

DÉRIVATION

Cours — Première spécialité

Comment utiliser ce cours

Chaque partie commence par ce qu'il faut **savoir** (définitions, théorèmes), puis vient ce qu'il faut **savoir faire** : une méthode, avec des **exemples corrigés** faits en classe, puis des exercices « **À vous de jouer** » à chercher seul.

I — Limite en zéro d'une fonction

Exemple — S'approcher d'une valeur interdite

Certaines fonctions ne se calculent pas en 0 : 0 est une **valeur interdite**. C'est le cas de

$$f(x) = \frac{x^2 + 2x}{x},$$

car on ne peut pas diviser par 0. On peut pourtant calculer $f(x)$ pour des valeurs de x de plus en plus proches de 0 :

x	-0,1	-0,01	-0,001	0	0,001	0,01	0,1
$f(x)$	1,9	1,99	1,999	interdit	2,001	2,01	2,1

Quand x s'approche de 0, $f(x)$ s'approche de 2.

Définition 1 — Limite en zéro

Si $f(x)$ s'approche d'un nombre L quand x s'approche de 0, on écrit

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = L$$

et on lit « la limite de $f(x)$ quand x tend vers 0 est L ». Dans l'exemple, $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 2$.

Méthode 1 — Calculer une limite en zéro

Exemples corrigés

Calculer la limite en 0 de chaque fonction.

a) $f(x) = \frac{x^2 + 2x}{x}$ (l'exemple ci-dessus)

b) $g(x) = \frac{3x^2 + 5x}{x}$

c) $h(x) = \frac{(2+x)^2 - 4}{x}$

a)

$$f(x) = \frac{x^2 + 2x}{x}$$

on recopie l'expression

$$f(x) = \frac{\cancel{x}(x+2)}{\cancel{x}}$$

on factorise le numérateur par x

$$f(x) = x + 2$$

on simplifie : $x \neq 0$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 2$$

on remplace x par 0 dans $x + 2$

b)

$$g(x) = \frac{3x^2 + 5x}{x}$$

$$g(x) = \frac{\cancel{x}(3x + 5)}{\cancel{x}}$$

$$g(x) = 3x + 5$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 5 \quad 3x \text{ tend vers } 0$$

c)

$$h(x) = \frac{(2+x)^2 - 4}{x}$$

$$h(x) = \frac{4 + 4x + x^2 - 4}{x} \quad \text{identité remarquable}$$

$$h(x) = \frac{\cancel{x}(4+x)}{\cancel{x}} \quad 4 \text{ et } -4 \text{ s'annulent}$$

$$h(x) = 4 + x$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} h(x) = 4$$

À vous de jouer

Calculer la limite en 0 de chaque fonction :

$$k(x) = \frac{x^2 + 7x}{x} \quad m(x) = \frac{5x^2 - 2x}{x} \quad p(x) = \frac{(3+x)^2 - 9}{x}$$

Réponses : $k(x) = x + 7$, limite 7 ; $m(x) = 5x - 2$, limite -2 ; $p(x) = 6 + x$, limite 6.

► **À faire** : fiche d'exercices du chapitre, exercices 1 à 4.

II — Nombre dérivé

Définition 2 — Nombre dérivé

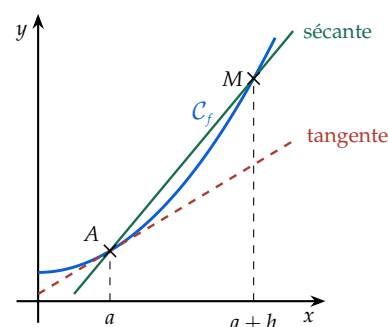
Soit $h \neq 0$. Le taux de variation de f entre a et $a + h$ est

$$T(h) = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

C'est le coefficient directeur de la sécante (AM) (ch. 2).

Si $T(h)$ s'approche d'un nombre quand h tend vers 0 (partie I), on dit que f est **dérivable en a** . Cette limite est le **nombre dérivé** de f en a , noté $f'(a)$:

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$



Quand h tend vers 0, M glisse vers A : la sécante tourne et se rapproche de la **tangente** en A .

Méthode 2 — Calculer un nombre dérivé par la définition

Exemples corrigés

a) $f(x) = x^2 + 3x$: calculer $f'(1)$.

b) $g(x) = \frac{1}{x}$: calculer $g'(2)$.

