

CORRIGÉ — FICHE D'EXERCICES

Chapitre 4 — Dérivation
Première spécialité mathématiques

I — Limite en zéro d'une fonction

Exercice 01 — Conjecturer avec un tableau de valeurs

- $f(-0,1) = -3,1; f(-0,01) = -3,01; f(0,01) = -2,99; f(0,1) = -2,9$.
- $f(x)$ semble s'approcher de -3 .
- Pour $x \neq 0$:

$$f(x) = \frac{x(x-3)}{x} \quad \text{on factorise par } x$$

$$f(x) = x - 3$$

Quand x tend vers 0, $x - 3$ tend vers -3 : $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -3$.

Exercice 02 — Calculer des limites en zéro

On factorise par x et on simplifie, puis on remplace x par 0.

- $f(x) = x + 4$: limite 4.
- $g(x) = 2x - 6$: limite -6 .
- $h(x) = 4x^2 + 1$: limite 1.
- $k(x) = 3x^2 - x + 8$: limite 8.

Exercice 03 — Avec une identité remarquable

On développe le carré : la constante disparaît, puis on simplifie par x .

- $f(x) = \frac{1 + 2x + x^2 - 1}{x} = 2 + x$: limite 2.
- $g(x) = \frac{25 + 10x + x^2 - 25}{x} = 10 + x$: limite 10.
- $h(x) = \frac{x^2 - 4x + 4 - 4}{x} = x - 4$: limite -4 .
- $k(x) = \frac{9 - 6x + x^2 - 9}{x} = x - 6$: limite -6 .

Exercice 04 — Limites quand h tend vers 0

- $\frac{h^2 + 6h}{h} = h + 6$: limite 6.
- $\frac{4 + 4h + h^2 - 4}{h} = 4 + h$: limite 4.
- $\frac{3 + 6h + 3h^2 - 3}{h} = 6 + 3h$: limite 6.

II — Nombre dérivé

Exercice 05 — Nombre dérivé par la définition

$$\text{a) } T(h) = \frac{(3+h)^2 - 9}{h}$$

$$T(h) = \frac{9 + 6h + h^2 - 9}{h}$$

$$T(h) = 6 + h$$

$$f'(3) = \lim_{h \rightarrow 0} (6 + h)$$

$$f'(3) = 6$$

$$\text{b) } g(1) = 3 \text{ et } g(1+h) = 1 + 2h + h^2 + 2 + 2h = 3 + 4h + h^2.$$

$$T(h) = \frac{3 + 4h + h^2 - 3}{h}$$

$$T(h) = 4 + h$$

$$g'(1) = \lim_{h \rightarrow 0} (4 + h)$$

$$g'(1) = 4$$

$$\text{c) } k(1) = 4 \text{ et } k(1+h) = -(1+2h+h^2) + 5 + 5h = 4 + 3h - h^2.$$

$$T(h) = \frac{3h - h^2}{h}$$

$$T(h) = 3 - h$$

$$k'(1) = \lim_{h \rightarrow 0} (3 - h)$$

$$k'(1) = 3$$

$$\text{d) } m(-1) = -1 \text{ et } m(-1+h) = 2(1-2h+h^2) - 3 = -1 - 4h + 2h^2.$$

$$T(h) = \frac{-4h + 2h^2}{h}$$

$$T(h) = -4 + 2h$$

$$m'(-1) = \lim_{h \rightarrow 0} (-4 + 2h)$$

$$m'(-1) = -4$$

→ Erreur fréquente : oublier les parenthèses dans $-(1+h)^2$.

Exercice 06 — Le taux de variation est donné

On remplace h par 0 dans $T(h)$.

$$\text{a) } f'(1) = \lim_{h \rightarrow 0} (3h + 7) = 7.$$

$$\text{b) } g'(4) = \lim_{h \rightarrow 0} (h^2 - h - 2) = -2.$$

$$\text{c) On divise d'abord par } h : T(h) = \frac{5h - 2h^2}{h} = 5 - 2h, \text{ donc } k'(-1) = 5.$$

Exercice 07 — Avec des fractions

$$1. f(4+h) - f(4) = \frac{1}{4+h} - \frac{1}{4}$$

$$f(4+h) - f(4) = \frac{1 \times 4}{(4+h) \times 4} - \frac{1 \times (4+h)}{4 \times (4+h)} \quad \text{même dénominateur}$$

$$f(4+h) - f(4) = \frac{-h}{4(4+h)}$$

On divise par h , puis on passe à la limite :

$$T(h) = \frac{-1}{4(4+h)}$$

$$f'(4) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-1}{4(4+h)}$$

$$f'(4) = -\frac{1}{16}$$

$$2. g(1) = \frac{1}{2} \text{ et } g(1+h) = \frac{1}{2+h}.$$

$$g(1+h) - g(1) = \frac{1}{2+h} - \frac{1}{2}$$

$$g(1+h) - g(1) = \frac{2 - (2+h)}{2(2+h)}$$

$$g(1+h) - g(1) = \frac{-h}{2(2+h)}$$

On divise par h , puis on passe à la limite :

$$T(h) = \frac{-1}{2(2+h)}$$

$$g'(1) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-1}{2(2+h)}$$

$$g'(1) = -\frac{1}{4}$$

Exercice 08 — Pour un nombre a quelconque

$$1. f(a+h) - f(a) = (a+h)^2 - 4(a+h) - a^2 + 4a$$

$$f(a+h) - f(a) = a^2 + 2ah + h^2 - 4a - 4h - a^2 + 4a$$

$$f(a+h) - f(a) = 2ah + h^2 - 4h$$

$$T(h) = 2a + h - 4$$

on divise par h

$$2. f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} (2a - 4 + h) = 2a - 4.$$

$$3. f'(0) = -4; f'(2) = 0; f'(5) = 6.$$

III — Tangente à une courbe**Exercice 09 — Lecture graphique**

$$1. f(-1) = 2; f(1) = 0; f(3) = -2.$$

$$2. \text{ Les tangentes en } A \text{ et } C \text{ sont horizontales : } f'(-1) = 0 \text{ et } f'(3) = 0. \text{ La tangente en } B \text{ passe par } B(1;0) \text{ et par } (3;-3) : \text{ quand on avance de } 2, \text{ elle descend de } 3, \text{ donc } f'(1) = -\frac{3}{2}.$$

$$3. y = f'(1)(x - 1) + f(1)$$

$$y = -\frac{3}{2}(x - 1) + 0$$

$$y = -\frac{3}{2}x + \frac{3}{2}$$

Exercice 10 — Équation de la tangente

On applique $y = f'(a)(x - a) + f(a)$.

a) $y = 4(x - 2) + 3$, soit $y = 4x - 5$.

b) $y = -3(x + 1) + 2$, soit $y = -3x - 1$.

c) $y = \frac{1}{2}(x - 0) + 5$, soit $y = \frac{1}{2}x + 5$.

d) $y = 0 \times (x - 4) - 1$, soit $y = -1$ (tangente horizontale).

