel, en euros, est

$$B(x) = -10x^2 + 400x - 3000$$

- 1) Calculer $B(5)$ et $B(12)$, et interpréter.
- 2) Résoudre $B(x) > 0$. Combien de vélos l'atelier doit-il vendre pour être bénéficiaire ?
- 3) Pour combien de vélos vendus le bénéfice est-il maximal ? Que vaut-il ?