a)

$$f(1) = 1 + 3$$

on calcule d'abord $f(a)$

$$f(1) = 4$$

$$f(1+h) = (1+h)^2 + 3(1+h)$$

on remplace x par $1+h$

$$f(1+h) = 1 + 2h + h^2 + 3 + 3h$$

$$f(1+h) = h^2 + 5h + 4$$

$$T(h) = \frac{h^2 + 5h + 4 - 4}{h}$$

$$T(h) = \frac{f(1+h) - f(1)}{h}$$

$$T(h) = \frac{\cancel{h}(h+5)}{\cancel{h}}$$

$$T(h) = h + 5$$

$$f'(1) = \lim_{h \rightarrow 0} (h + 5)$$

 $f'(1)$ est la limite de $T(h)$ quand h tend vers 0

$$f'(1) = 5$$

on remplace h par 0 dans $h + 5$ **b)**

$$g(2+h) - g(2) = \frac{1}{2+h} - \frac{1}{2}$$

on calcule d'abord la différence

$$g(2+h) - g(2) = \frac{1 \times \cancel{2}}{(2+h) \times \cancel{2}} - \frac{1 \times (2+h)}{2 \times (2+h)}$$

même dénominateur

$$g(2+h) - g(2) = \frac{2 - 2 - h}{2(2+h)}$$

$$g(2+h) - g(2) = \frac{-h}{2(2+h)}$$

$$T(h) = \frac{-\cancel{h}}{2(2+h)} \times \frac{1}{\cancel{h}}$$

diviser par h , c'est multiplier par $\frac{1}{h}$

$$T(h) = \frac{-1}{2(2+h)}$$

$$g'(2) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-1}{2(2+h)}$$

$$g'(2) = -\frac{1}{4}$$

 $2+h$ tend vers 2**À vous de jouer**1°) $h(x) = x^2 - 4x$: calculer $h'(3)$.2°) $k(x) = 2x^2 + 1$: calculer $k'(-1)$.3°) $m(x) = \frac{1}{x}$: calculer $m'(1)$.Réponses : 1°) $T(h) = h + 2$, $h'(3) = 2$; 2°) $T(h) = 2h - 4$, $k'(-1) = -4$; 3°) $T(h) = \frac{-1}{1+h}$, $m'(1) = -1$.► **À faire** : fiche d'exercices du chapitre, exercices 5 à 8.**Une fonction qui n'est pas dérivable**

Pour la valeur absolue $f(x) = |x|$ en 0 : $T(h) = \frac{|h|}{h}$ vaut 1 si $h > 0$ et -1 si $h < 0$. $T(h)$ ne se rapproche pas d'un seul nombre : f n'est **pas dérivable** en 0. Sa courbe y fait une pointe, sans tangente.

III — Tangente à une courbe

Définition 3 — Tangente

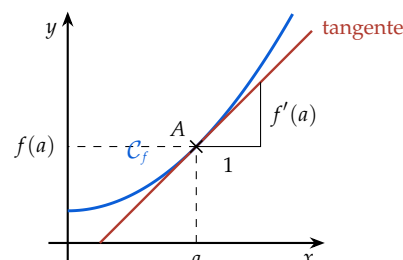
Soit f dérivable en a et $A(a; f(a))$ le point de $\mathcal{C}_f$ d'abscisse a . La **tangente** à $\mathcal{C}_f$ en A est la droite qui passe par A et dont le coefficient directeur est $f'(a)$.

Propriété 1 — Équation de la tangente

La tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse a a pour équation

$$y = f'(a)(x - a) + f(a).$$

Elle passe par $A(a; f(a))$; quand on avance de 1, elle monte de $f'(a)$.



Démonstration. La tangente a pour coefficient directeur $f'(a)$ et passe par A .

$$y = f'(a)x + p$$

équation d'une droite de coefficient directeur $f'(a)$

$$f(a) = f'(a) \times a + p$$

$A(a; f(a))$ est sur la droite

$$p = f(a) - f'(a) \times a$$

on isole p

$$y = f'(a)x - f'(a) \times a + f(a)$$

on remplace p dans l'équation

$$y = f'(a)(x - a) + f(a)$$

on factorise par $f'(a)$

Méthode 3 — Lire un nombre dérivé sur un graphique

On a tracé la courbe $\mathcal{C}_f$ d'une fonction f et quatre de ses tangentes.

Exemples corrigés

Lire $f'(-2)$ et $f'(0)$.

À vous de jouer

Lire $f(-4)$, $f'(-4)$, puis $f(3)$ et $f'(3)$.

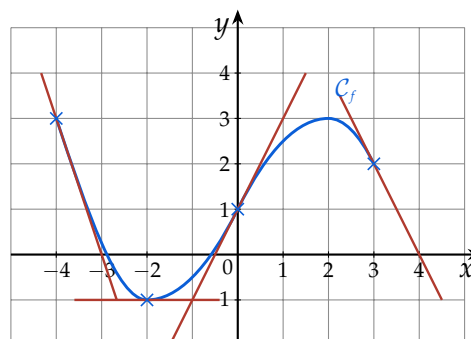
Réponses : $f(-4) = 3$ et $f'(-4) = -3$; $f(3) = 2$ et $f'(3) = -2$.

$$f'(-2)$$

La tangente en -2 est horizontale : $f'(-2) = 0$.