Exercice 11 — Nombre dérivé, puis tangente

1. $f(1) = 0$ et $f(1 + h) = 1 + 2h + h^2 + 1 + h - 2 = 3h + h^2$.

$$T(h) = \frac{3h + h^2}{h}$$

$$T(h) = 3 + h$$

$$f'(1) = \lim_{h \rightarrow 0} (3 + h)$$

$$f'(1) = 3$$

$$y = 3(x - 1) + 0 \quad y = f'(1)(x - 1) + f(1)$$

$$y = 3x - 3$$

2. $g(-1) = -1$.

$$g(-1 + h) - g(-1) = \frac{1}{-1 + h} + 1$$

$$g(-1 + h) - g(-1) = \frac{1 + (-1 + h)}{-1 + h} \quad \text{même dénominateur}$$

$$g(-1 + h) - g(-1) = \frac{h}{-1 + h}$$

$$T(h) = \frac{1}{-1 + h}$$

$$g'(-1) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{-1 + h}$$

$$g'(-1) = -1$$

$$y = -(x + 1) - 1$$

$$y = -x - 2$$

Exercice 12 — Tangente passant par un point

$f'(1)$ est le coefficient directeur de la tangente, donc de la droite (AB) .

1. $f'(1) = \frac{4 - (-2)}{3 - 1} \quad \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$

$$f'(1) = 3$$

$$y = 3(x - 1) - 2$$

$$y = 3x - 5$$

$$\begin{aligned}
 2. \quad g'(-2) &= \frac{-3-1}{0-(-2)} \\
 g'(-2) &= -2 \\
 y &= -2(x+2) + 1 \\
 y &= -2x - 3
 \end{aligned}$$

IV — Approximation linéaire

Exercice 13 — Valeurs approchées sans calculatrice

1. $f(6) = 36$. Nombre dérivé en 6, pour $h \neq 0$:

$$\begin{aligned}
 T(h) &= \frac{(6+h)^2 - 36}{h} \\
 T(h) &= \frac{12h + h^2}{h} \\
 T(h) &= 12 + h \\
 f'(6) &= 12 \quad \text{limite quand } h \text{ tend vers } 0 \\
 6,02^2 &\simeq 36 + 12 \times 0,02 = 36,24.
 \end{aligned}$$

2. $g(1) = 1$. Nombre dérivé en 1, pour $h \neq 0$:

$$\begin{aligned}
 g(1+h) &= (1+2h+h^2)(1+h) \\
 g(1+h) &= 1+3h+3h^2+h^3 \\
 T(h) &= 3+3h+h^2 \quad \text{on divise } 3h+3h^2+h^3 \text{ par } h \\
 g'(1) &= 3 \\
 1,01^3 &\simeq 1 + 3 \times 0,01 = 1,03.
 \end{aligned}$$

3. $a = 1$ et $h = -0,02$; $k(1) = 1$. Nombre dérivé en 1, pour $h \neq 0$:

$$\begin{aligned}
 T(h) &= \frac{\frac{1}{1+h} - 1}{h} \\
 T(h) &= \frac{-h}{1+h} \times \frac{1}{h} \quad \frac{1}{1+h} - 1 = \frac{1-(1+h)}{1+h} \\
 T(h) &= \frac{-1}{1+h} \\
 k'(1) &= -1 \quad 1+h \text{ tend vers } 1 \\
 \frac{1}{0,98} &\simeq 1 + (-1) \times (-0,02) = 1,02.
 \end{aligned}$$

4. $a = 2$ et $h = 0,01$; $k(2) = 0,5$. Nombre dérivé en 2, pour $h \neq 0$:

$$\begin{aligned}
 T(h) &= \frac{\frac{1}{2+h} - \frac{1}{2}}{h} \\
 T(h) &= \frac{-h}{2(2+h)} \times \frac{1}{h} \quad \frac{1}{2+h} - \frac{1}{2} = \frac{2-(2+h)}{2(2+h)} \\
 T(h) &= \frac{-1}{2(2+h)} \\
 k'(2) &= -\frac{1}{4} \quad 2+h \text{ tend vers } 2 \\
 \frac{1}{2,01} &\simeq 0,5 - \frac{1}{4} \times 0,01 = 0,4975.
 \end{aligned}$$

5. La calculatrice donne 36,2404; 1,030301; 1,02040...; 0,49751... : les valeurs approchées sont justes au centième (et même mieux).

→ Le point clé : choisir a « rond » (où l'on sait calculer $f(a)$ et $f'(a)$) et h petit.

Exercice 14 — Augmentations et baisses successives

1. $f(1) = 1$ et, pour $h \neq 0$, $T(h) = \frac{2h + h^2}{h} = 2 + h$, donc $f'(1) = 2$. Avec $a = 1$ et $h = 0,015$: $1,015^2 \simeq 1 + 2 \times 0,015 = 1,03$. Hausse d'environ 3 % (la calculatrice donne 1,030225).
2. $g(1) = 1$ et $T(h) = 3 + 3h + h^2$ (exercice 13), donc $g'(1) = 3$. Avec $a = 1$ et $h = -0,02$: $0,98^3 \simeq 1 + 3 \times (-0,02) = 0,94$. Baisse d'environ 6 % (la calculatrice donne 0,941192).

→ Pour de petits pourcentages, n hausses de t % font environ $n \times t$ %.

Exercice 15 — Courbe et tangente

1. $f(2) = 4 + 6 = 10$. Pour $h \neq 0$:

$$f(2+h) - f(2) = 4 + 4h + h^2 + 6 + 3h - 10$$

$$f(2+h) - f(2) = 7h + h^2$$

$$T(h) = 7 + h \qquad \text{on divise par } h$$

$$f'(2) = 7$$
2. $f(2,1) \simeq 10 + 7 \times 0,1 = 10,7$. Valeur exacte : $f(2,1) = 4,41 + 6,3 = 10,71$; l'écart est 0,01.
3. $f(1,95) \simeq 10 + 7 \times (-0,05) = 9,65$. Valeur exacte : $f(1,95) = 3,8025 + 5,85 = 9,6525$; l'écart est 0,0025.

V — Dérivées des fonctions polynômes

Exercice 16 — Dériver un polynôme

- a) $f'(x) = 0$ (constante)
- b) $g'(x) = 5$
- c) $h'(x) = 6x^5$
- d) $k'(x) = 6x - 4$
- e) $m'(x) = -6x^2 + 2x - 5$
- f) $p'(x) = 4x^3 - 6x^2 + 7$

→ Le coefficient se garde : la dérivée de $-2x^3$ est $-2 \times 3x^2 = -6x^2$.