$$f'(0)$$

La tangente passe par $(0; 1)$ et $(1; 3)$: quand on avance de 1, elle monte de 2. Donc $f'(0) = 2$.



une droite horizontale a un coefficient directeur nul

coefficient directeur = $\frac{\text{montée}}{\text{avancée}}$; une descente compte en négatif

Méthode 4 — Déterminer une équation de la tangente

Exemples corrigés

a) $f(x) = x^2 - 2x + 3$: calculer $f'(2)$, puis une équation de la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 2.

b) $g(x) = \frac{1}{x}$: on a vu que $g'(2) = -\frac{1}{4}$ (méthode 2). Donner une équation de la tangente à $\mathcal{C}_g$ au point d'abscisse 2.

a)

$$f(2) = 4 - 4 + 3$$

$$f(2) = 3$$

$$f(2+h) = (2+h)^2 - 2(2+h) + 3$$

$$f(2+h) = h^2 + 2h + 3 \qquad 4 + 4h + h^2 - 4 - 2h + 3$$

$$T(h) = \frac{h^2 + 2h}{h} \qquad f(2+h) - f(2), \text{ divisé par } h$$

$$T(h) = h + 2$$

$$f'(2) = \lim_{h \rightarrow 0} (h + 2)$$

$$f'(2) = 2$$

$$y = f'(2)(x - 2) + f(2) \qquad \text{on recopie la formule}$$

$$y = 2(x - 2) + 3$$

$$y = 2x - 1$$

b)

$$g(2) = \frac{1}{2}$$

$$y = g'(2)(x - 2) + g(2)$$

$$y = -\frac{1}{4}(x - 2) + \frac{1}{2}$$

$$y = -\frac{1}{4}x + 1 \qquad \frac{2}{4} + \frac{1}{2} = 1$$

À vous de jouer

Avec les nombres dérivés déjà calculés à la méthode 2, donner une équation de la tangente :

1°) à la courbe de $f(x) = x^2 + 3x$ au point d'abscisse 1 ;

2°) à la courbe de $h(x) = x^2 - 4x$ au point d'abscisse 3.

Réponses : 1°) $y = 5(x - 1) + 4$, soit $y = 5x - 1$; 2°) $y = 2(x - 3) - 3$, soit $y = 2x - 9$.

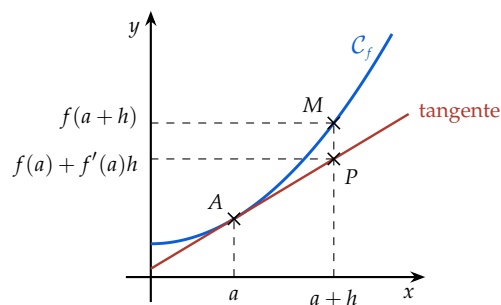
► **À faire** : fiche d'exercices du chapitre, exercices 9 à 12.

IV — Approximation linéaire**Propriété 2 — Approximation linéaire**

Si f est dérivable en a , alors, pour h proche de 0 :

$$f(a+h) \simeq f(a) + f'(a) \times h.$$

Près de A , la courbe et sa tangente se confondent presque : on remplace l'ordonnée $f(a+h)$ du point M de la courbe par l'ordonnée $f(a) + f'(a) \times h$ du point P de la tangente. Plus h est petit, plus l'écart MP est petit. C'est l'équation de la tangente (propriété 1), avec $x = a + h$.



Méthode 5 — Calculer une valeur approchée

Exemples corrigés

- a) $f(x) = x^2$: calculer $f'(5)$ par le taux d'accroissement, puis donner une valeur approchée de $5,03^2$ sans calculatrice.
- b) Un loyer augmente de 2 % par an pendant 3 ans : il est multiplié par $1,02^3$. Avec $g(x) = x^3$, calculer $g'(1)$ par le taux d'accroissement, puis donner une valeur approchée de $1,02^3$ et le pourcentage d'augmentation sur les 3 ans.

a)

Nombre dérivé en 5 :

méthode 2

$$f(5) = 25$$

$$f(5+h) = 25 + 10h + h^2 \quad (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$T(h) = \frac{10h + h^2}{h} \quad T(h) = \frac{f(5+h) - f(5)}{h}$$

$$T(h) = 10 + h \quad \text{on simplifie par } h$$

$$f'(5) = 10 \quad \text{limite quand } h \text{ tend vers } 0$$

Valeur approchée, avec $a = 5$ et $h = 0,03$: a proche, où $f(a)$ se calcule de tête

$$f(5 + 0,03) \simeq f(5) + f'(5) \times 0,03 \quad \text{on recopie la formule}$$

$$5,03^2 \simeq 25 + 10 \times 0,03$$

$$5,03^2 \simeq 25,3 \quad \text{la calculatrice donne } 25,3009$$

b)

Nombre dérivé en 1 :

$$(1+h)^3 = (1+h)^2(1+h)$$

$$g(1) = 1$$

$$g(1+h) = (1+2h+h^2)(1+h)$$

$$g(1+h) = 1 + 3h + 3h^2 + h^3 \quad \text{on développe}$$

$$T(h) = \frac{3h + 3h^2 + h^3}{h}$$

$$T(h) = 3 + 3h + h^2 \quad \text{on simplifie par } h$$

$$g'(1) = 3 \quad \text{limite quand } h \text{ tend vers } 0$$

Valeur approchée, avec $a = 1$ et $h = 0,02$:

$$g(1 + 0,02) \simeq g(1) + g'(1) \times 0,02 \quad \text{on recopie la formule}$$

$$1,02^3 \simeq 1 + 3 \times 0,02$$

$$1,02^3 \simeq 1,06 \quad \text{la calculatrice donne } 1,061208$$

Le loyer augmente d'environ 6 % en 3 ans.

à peine plus que 3×2 %

À vous de jouer

- 1°) $f(x) = x^2$: calculer $f'(4)$ par le taux d'accroissement, puis donner une valeur approchée de $4,01^2$ sans calculatrice.
- 2°) Un abonnement augmente de 4 % par an pendant 2 ans : il est multiplié par $1,04^2$. Avec $g(x) = x^2$, calculer $g'(1)$ par le taux d'accroissement, puis donner une valeur approchée de $1,04^2$ et le pourcentage d'augmentation sur les 2 ans.

Réponses : 1°) $f'(4) = 8$; $4,01^2 \simeq 16 + 8 \times 0,01 = 16,08$; 2°) $g'(1) = 2$; $1,04^2 \simeq 1 + 2 \times 0,04 = 1,08$: environ +8 %.

► **À faire** : fiche d'exercices du chapitre, exercices 13 à 15.

V — Dérivées des fonctions polynômes

Définition 4 — Fonction dérivée

Si f est dérivable en tout nombre x d'un intervalle I , on dit que f est **dérivable sur I** . La fonction qui à x associe $f'(x)$ est la **fonction dérivée** de f , notée f' .

Elle **généralise le nombre dérivé** : au lieu de refaire le calcul de limite pour chaque nombre a , on le fait une fois pour un x quelconque. La fonction f' donne alors le nombre dérivé en **tout** x de I : il suffit de remplacer x par a pour obtenir $f'(a)$. Par exemple, si $f'(x) = 2x$, alors $f'(3) = 6$ et $f'(-1) = -2$.

Propriété 3 — Dérivée de la fonction carré

Si $f(x) = x^2$, alors $f'(x) = 2x$ pour tout réel x .

Démonstration. Pour un réel a et $h \neq 0$:

$$T(h) = \frac{(a+h)^2 - a^2}{h}$$

$$T(h) = \frac{a^2 + 2ah + h^2 - a^2}{h}$$

$$T(h) = \frac{\cancel{h}(2a + h)}{\cancel{h}}$$

$$T(h) = 2a + h$$

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} (2a + h)$$

$$f'(a) = 2a \quad h \text{ tend vers } 0$$

Propriété 4 — Dérivées des polynômes (admis)

$f(x)$	$f'(x)$
k (constante)	0
$mx + p$	m
x^2	$2x$
x^3	$3x^2$
x^n ($n \geq 1$ entier)	nx^{n-1}

Un polynôme se dérive **terme à terme**, et un coefficient se garde : la dérivée de kx^n est $k \times nx^{n-1}$.

Méthode 6 — Dériver un polynôme

Exemples corrigés

Calculer la dérivée de chaque fonction.

a) $f(x) = 4x^3 - 5x^2 + 2x - 7$

b) $g(x) = x^5 - 3x^4$

c) $h(x) = \frac{1}{3}x^3 + 2x^2 - x$

d) $k(x) = (2x + 1)^2$

a)

$$f'(x) = 4 \times 3x^2 - 5 \times 2x + 2 \quad x^3 \text{ donne } 3x^2; 2x \text{ donne } 2; -7 \text{ donne } 0$$

$$f'(x) = 12x^2 - 10x + 2$$

b)

$$g'(x) = 5x^4 - 3 \times 4x^3 \quad x^n \text{ donne } nx^{n-1}$$

$$g'(x) = 5x^4 - 12x^3$$

c)

$$h'(x) = \frac{1}{3} \times 3x^2 + 2 \times 2x - 1$$

$$h'(x) = x^2 + 4x - 1$$

d)

$$k(x) = 4x^2 + 4x + 1 \quad \text{on développe d'abord}$$

$$k'(x) = 8x + 4$$

À vous de jouer

Calculer la dérivée de chaque fonction :

$$f(x) = 2x^3 + x^2 - 6x + 1 \quad g(x) = -x^4 + 5x \quad h(x) = \frac{1}{2}x^4 - \frac{2}{3}x^3 \quad k(x) = (x-3)^2$$

Réponses : $f'(x) = 6x^2 + 2x - 6$; $g'(x) = -4x^3 + 5$; $h'(x) = 2x^3 - 2x^2$; $k'(x) = 2x - 6$.