Exercice 17 — Avec des fractions

- a) $f'(x) = \frac{1}{2} \times 2x - 3 = x - 3$
- b) $g'(x) = \frac{1}{3} \times 3x^2 - 2x = x^2 - 2x$
- c) $h'(x) = \frac{1}{4} \times 4x^3 + \frac{2}{3} \times 3x^2 = x^3 + 2x^2$
- d) $k(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x$, donc $k'(x) = x^2 - 2$

Exercice 18 — Développer d'abord

- a) $f(x) = x^2 + 8x + 16$, donc $f'(x) = 2x + 8$
- b) $g(x) = 9x^2 - 6x + 1$, donc $g'(x) = 18x - 6$
- c) $h(x) = x^3 - 5x$, donc $h'(x) = 3x^2 - 5$

d) $k(x) = x^2 - 4$, donc $k'(x) = 2x$

Exercice 19 — Entraînement : polynômes

a) $f'(x) = 3x^2 - 14x + 2$

b) $g'(x) = -20x^4 + 6x$

c) $h'(x) = 24x^3 - 3x^2 + 1$

d) $k'(x) = \frac{2}{5} \times 5x^4 - 1 = 2x^4 - 1$

e) $m'(x) = 0,5 \times 4x^3 - 1,5 \times 2x = 2x^3 - 3x$

f) $p(x) = \frac{1}{4}x^2 - \frac{3}{4}$, donc $p'(x) = \frac{1}{2}x$

g) $q'(x) = 7x^6 - 5x^4 + 3x^2$

h) $r(x) = 3x^2 - 6x + 15$, donc $r'(x) = 6x - 6$

Exercice 20 — Fonction dérivée et nombres dérivés

1. $f'(x) = 3x^2 - 6x$.

2. $f'(0) = 0$; $f'(1) = 3 - 6 = -3$; $f'(-1) = 3 + 6 = 9$; $f'(2) = 12 - 12 = 0$.

3. $f(1) = 1 - 3 + 2 = 0$.

$$y = f'(1)(x - 1) + f(1)$$

$$y = -3(x - 1) + 0$$

$$y = -3x + 3$$

4. La tangente est horizontale quand $f'(x) = 0$: $3x(x - 2) = 0$, soit $x = 0$ ou $x = 2$. Avec $f(0) = 2$ et $f(2) = 8 - 12 + 2 = -2$: aux points $(0; 2)$ et $(2; -2)$.

VI — Dérivées des autres fonctions de référence

Exercice 21 — Nombres dérivés des fonctions de référence

a) $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$: $f'(5) = -\frac{1}{25}$ et $f'(\frac{1}{2}) = -\frac{1}{\frac{1}{4}} = -4$.

b) $g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$: $g'(16) = \frac{1}{2 \times 4} = \frac{1}{8}$ et $g'(\frac{1}{4}) = \frac{1}{2 \times \frac{1}{2}} = 1$.

c) $k'(x) = -\frac{2}{x^3}$: $k'(1) = -2$ et $k'(-2) = -\frac{2}{-8} = \frac{1}{4}$.

Exercice 22 — Dériver avec les fonctions de référence

a) $f'(x) = 4 \times \left(-\frac{1}{x^2}\right) = -\frac{4}{x^2}$

b) $g'(x) = -3 \times \frac{1}{2\sqrt{x}} = -\frac{3}{2\sqrt{x}}$

c) $h'(x) = -\frac{4}{x^5}$

d) $k'(x) = 5 \times \left(-\frac{3}{x^4}\right) = -\frac{15}{x^4}$

e) $m'(x) = -2 \sin x$

f) $p'(x) = -\cos x$

Exercice 23 — Entraînement : fonctions de référence

a) $f'(x) = -7 \times \left(-\frac{1}{x^2}\right) = \frac{7}{x^2}$

b) $g'(x) = 8 \times \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{4}{\sqrt{x}}$

c) $h'(x) = 2 \times \left(-\frac{2}{x^3}\right) = -\frac{4}{x^3}$

d) $k'(x) = -1 \times \left(-\frac{5}{x^6}\right) = \frac{5}{x^6}$

e) $m'(x) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{6\sqrt{x}}$

f) $p'(x) = -4 \times (-\sin x) = 4 \sin x$

g) $q(x) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{x}$, donc $q'(x) = \frac{1}{2} \times \left(-\frac{1}{x^2}\right) = -\frac{1}{2x^2}$

h) $r'(x) = \frac{1}{2} \cos x$

→ Deux signes « - » donnent un « + » : c'est l'erreur la plus fréquente en a), d) et f).

Exercice 24 — Tangentes aux courbes de référence

1. $f(1) = 1$ et $f'(1) = -1$.

$$y = -1 \times (x - 1) + 1$$

$$y = -x + 2$$

2. $g(4) = 2$ et $g'(4) = \frac{1}{2 \times 2} = \frac{1}{4}$.

$$y = \frac{1}{4}(x - 4) + 2$$

$$y = \frac{1}{4}x + 1$$

3. $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$ est toujours strictement négatif (un carré non nul est positif) : $f'(x)$ ne vaut jamais 0, donc aucune tangente n'est horizontale.

VII — Dérivée d'une somme et d'un produit**Exercice 25 — Dériver une somme**

On dérive chaque terme.

a) $f'(x) = 3x^2 - \frac{1}{x^2}$

b) $g'(x) = 4x - \frac{1}{2\sqrt{x}}$

c) $h'(x) = -\frac{3}{x^2} + 5$

d) $k'(x) = 1 - \sin x$

Exercice 26 — Dériver un produit

a) $u(x) = 3x - 2, u'(x) = 3; v(x) = x + 4, v'(x) = 1.$

$$f'(x) = 3(x + 4) + (3x - 2) \times 1 \quad u'v + uv'$$

$$f'(x) = 3x + 12 + 3x - 2$$

$$f'(x) = 6x + 10$$

b) $u(x) = x^2 + 1, u'(x) = 2x; v(x) = 2x - 3, v'(x) = 2.$

$$g'(x) = 2x(2x - 3) + (x^2 + 1) \times 2$$

$$g'(x) = 4x^2 - 6x + 2x^2 + 2$$

$$g'(x) = 6x^2 - 6x + 2$$

c) $u(x) = x + 1, u'(x) = 1; v(x) = \sqrt{x}, v'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$

$$h'(x) = 1 \times \sqrt{x} + (x + 1) \times \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$h'(x) = \frac{2x}{2\sqrt{x}} + \frac{x+1}{2\sqrt{x}} \quad \sqrt{x} = \frac{\sqrt{x} \times 2\sqrt{x}}{2\sqrt{x}} = \frac{2x}{2\sqrt{x}}$$