► **À faire** : fiche d'exercices du chapitre, exercices 16 à 20.**VI — Dérivées des autres fonctions de référence****Propriété 5 — Inverse, puissances inverses, racine carrée, cosinus, sinus**

$f(x)$	$f'(x)$	f est dérivable sur
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$	$] -\infty; 0[$ et $] 0; +\infty[$
$\frac{1}{x^n}$ ($n \geq 1$ entier)	$-\frac{n}{x^{n+1}}$	$] -\infty; 0[$ et $] 0; +\infty[$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$] 0; +\infty[$
$\cos x$	$-\sin x$	$\mathbb{R}$
$\sin x$	$\cos x$	$\mathbb{R}$

Les dérivées de $\frac{1}{x^n}$, de la racine carrée, du cosinus et du sinus sont admises; les fonctions cosinus et sinus seront étudiées au chapitre 9.

Démonstration pour l'inverse

On reprend la méthode 2 avec un nombre $a \neq 0$ quelconque. Pour $f(x) = \frac{1}{x}$ et $h \neq 0$, on calcule d'abord la

différence $f(a+h) - f(a)$, puis on divise par h .

$$f(a+h) - f(a) = \frac{1}{a+h} - \frac{1}{a}$$

on recopie la différence

$$f(a+h) - f(a) = \frac{1 \times a}{(a+h) \times a} - \frac{1 \times (a+h)}{a \times (a+h)}$$

même dénominateur

$$f(a+h) - f(a) = \frac{a - a - h}{a(a+h)}$$

$$f(a+h) - f(a) = \frac{-h}{a(a+h)}$$

$$T(h) = \frac{-\cancel{h}}{a(a+h)} \times \frac{1}{\cancel{h}}$$

diviser par h , c'est multiplier par $\frac{1}{h}$

$$T(h) = \frac{-1}{a(a+h)}$$

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-1}{a(a+h)}$$

$$f'(a) = -\frac{1}{a^2}$$

$a+h$ tend vers a

Méthode 7 — Utiliser les dérivées de référence

Exemples corrigés

a) $f(x) = \frac{1}{x}$: calculer $f'(-2)$.

b) $g(x) = \sqrt{x}$: calculer $g'(9)$.

c) Calculer la dérivée de $h(x) = \frac{5}{x}$, puis de $k(x) = 4\sqrt{x}$.

d) Calculer la dérivée de $m(x) = \frac{1}{x^3}$, puis de $p(x) = \frac{2}{x^4}$.

e) Calculer la dérivée de $q(x) = 3 \sin x$, puis de $r(x) = -2 \cos x$.

a)

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2} \quad \text{on écrit d'abord la dérivée}$$

$$f'(-2) = -\frac{1}{(-2)^2} \quad \text{puis on remplace } x$$

$$f'(-2) = -\frac{1}{4}$$

b)

$$g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$g'(9) = \frac{1}{2 \times 3} \quad \sqrt{9} = 3$$

$$g'(9) = \frac{1}{6}$$

c)

$$h(x) = 5 \times \frac{1}{x} \quad \text{le coefficient 5 se garde}$$

$$h'(x) = 5 \times \left(-\frac{1}{x^2}\right)$$

$$h'(x) = -\frac{5}{x^2}$$

$$k'(x) = 4 \times \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$k'(x) = \frac{2}{\sqrt{x}} \quad \text{on simplifie par 2}$$

d)

$$m'(x) = -\frac{3}{x^4} \quad \frac{1}{x^n} \text{ donne } -\frac{n}{x^{n+1}}, \text{ avec } n = 3$$

$$p(x) = 2 \times \frac{1}{x^4} \quad \text{le coefficient 2 se garde}$$

$$p'(x) = 2 \times \left(-\frac{4}{x^5}\right)$$

$$p'(x) = -\frac{8}{x^5}$$

e)

$$q'(x) = 3 \cos x \quad \sin x \text{ donne } \cos x$$

$$r'(x) = -2 \times (-\sin x) \quad \cos x \text{ donne } -\sin x$$

$$r'(x) = 2 \sin x \quad \text{les deux signes « - » donnent « + »}$$

À vous de jouer

1°) $f(x) = \frac{1}{x}$: calculer $f'(4)$. $g(x) = \sqrt{x}$: calculer $g'(25)$.

2°) Calculer la dérivée de chaque fonction : $h(x) = -\frac{2}{x}$ $k(x) = 6\sqrt{x}$ $m(x) = \frac{1}{x^2}$ $p(x) = \frac{3}{x^5}$.

3°) Calculer la dérivée de chaque fonction : $q(x) = 4 \cos x$ $r(x) = -5 \sin x$.

Réponses : 1°) $f'(4) = -\frac{1}{16}$ et $g'(25) = \frac{1}{10}$; 2°) $h'(x) = \frac{2}{x^2}$; $k'(x) = \frac{3}{\sqrt{x}}$; $m'(x) = -\frac{2}{x^3}$; $p'(x) = -\frac{15}{x^6}$; 3°) $q'(x) = -4 \sin x$; $r'(x) = -5 \cos x$.

► **À faire** : fiche d'exercices du chapitre, exercices 21 à 24.

VII — Dérivée d'une somme et d'un produit

Propriété 6 — Somme, produit par un nombre, produit

u et v sont deux fonctions dérivables sur un intervalle I , et k un nombre réel.

fonction	dérivée
$u + v$	$u' + v'$
ku	ku'
uv	$u'v + uv'$

Attention : la dérivée d'un produit n'est **pas** le produit des dérivées.

Démonstration pour le produit

Pour $h \neq 0$, on enlève et on ajoute $u(a) v(a+h)$ au numérateur :

$$T(h) = \frac{u(a+h) v(a+h) - u(a) v(a)}{h}$$

$$T(h) = \frac{u(a+h) v(a+h) - u(a) v(a+h) + u(a) v(a+h) - u(a) v(a)}{h}$$

$$T(h) = \frac{u(a+h) - u(a)}{h} \times v(a+h) + u(a) \times \frac{v(a+h) - v(a)}{h}$$

$$(uv)'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} T(h)$$

$$(uv)'(a) = u'(a) v(a) + u(a) v'(a)$$

En effet, quand h tend vers 0, les deux quotients tendent vers $u'(a)$ et $v'(a)$, et $v(a+h)$ tend vers $v(a)$ (admis).

Méthode 8 — Dériver une somme, un produit

Exemples corrigés

Calculer la dérivée de chaque fonction.

a) $f(x) = x^2 + \frac{1}{x}$

b) $g(x) = 3x - 4\sqrt{x}$

c) $h(x) = (2x+1)(x^2-3)$

d) $k(x) = x\sqrt{x}$ sur $]0; +\infty[$

e) $m(x) = x \cos x$

a)

$$f'(x) = 2x + \left(-\frac{1}{x^2}\right) \quad \text{somme : on dérive chaque terme}$$

$$f'(x) = 2x - \frac{1}{x^2}$$

b)

$$g'(x) = 3 - 4 \times \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$g'(x) = 3 - \frac{2}{\sqrt{x}}$$

c)

$$u(x) = 2x + 1$$

on nomme les deux facteurs

$$u'(x) = 2$$

$$v(x) = x^2 - 3$$

$$v'(x) = 2x$$

$$h'(x) = 2(x^2 - 3) + (2x + 1) \times 2x \quad u'v + uv'$$

$$h'(x) = 2x^2 - 6 + 4x^2 + 2x$$

$$h'(x) = 6x^2 + 2x - 6$$

d)

$$u(x) = x$$

$$u'(x) = 1$$

$$v(x) = \sqrt{x}$$

$$v'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$k'(x) = 1 \times \sqrt{x} + x \times \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$k'(x) = \sqrt{x} + \frac{\sqrt{x}}{2}$$

$$\frac{x}{\sqrt{x}} = \sqrt{x}, \text{ car } x = \sqrt{x} \times \sqrt{x}$$

$$k'(x) = \frac{3}{2}\sqrt{x}$$

e)

$$u(x) = x$$

$$u'(x) = 1$$

$$v(x) = \cos x$$

$$v'(x) = -\sin x$$

$$m'(x) = 1 \times \cos x + x \times (-\sin x)$$

$$u'v + uv'$$

$$m'(x) = \cos x - x \sin x$$

À vous de jouer

Calculer la dérivée de chaque fonction :

$$f(x) = x^3 - \frac{2}{x} \quad g(x) = 5x^2 + 2\sqrt{x} \quad h(x) = (x-4)(3x+2)$$

$$k(x) = (x^2+1)\sqrt{x} \quad m(x) = x^2 + \sin x \quad p(x) = x \sin x$$

Réponses : $f'(x) = 3x^2 + \frac{2}{x^2}$; $g'(x) = 10x + \frac{1}{\sqrt{x}}$; $h'(x) = (3x+2) + 3(x-4) = 6x-10$; $k'(x) = 2x\sqrt{x} + \frac{x^2+1}{2\sqrt{x}}$; $m'(x) = 2x + \cos x$; $p'(x) = \sin x + x \cos x$.

► **À faire** : fiche d'exercices du chapitre, exercices 25 à 29.