$$h'(x) = \frac{3x+1}{2\sqrt{x}}$$

d) $u(x) = x^2, u'(x) = 2x; v(x) = \cos x, v'(x) = -\sin x.$

$$k'(x) = 2x \cos x + x^2 \times (-\sin x)$$

$$k'(x) = 2x \cos x - x^2 \sin x$$

Exercice 27 — Entraînement : sommes et produits

a) $f'(x) = 2x - 3 + 4 \times \left(-\frac{1}{x^2}\right) = 2x - 3 - \frac{4}{x^2}$

b) $g'(x) = 4 \times \frac{1}{2\sqrt{x}} - 6x^2 = \frac{2}{\sqrt{x}} - 6x^2$

c) $u(x) = x^2 - 4, u'(x) = 2x; v(x) = 3x + 1, v'(x) = 3.$

$$h'(x) = 2x(3x + 1) + (x^2 - 4) \times 3$$

$$h'(x) = 6x^2 + 2x + 3x^2 - 12$$

$$h'(x) = 9x^2 + 2x - 12$$

d) $u(x) = 2x - 1, u'(x) = 2; v(x) = \sqrt{x}, v'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$

$$k'(x) = 2\sqrt{x} + (2x - 1) \times \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$k'(x) = \frac{4x}{2\sqrt{x}} + \frac{2x-1}{2\sqrt{x}} \quad 2\sqrt{x} = \frac{4x}{2\sqrt{x}}$$

$$k'(x) = \frac{6x-1}{2\sqrt{x}}$$

e) $u(x) = x + 2, u'(x) = 1; v(x) = \cos x, v'(x) = -\sin x.$

$$m'(x) = 1 \times \cos x + (x + 2)(-\sin x)$$

$$m'(x) = \cos x - (x + 2) \sin x$$

f) $u(x) = \frac{1}{x}, u'(x) = -\frac{1}{x^2}; v(x) = x + 5, v'(x) = 1.$

$$p'(x) = -\frac{1}{x^2}(x+5) + \frac{1}{x} \times 1$$

$$p'(x) = \frac{-x-5}{x^2} + \frac{x}{x^2} \quad \text{même dénominateur}$$

$$p'(x) = -\frac{5}{x^2}$$

→ Plus court : $p(x) = 1 + \frac{5}{x}$, puis on dérive la somme.

g) $u(x) = x^2 + x, u'(x) = 2x + 1; v(x) = x^2 - x, v'(x) = 2x - 1.$

$$q'(x) = (2x+1)(x^2-x) + (x^2+x)(2x-1)$$

$$q'(x) = 2x^3 - x^2 - x + 2x^3 + x^2 - x$$

$$q'(x) = 4x^3 - 2x$$

→ Vérification : $q(x) = x^4 - x^2$, de dérivée $4x^3 - 2x$.

h) $u(x) = \sin x, u'(x) = \cos x; v(x) = \cos x, v'(x) = -\sin x.$

$$r'(x) = \cos x \times \cos x + \sin x \times (-\sin x)$$

$$r'(x) = (\cos x)^2 - (\sin x)^2$$

Exercice 28 — Deux façons de dériver

1. $u(x) = 2x + 5, u'(x) = 2; v(x) = 1 - 3x, v'(x) = -3.$

$$f'(x) = 2(1-3x) + (2x+5)(-3)$$

$$f'(x) = 2 - 6x - 6x - 15$$

$$f'(x) = -12x - 13$$

2. $f(x) = 2x - 6x^2 + 5 - 15x$

$$f(x) = -6x^2 - 13x + 5$$

$$f'(x) = -12x - 13$$

3. On trouve bien la même dérivée.

Exercice 29 — Produit et tangente

1. $u(x) = x - 3, u'(x) = 1; v(x) = \sqrt{x}, v'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$

$$f'(x) = \sqrt{x} + \frac{x-3}{2\sqrt{x}}$$

$$f'(x) = \frac{2x}{2\sqrt{x}} + \frac{x-3}{2\sqrt{x}}$$

$$f'(x) = \frac{3x-3}{2\sqrt{x}}$$

2. $f(4) = 1 \times 2 = 2$ et $f'(4) = \frac{12-3}{2 \times 2} = \frac{9}{4}.$

3. $y = \frac{9}{4}(x-4) + 2$

$$y = \frac{9}{4}x - 9 + 2$$

$$y = \frac{9}{4}x - 7$$

VIII — Dérivée d'un inverse et d'un quotient

Exercice 30 — Dériver un inverse

On applique $\left(\frac{1}{v}\right)' = -\frac{v'}{v^2}$.

a) $v(x) = 2x + 3, v'(x) = 2 : f'(x) = -\frac{2}{(2x+3)^2}$

b) $v(x) = x^2 + 4, v'(x) = 2x : g'(x) = -\frac{2x}{(x^2+4)^2}$

c) $h(x) = 3 \times \frac{1}{x-1} : h'(x) = 3 \times \left(-\frac{1}{(x-1)^2}\right) = -\frac{3}{(x-1)^2}$

d) $v(x) = x^2 - 2x, v'(x) = 2x - 2 : k'(x) = -\frac{2x-2}{(x^2-2x)^2}$

Exercice 31 — Dériver un quotient

On applique $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$.

a) $u(x) = x + 3, u'(x) = 1; v(x) = x - 2, v'(x) = 1.$

$$f'(x) = \frac{1 \times (x-2) - (x+3) \times 1}{(x-2)^2}$$

$$f'(x) = \frac{x-2-x-3}{(x-2)^2}$$

$$f'(x) = \frac{-5}{(x-2)^2}$$

b) $u(x) = 4x - 1, u'(x) = 4; v(x) = 2x + 1, v'(x) = 2.$

$$g'(x) = \frac{4(2x+1) - (4x-1) \times 2}{(2x+1)^2}$$

$$g'(x) = \frac{8x+4-8x+2}{(2x+1)^2}$$

$$g'(x) = \frac{6}{(2x+1)^2}$$

c) $u(x) = x^2, u'(x) = 2x; v(x) = x - 3, v'(x) = 1.$

$$h'(x) = \frac{2x(x-3) - x^2 \times 1}{(x-3)^2}$$

$$h'(x) = \frac{x^2-6x}{(x-3)^2}$$

d) $u(x) = x^2 - 1, u'(x) = 2x; v(x) = x^2 + 1, v'(x) = 2x.$

$$k'(x) = \frac{2x(x^2+1) - (x^2-1) \times 2x}{(x^2+1)^2}$$

$$k'(x) = \frac{2x^3+2x-2x^3+2x}{(x^2+1)^2}$$

$$k'(x) = \frac{4x}{(x^2+1)^2}$$

→ Le « - » devant uv' change tous les signes : on met uv' entre parenthèses.

Exercice 32 — Entraînement : inverses et quotients

$$\text{a) } v(x) = 3 - x, v'(x) = -1 : f'(x) = -\frac{-1}{(3-x)^2} = \frac{1}{(3-x)^2}$$

$$\text{b) } g(x) = -2 \times \frac{1}{x^2 + x + 1} \text{ et } v'(x) = 2x + 1 : g'(x) = -2 \times \left(-\frac{2x+1}{(x^2+x+1)^2} \right) = \frac{4x+2}{(x^2+x+1)^2}$$

$$\text{c) } u'(x) = 5; v'(x) = 1.$$

$$h'(x) = \frac{5(x-1) - (5x+2)}{(x-1)^2}$$

$$h'(x) = \frac{-7}{(x-1)^2}$$

$$\text{d) } u'(x) = -2; v'(x) = 1.$$

$$k'(x) = \frac{-2(x+3) - (1-2x)}{(x+3)^2}$$

$$k'(x) = \frac{-2x-6-1+2x}{(x+3)^2}$$

$$k'(x) = \frac{-7}{(x+3)^2}$$

$$\text{e) } u(x) = x^2 + 1, u'(x) = 2x; v(x) = x, v'(x) = 1.$$

$$m'(x) = \frac{2x \times x - (x^2 + 1)}{x^2}$$

$$m'(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2}$$

$$\text{f) } u(x) = 3x, u'(x) = 3; v(x) = x^2 + 1, v'(x) = 2x.$$

$$p'(x) = \frac{3(x^2 + 1) - 3x \times 2x}{(x^2 + 1)^2}$$

$$p'(x) = \frac{3 - 3x^2}{(x^2 + 1)^2}$$

$$\text{g) } u(x) = x^2 - 4x, u'(x) = 2x - 4; v(x) = x + 2, v'(x) = 1.$$

$$q'(x) = \frac{(2x-4)(x+2) - (x^2-4x)}{(x+2)^2}$$

$$q'(x) = \frac{2x^2 - 8 - x^2 + 4x}{(x+2)^2} \quad (2x-4)(x+2) = 2x^2 - 8$$

$$q'(x) = \frac{x^2 + 4x - 8}{(x+2)^2}$$

$$\text{h) } u(x) = \sqrt{x}, u'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}; v(x) = x + 1, v'(x) = 1.$$

$$r'(x) = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}(x+1) - \sqrt{x}}{(x+1)^2}$$

$$r'(x) = \frac{(x+1) - 2x}{2\sqrt{x}(x+1)^2} \quad \text{on multiplie en haut et en bas par } 2\sqrt{x}$$

$$r'(x) = \frac{1-x}{2\sqrt{x}(x+1)^2}$$

Exercice 33 — Choisir la bonne formule

- a) Somme : $f'(x) = 12x^3 - 2 \times \left(-\frac{1}{x^2}\right) = 12x^3 + \frac{2}{x^2}$
- b) Produit, avec $u'(x) = 1$ et $v'(x) = 2x$.
 $g'(x) = 1 \times (x^2 + 2) + (x - 1) \times 2x$
 $g'(x) = x^2 + 2 + 2x^2 - 2x$
 $g'(x) = 3x^2 - 2x + 2$
- c) Inverse (multiplié par 4), avec $v'(x) = 2x$: $h'(x) = 4 \times \left(-\frac{2x}{(x^2 + 3)^2}\right) = -\frac{8x}{(x^2 + 3)^2}$
- d) Quotient, avec $u'(x) = 1$ et $v'(x) = 2$.
 $k'(x) = \frac{1 \times (2x + 1) - (x - 4) \times 2}{(2x + 1)^2}$
 $k'(x) = \frac{2x + 1 - 2x + 8}{(2x + 1)^2}$
 $k'(x) = \frac{9}{(2x + 1)^2}$
- e) Produit, avec $u(x) = x^2$ et $v(x) = \sqrt{x}$.
 $m'(x) = 2x\sqrt{x} + x^2 \times \frac{1}{2\sqrt{x}}$
 $m'(x) = 2x\sqrt{x} + \frac{x\sqrt{x}}{2} \quad \frac{x^2}{\sqrt{x}} = x\sqrt{x}$
 $m'(x) = \frac{5}{2}x\sqrt{x}$
- f) Somme : $p'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} + \cos x$

Exercice 34 — Tangentes à une hyperbole

1. $u(x) = 2x - 4$, $u'(x) = 2$; $v(x) = x + 1$, $v'(x) = 1$.
 $f'(x) = \frac{2(x + 1) - (2x - 4) \times 1}{(x + 1)^2}$
 $f'(x) = \frac{2x + 2 - 2x + 4}{(x + 1)^2}$
 $f'(x) = \frac{6}{(x + 1)^2}$
2. $f(x) = 0$ quand $2x - 4 = 0$, soit $x = 2$: $A(2; 0)$. $f'(2) = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$.
 $y = \frac{2}{3}(x - 2) + 0$
 $y = \frac{2}{3}x - \frac{4}{3}$
3. $f(0) = -4$: $B(0; -4)$. $f'(0) = 6$, donc la tangente en B a pour équation $y = 6x - 4$.

Exercice 35 — Deux fonctions, une même dérivée

$$1. f'(x) = \frac{2(x-1) - (2x+1) \times 1}{(x-1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{-3}{(x-1)^2}$$

$$g'(x) = 3 \times \left(-\frac{1}{(x-1)^2} \right)$$

$$g'(x) = \frac{-3}{(x-1)^2}$$

f et g ont la même dérivée.

$$2. f(x) - g(x) = \frac{2x+1-3}{x-1}$$

$$f(x) - g(x) = \frac{2(x-1)}{x-1}$$

$$f(x) - g(x) = 2$$

$f = g + 2$: ajouter une constante ne change pas la dérivée (la dérivée de 2 est 0). Les deux courbes se déduisent l'une de l'autre par une translation verticale : elles ont les mêmes pentes.