VIII — Dérivée d'un inverse et d'un quotient

Propriété 7 — Inverse et quotient

u et v sont deux fonctions dérivables sur un intervalle I , et v ne s'annule pas sur I .

fonction	dérivée
$\frac{1}{v}$	$-\frac{v'}{v^2}$
$\frac{u}{v}$	$\frac{u'v - uv'}{v^2}$

Méthode 9 — Dériver un inverse, un quotient

Exemples corrigés

Calculer la dérivée de chaque fonction, là où elle est définie.

a) $f(x) = \frac{1}{4x-3}$

b) $g(x) = \frac{1}{x^2+1}$

$$\text{c) } h(x) = \frac{2x+1}{x-3}$$

$$\text{d) } k(x) = \frac{x^2}{x+1}$$

a)

$$v(x) = 4x - 3 \quad v'(x) = 4$$

$$f'(x) = -\frac{4}{(4x-3)^2} \quad -\frac{v'}{v^2}$$

b)

$$v(x) = x^2 + 1 \quad v'(x) = 2x$$

$$g'(x) = -\frac{2x}{(x^2+1)^2}$$

c)

$$u(x) = 2x + 1 \quad u'(x) = 2$$

$$v(x) = x - 3 \quad v'(x) = 1$$

$$h'(x) = \frac{2(x-3) - (2x+1) \times 1}{(x-3)^2} \quad \frac{u'v - uv'}{v^2} : \text{le dénominateur reste au carré}$$

$$h'(x) = \frac{2x - 6 - 2x - 1}{(x-3)^2} \quad \text{le « - » change les signes de } uv'$$

$$h'(x) = \frac{-7}{(x-3)^2}$$

d)

$$u(x) = x^2 \quad u'(x) = 2x$$

$$v(x) = x + 1 \quad v'(x) = 1$$

$$k'(x) = \frac{2x(x+1) - x^2 \times 1}{(x+1)^2}$$

$$k'(x) = \frac{x^2 + 2x}{(x+1)^2} \quad 2x^2 + 2x - x^2$$

À vous de jouer

Calculer la dérivée de chaque fonction :

$$f(x) = \frac{1}{5x+2} \quad g(x) = \frac{1}{x^2-4x} \quad h(x) = \frac{3x-1}{x+2} \quad k(x) = \frac{x^2+3}{x}$$

$$\text{Réponses : } f'(x) = -\frac{5}{(5x+2)^2}; \quad g'(x) = -\frac{2x-4}{(x^2-4x)^2}; \quad h'(x) = \frac{7}{(x+2)^2}; \quad k'(x) = \frac{x^2-3}{x^2}.$$

► **À faire :** fiche d'exercices du chapitre, exercices 30 à 35.

IX — Dérivée des fonctions composées

Propriété 8 — Dérivée d'une composée (admis)

u est une fonction dérivable sur un intervalle I , et $n \geq 2$ un entier.

fonction	dérivée
u^2	$2u'u$
u^n	$nu'u^{n-1}$
$\frac{1}{u}$	$-\frac{u'}{u^2}$
$\sqrt{u}$	$\frac{u'}{2\sqrt{u}}$
$\cos u$	$-u' \sin u$
$\sin u$	$u' \cos u$

Pour $1/u$, u ne s'annule pas sur I (c'est la formule de la partie VIII); pour $\sqrt{u}$, $u > 0$ sur I .
Toutes ces lignes viennent d'une même formule : si $f(x) = g(u(x))$, alors

$$f'(x) = u'(x) \times g'(u(x)).$$

On dérive la fonction « extérieure » g en gardant $u(x)$ à l'intérieur, puis on multiplie par $u'(x)$.

Démonstration pour u^2

$$\begin{aligned} (u^2)' &= (u \times u)' && u^2 \text{ est un produit} \\ (u^2)' &= u'u + uu' && u'v + uv', \text{ avec } v = u \\ (u^2)' &= 2u'u \end{aligned}$$

Méthode 10 — Dériver une fonction composée

Exemples corrigés

Calculer la dérivée de chaque fonction, là où elle est définie.

- a) $f(x) = (2x + 5)^2$
- b) $g(x) = (x^2 + 1)^3$
- c) $h(x) = \sqrt{3x + 1}$
- d) $k(x) = \cos(2x)$
- e) $m(x) = \sin(x^2 + 1)$

a)

$$\begin{aligned} u(x) &= 2x + 5 && u'(x) = 2 \\ f'(x) &= 2 \times 2 \times (2x + 5) && 2u'u \\ f'(x) &= 8x + 20 \end{aligned}$$

b)

$$u(x) = x^2 + 1$$

$$u'(x) = 2x$$

$$g'(x) = 3 \times 2x \times (x^2 + 1)^2 \quad nu' u^{n-1}, \text{ avec } n = 3$$

$$g'(x) = 6x(x^2 + 1)^2$$

c)

$$u(x) = 3x + 1$$

$$u'(x) = 3; u(x) > 0 \text{ pour } x > -\frac{1}{3}$$

$$h'(x) = \frac{3}{2\sqrt{3x+1}} \quad \frac{u'}{2\sqrt{u}}$$

d)