IX — Dérivée des fonctions composées**Exercice 36 — Dériver une puissance, une racine**

On applique $(u^2)' = 2u'u$, $(u^n)' = nu'u^{n-1}$ et $(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$.

a) $u(x) = 3x + 1$, $u'(x) = 3$.

$$f'(x) = 2 \times 3 \times (3x + 1)$$

$$f'(x) = 18x + 6$$

b) $u(x) = 1 - 2x$, $u'(x) = -2$.

$$g'(x) = 2 \times (-2) \times (1 - 2x)$$

$$g'(x) = 8x - 4$$

c) $u(x) = x^2 + 3$, $u'(x) = 2x$: $h'(x) = 3 \times 2x \times (x^2 + 3)^2$, soit $h'(x) = 6x(x^2 + 3)^2$.

d) $u(x) = 4x - 1$, $u'(x) = 4$: $k'(x) = 5 \times 4 \times (4x - 1)^4$, soit $k'(x) = 20(4x - 1)^4$.

e) $u(x) = 2x + 6$, $u'(x) = 2$, avec $u(x) > 0$ pour $x > -3$.

$$m'(x) = \frac{2}{2\sqrt{2x+6}}$$

$$m'(x) = \frac{1}{\sqrt{2x+6}} \quad \text{on simplifie par 2}$$

f) $u(x) = x^2 + 4$, $u'(x) = 2x$, avec $u(x) > 0$ sur $\mathbb{R}$.

$$p'(x) = \frac{2x}{2\sqrt{x^2+4}}$$

$$p'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+4}}$$

→ Erreur fréquente : oublier le facteur u' ($2(3x+1)$ au lieu de $6(3x+1)$).

Exercice 37 — Cosinus, sinus et formule générale

1. On applique $(\cos u)' = -u' \sin u$ et $(\sin u)' = u' \cos u$.

a) $u(x) = 3x, u'(x) = 3 : f'(x) = 3 \cos(3x)$.

b) $u(x) = 5x + 1, u'(x) = 5 : g'(x) = -5 \sin(5x + 1)$.

c) $u(x) = x^2, u'(x) = 2x : h'(x) = 2x \cos(x^2)$.

d) $u(x) = 1 - x, u'(x) = -1 : k'(x) = -(-1) \sin(1 - x)$, soit $k'(x) = \sin(1 - x)$.

2. $u(x) = 2x, u'(x) = 2$, et $g'(u(x)) = \frac{1}{1 + (2x)^2}$.

$$f'(x) = 2 \times \frac{1}{1 + (2x)^2} \quad u'(x) \times g'(u(x))$$

$$f'(x) = \frac{2}{1 + 4x^2}$$

Exercice 38 — Composée et tangente

1. $u(x) = x^2 + 9, u'(x) = 2x$, avec $u(x) > 0$ sur $\mathbb{R}$.

$$f'(x) = \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + 9}}$$

$$f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 9}}$$

2. $f(4) = \sqrt{25} = 5$ et $f'(4) = \frac{4}{5} = 0,8$.

3. $y = f'(4)(x - 4) + f(4) :$

$$y = 0,8(x - 4) + 5$$

$$y = 0,8x + 1,8$$

4. Avec $a = 4$ et $h = 0,1 : f(4,1) \simeq 5 + 0,8 \times 0,1 = 5,08$. La calculatrice donne $\sqrt{25,81} = 5,0803 \dots$: juste au centième.

X — Étude des variations d'une fonction**Exercice 39 — Du signe de f' aux variations de f**

1. f' négative : f décroissante ; f' positive : f croissante.

x	-4	-1	3	5	
$f'(x)$	-	0	+	0	-
f	2		4		1

$\swarrow$ $\nearrow$ $\searrow$
 -3

2. f est croissante sur $[-1; 3]$ et $0 < 2$, donc $f(0) \leq f(2)$ (et même $f(0) < f(2)$, car $f'(x) > 0$ entre -1 et 3).

Exercice 40 — Variations de polynômes

a) $f'(x) = 2x - 4$ s'annule en 2 ; $f(2) = 4 - 8 + 7 = 3$.

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
f			

b) $g'(x) = -6x + 12$ s'annule en 2; $g(2) = -12 + 24 - 5 = 7$.

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$g'(x)$	+	0	-
g			

c) $h'(x) = 6x^2 - 6x - 12$

$$\Delta = (-6)^2 - 4 \times 6 \times (-12) = 324 \quad \sqrt{324} = 18$$

$$x_1 = \frac{6-18}{12} = -1$$

$$x_2 = \frac{6+18}{12} = 2$$

$$h(-1) = -2 - 3 + 12 + 1 = 8$$

$$h(2) = 16 - 12 - 24 + 1 = -19$$

$h'(x)$ est du signe de $a = 6$, sauf entre les racines.

x	$-\infty$	-1	2	$+\infty$	
$h'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
h	<				

d) $k'(x) = 3x^2 + 3$: un carré est positif, donc $k'(x) \geq 3 > 0$. k est **strictement croissante** sur $\mathbb{R}$.

Exercice 41 — Variations d'un quotient

1. $u(x) = x^2 + 3$, $u'(x) = 2x$; $v(x) = x + 1$, $v'(x) = 1$.

$$f'(x) = \frac{2x(x+1) - (x^2+3) \times 1}{(x+1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{2x^2 + 2x - x^2 - 3}{(x+1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{x^2 + 2x - 3}{(x+1)^2}$$

2. $(x+1)^2 > 0$: $f'(x)$ a le signe de $x^2 + 2x - 3$, de racines -3 et 1 ($\Delta = 16$). Sur $]-1; +\infty[$, seule la racine 1 compte : $f'(x) < 0$ sur $]-1; 1[$ et $f'(x) > 0$ sur $]1; +\infty[$.

3. $f(1) = \frac{4}{2} = 2$.

x	-1	1	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
f			

Exercice 42 — Lire le signe de la dérivée

1. La courbe descend, monte, descend puis monte ; g' s'annule aux tangentes horizontales.

x	-4	-2	1	3	4
$g'(x)$	-	0	+	0	+

2.

x	-4	-2	1	3	4
g	2	-1	3	1	2

XI — Extremums d'une fonction**Exercice 43 — Lire les extremums**

- Maximum 5, atteint en 1 ; minimum -3, atteint en 4 ($f(-2) = 1$ et $f(6) = 0$ ne les dépassent pas).
- $f'(x) \geq 0$ sur $[-2; 1]$, $f'(x) \leq 0$ sur $[1; 4]$, $f'(x) \geq 0$ sur $[4; 6]$.
- En 1 et en 4, f a un extremum local : la tangente y est horizontale, donc $f'(1) = 0$ et $f'(4) = 0$.

Exercice 44 — Extremums d'un polynôme

1. $f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$

$f'(x) = 3(x^2 - 4x + 3)$ racines 1 et 3 ($\Delta = 4$)

$f(1) = 1 - 6 + 9 + 1 = 5$

$f(3) = 27 - 54 + 27 + 1 = 1$

$f(5) = 125 - 150 + 45 + 1 = 21$

Et $f(0) = 1$.

x	0	1	3	5			
$f'(x)$		+	0	-	0	+	
f	1	$\nearrow$	5	$\searrow$	1	$\nearrow$	21

- Maximum 21, atteint en 5 ; minimum 1, atteint en 0 et en 3.
- Oui : f' s'annule en 1 en passant de $+$ à $-$; f a un maximum local égal à 5 en 1 (ce n'est pas le maximum sur $[0; 5]$).

Exercice 45 — Vrai ou faux

- Faux. Contre-exemple : $f(x) = x^3 - 6x^2 + 12x$; $f'(x) = 3x^2 - 12x + 12 = 3(x - 2)^2$ s'annule en 2 mais reste positive : f est croissante, sans extremum en 2. Il faut que f' change de signe.
- Vrai. $g'(x) = 3x^2 + 1 > 0$: g est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, sans extremum.
- Vrai.

$$h'(x) = 1 - \frac{1}{x^2}$$

$$h'(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2}$$

$$h'(x) = \frac{(x - 1)(x + 1)}{x^2}$$

Sur $]0; +\infty[$, $h'(x)$ a le signe de $x - 1$: h décroît puis croît, et son minimum est

$$h(1) = 1 + 1 = 2.$$

XII — Étude complète d'une fonction

Exercice 46 — Étude d'un polynôme

1. f est un polynôme : elle est **définie et dérivable sur $\mathbb{R}$** , donc sur $[-1; 3]$.

2. $f'(x) = -3x^2 + 6x$

$$f'(x) = -3x(x - 2) \quad \text{racines 0 et 2}$$

3. $f'(x)$ est du signe de $a = -3$ (négatif) à l'extérieur des racines, positif entre elles.

$$f(-1) = 1 + 3 - 1 = 3$$

$$f(0) = -1$$

$$f(2) = -8 + 12 - 1 = 3$$

$$f(3) = -27 + 27 - 1 = -1$$

x	-1	0	2	3			
$f'(x)$	-	0	+	0	-		
f	3	$\searrow$	-1	$\nearrow$	3	$\searrow$	-1

4. Minimum local -1 en 0 et maximum local 3 en 2 (f' s'annule en changeant de signe). Sur $[-1; 3]$: maximum 3 (atteint en -1 et en 2), minimum -1 (atteint en 0 et en 3).

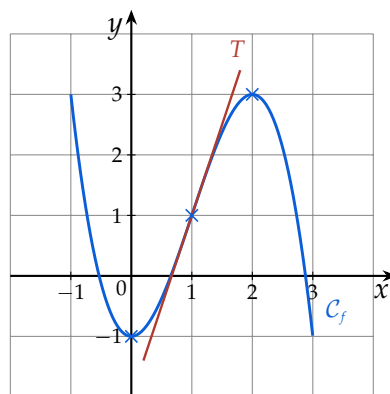
5. $f(1) = -1 + 3 - 1 = 1$ et $f'(1) = -3 + 6 = 3$.

$$y = 3(x - 1) + 1$$

$$y = 3x - 2$$

6.

x	-1	-0,5	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3
$f(x)$	3	-0,125	-1	-0,375	1	2,375	3	2,125	-1



→ En 1, la courbe traverse sa tangente : ce n'est pas une erreur de tracé.

Exercice 47 — Étude d'un quotient défini sur $\mathbb{R}$

1. $x^2 + 2 \geq 2 > 0$: le dénominateur ne s'annule jamais, f est **définie sur $\mathbb{R}$** .

2. $u(x) = 2x + 1$, $u'(x) = 2$; $v(x) = x^2 + 2$, $v'(x) = 2x$.

$$f'(x) = \frac{2(x^2 + 2) - (2x + 1) \times 2x}{(x^2 + 2)^2}$$

$$f'(x) = \frac{2x^2 + 4 - 4x^2 - 2x}{(x^2 + 2)^2}$$

$$f'(x) = \frac{-2x^2 - 2x + 4}{(x^2 + 2)^2}$$

$$f'(x) = \frac{-2(x+2)(x-1)}{(x^2 + 2)^2} \quad x^2 + x - 2 \text{ a pour racines } -2 \text{ et } 1$$

3. Le dénominateur est positif : $f'(x)$ a le signe de $-2x^2 - 2x + 4$, négatif à l'extérieur des racines ($a = -2$), positif entre elles.

$$f(-2) = \frac{-3}{6} = -\frac{1}{2}$$

$$f(1) = \frac{3}{3} = 1$$

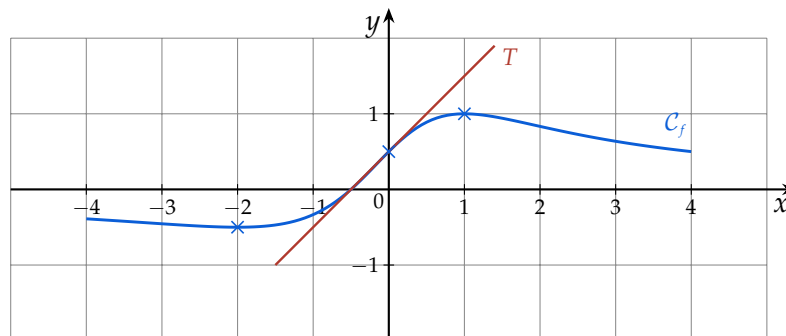
x	$-\infty$	-2	1	$+\infty$	
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
f		$-\frac{1}{2}$	1		

4. Minimum local $-\frac{1}{2}$ en -2 ; maximum local 1 en 1 .

5. $f(0) = \frac{1}{2}$ et $f'(0) = \frac{4}{4} = 1$, donc $y = x + \frac{1}{2}$.

6. Valeurs arrondies au centième :

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$f(x)$	$-0,39$	$-0,45$	$-0,5$	$-0,33$	$0,5$	1	$0,83$	$0,64$	$0,5$



Exercice 48 — Étude d'un quotient avec une valeur interdite

1. Le dénominateur s'annule en 2 : f est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{2\}$.

2. $u(x) = x^2 - 3$, $u'(x) = 2x$; $v(x) = x - 2$, $v'(x) = 1$.

$$f'(x) = \frac{2x(x-2) - (x^2-3) \times 1}{(x-2)^2}$$

$$f'(x) = \frac{2x^2 - 4x - x^2 + 3}{(x-2)^2}$$

$$f'(x) = \frac{x^2 - 4x + 3}{(x-2)^2}$$

$$f'(x) = \frac{(x-1)(x-3)}{(x-2)^2} \quad \text{racines } 1 \text{ et } 3$$

3. $(x-2)^2 > 0$: $f'(x)$ a le signe de $x^2 - 4x + 3$, positif à l'extérieur des racines, négatif entre elles. La double barre marque la valeur interdite 2.

$$f(1) = \frac{-2}{-1} = 2$$

$$f(3) = \frac{6}{1} = 6$$

x	$-\infty$	1	2	3	$+\infty$			
$f'(x)$		+	0	-		-	0	+
f		$\nearrow$ 2 $\searrow$			$\searrow$ 6 $\nearrow$			

4. Maximum local 2 en 1 ; minimum local 6 en 3. Le maximum local est plus petit que le minimum local : c'est possible, car la valeur interdite 2 sépare les deux morceaux de la courbe.
5. $f(0) = \frac{-3}{-2} = \frac{3}{2}$ et $f'(0) = \frac{(-1)(-3)}{4} = \frac{3}{4}$.

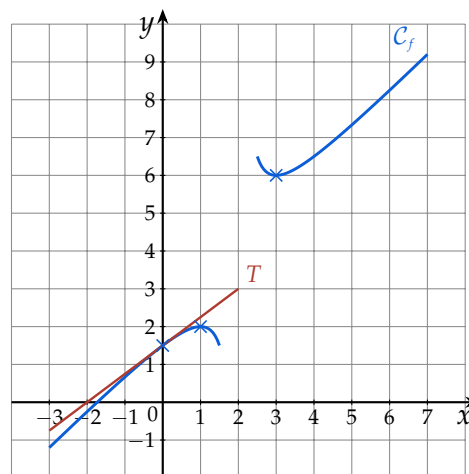
$$y = \frac{3}{4}(x-0) + \frac{3}{2}$$

$$y = \frac{3}{4}x + \frac{3}{2}$$

6. Valeurs arrondies au centième :

x	-3	-2	-1	0	1	1,5
$f(x)$	-1,2	-0,25	0,67	1,5	2	1,5

x	2,5	3	4	5	6	7
$f(x)$	6,5	6	6,5	7,33	8,25	9,2



→ On ne relie jamais les deux morceaux de la courbe : f n'existe pas en 2.

XIII — Problèmes concrets

Exercice 49 — Le vol d'une montgolfière

- $f(0) = \frac{6}{1} = 6$: le village est à 600 m d'altitude.
- $u(t) = 8t + 6$, $u'(t) = 8$; $v(t) = t^2 + 1$, $v'(t) = 2t$.

$$f'(t) = \frac{8(t^2 + 1) - (8t + 6) \times 2t}{(t^2 + 1)^2}$$

$$f'(t) = \frac{8t^2 + 8 - 16t^2 - 12t}{(t^2 + 1)^2}$$

$$f'(t) = \frac{-8t^2 - 12t + 8}{(t^2 + 1)^2}$$

$$f'(t) = \frac{-4(2t^2 + 3t - 2)}{(t^2 + 1)^2} \quad \text{on factorise par } -4$$

$$f'(t) = \frac{-4(2t - 1)(t + 2)}{(t^2 + 1)^2} \quad (2t - 1)(t + 2) = 2t^2 + 3t - 2$$

3. Sur $[0; 5]$, $(t^2 + 1)^2 > 0$ et $t + 2 > 0$: $f'(t)$ a le signe de $-4(2t - 1)$, positif pour $t < 0,5$, négatif après.

$$f(0,5) = \frac{4 + 6}{1,25} = 8$$

$$f(5) = \frac{46}{26} = \frac{23}{13} \quad \text{environ } 1,8$$

t	0	0,5	5		
$f'(t)$		+	0	-	
f	6	$\nearrow$	8	$\searrow$	$\frac{23}{13}$

4. 0,5 h = 30 min : la montgolfière commence à descendre à **11 h 20**, à **800 m** d'altitude.
 5. On résout $f(t) = 6$ avec $t > 0$:

$$8t + 6 = 6(t^2 + 1) \quad \text{on multiplie par } t^2 + 1 > 0$$

$$6t^2 - 8t = 0$$

$$2t(3t - 4) = 0$$

$$t = \frac{4}{3} \text{ h, soit } 1 \text{ h } 20 \text{ min : elle revient à l'altitude du village à } \mathbf{12 \text{ h } 10}.$$

Exercice 50 — Des bactéries et un antibiotique

1. $N(0) = 10$: il y a **10 000** bactéries au départ.
 2. $N'(t) = 3t^2 - 24t + 36$
 $3(t - 2)(t - 6) = 3(t^2 - 8t + 12)$
 $3(t - 2)(t - 6) = 3t^2 - 24t + 36 \quad \text{on retrouve } N'(t)$
 3. $N'(t)$ est du signe de 3 à l'extérieur des racines 2 et 6, négatif entre elles.

$$N(2) = 8 - 48 + 72 + 10 = 42$$

$$N(6) = 216 - 432 + 216 + 10 = 10$$

$$N(8) = 512 - 768 + 288 + 10 = 42$$

t	0	2	6	8		
$N'(t)$		+	0	-	0	+
N	10	$\nearrow$ 42 $\searrow$	10	$\nearrow$ 42 $\searrow$		

4. $N'(0) = 36$: au départ, la population augmente de **36 000** bactéries par heure.

$N'(4) = 3 \times 2 \times (-2) = -12$: à $t = 4$, elle diminue de 12 000 bactéries par heure.

5. $t(t-6)^2 = t(t^2 - 12t + 36)$

$t(t-6)^2 = t^3 - 12t^2 + 36t$ c'est $N(t) - 10$

Sur $[0; 8]$, $t \geq 0$ et $(t-6)^2 \geq 0$, donc $N(t) - 10 \geq 0$: **non**, le nombre de bactéries ne descend jamais sous 10 000 (il y revient à $t = 6$).

Exercice 51 — Le coût moyen d'un artisan

1. $M(10) = 10 + 40 = 50$: pour 10 lampes, une lampe coûte en moyenne 50 €.

2. $M'(x) = 1 - \frac{400}{x^2}$

$M'(x) = \frac{x^2 - 400}{x^2}$ même dénominateur

$M'(x) = \frac{(x-20)(x+20)}{x^2}$ $x^2 - 400 = (x-20)(x+20)$

3. Sur $[5; 50]$, $x^2 > 0$ et $x + 20 > 0$: $M'(x)$ a le signe de $x - 20$.

$M(5) = 5 + 80 = 85$

$M(20) = 20 + 20 = 40$

$M(50) = 50 + 8 = 58$

x	5	20	50
$M'(x)$	-	0	+
M	85	40	58

Il faut fabriquer 20 lampes ; le coût moyen est alors de 40 €.

4. On résout $M(x) \leq 50$:

$x + \frac{400}{x} \leq 50$

$x^2 + 400 \leq 50x$ on multiplie par $x > 0$

$x^2 - 50x + 400 \leq 0$

$\Delta = 2500 - 1600 = 900$

$x_1 = \frac{50 - 30}{2} = 10$

$x_2 = \frac{50 + 30}{2} = 40$

Le trinôme est négatif entre ses racines : $M(x) \leq 50$ pour $10 \leq x \leq 40$. L'affirmation est **vraie**.

5. $M'(10) = \frac{(-10) \times 30}{100} = -3$: la tangente a pour coefficient directeur -3 , et la droite -2 .

L'affirmation est **fausse**.