$$u(x) = 2x$$

$$u'(x) = 2$$

$$k'(x) = -2\sin(2x) \quad -u' \sin u$$

e)

$$u(x) = x^2 + 1$$

$$u'(x) = 2x$$

$$m'(x) = 2x \cos(x^2 + 1) \quad u' \cos u$$

À vous de jouer

Calculer la dérivée de chaque fonction, là où elle est définie :

$$f(x) = (3x - 2)^2 \quad g(x) = (x^2 - 2)^4 \quad h(x) = \sqrt{5x + 4}$$

$$k(x) = \sin(4x) \quad m(x) = \cos(x^2)$$

Réponses : $f'(x) = 18x - 12$; $g'(x) = 8x(x^2 - 2)^3$; $h'(x) = \frac{5}{2\sqrt{5x+4}}$; $k'(x) = 4\cos(4x)$; $m'(x) = -2x\sin(x^2)$.

► **À faire** : fiche d'exercices du chapitre, exercices 36 à 38.

X — Étude des variations d'une fonction

Théorème 1 — Signe de la dérivée et variations

Soit f dérivable sur un **intervalle** I .

- Si $f'(x) \geq 0$ pour tout x de I , alors f est croissante sur I .
- Si $f'(x) \leq 0$ pour tout x de I , alors f est décroissante sur I .
- Si $f'(x) = 0$ pour tout x de I , alors f est constante sur I .

Si $f'(x) > 0$ (sauf en quelques valeurs isolées où $f'(x) = 0$), f est **strictement** croissante; de même pour $f'(x) < 0$.

Une tangente qui monte (coefficient directeur positif) suit une courbe qui monte.

Méthode 11 — Étudier les variations d'une fonction

Exemples corrigés

Dresser le tableau de variations de chaque fonction.

a) $f(x) = x^2 - 6x + 1$ sur $\mathbb{R}$

b) $g(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 2$ sur $\mathbb{R}$

c) $h(x) = x + \frac{4}{x}$ sur $]0; +\infty[$

a)

$$f'(x) = 2x - 6 \quad \text{on dérive}$$

$$2x - 6 = 0 \quad \text{on cherche où } f' \text{ s'annule}$$

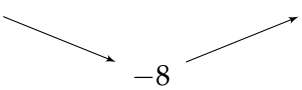
$$x = 3$$

$$f(3) = 9 - 18 + 1$$

$$f(3) = -8$$

$2x - 6$ est négatif avant 3, positif après.

affine, coefficient $2 > 0$: - puis +

x	$-\infty$	3	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$			

b)

$$g'(x) = 3x^2 - 6x - 9 \quad \text{on dérive}$$

Racines du trinôme $3x^2 - 6x - 9$:

on cherche où g' s'annule

$$\Delta = (-6)^2 - 4 \times 3 \times (-9) = 144 \quad \sqrt{144} = 12$$

$$x_1 = \frac{6 - 12}{6} = -1$$

$$x_2 = \frac{6 + 12}{6} = 3$$

Images des racines :

les nombres de la ligne des x

$$g(-1) = -1 - 3 + 9 + 2 = 7$$

$$g(3) = 27 - 27 - 27 + 2 = -25$$

$g'(x)$ est du signe de $a = 3$, sauf entre les racines.

signe du trinôme (ch. 3)

x	$-\infty$	-1	3	$+\infty$	
$g'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$g(x)$					

c)

$$h'(x) = 1 - \frac{4}{x^2}$$

$$4 \times \left(-\frac{1}{x^2}\right)$$

$$h'(x) = \frac{1 \times x^2}{1 \times x^2} - \frac{4}{x^2}$$

même dénominateur

$$h'(x) = \frac{x^2 - 4}{x^2}$$

$$h'(x) = \frac{(x-2)(x+2)}{x^2}$$

$$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$$

$$h(2) = 2 + \frac{4}{2}$$

$$h(2) = 4$$

Sur $]0; +\infty[$, $x^2 > 0$ et $x + 2 > 0$: $h'(x)$ a le signe de $x - 2$.

on ne garde que les facteurs dont le signe change

x	0	2	$+\infty$
$h'(x)$		- 0 +	
$h(x)$		↘ 4 ↗	

À vous de jouer

Dresser le tableau de variations de chaque fonction :

$$f(x) = -2x^2 + 8x - 3 \quad g(x) = x^3 - 12x + 1 \quad h(x) = \frac{2x-1}{x+1} \text{ sur }]-1; +\infty[$$

Réponses : $f'(x) = -4x + 8$: f croissante, puis décroissante, maximum $f(2) = 5$; $g'(x) = 3x^2 - 12$: g croissante, décroissante, croissante, avec $g(-2) = 17$ et $g(2) = -15$; $h'(x) = \frac{3}{(x+1)^2} > 0$: h croissante.

► **À faire** : fiche d'exercices du chapitre, exercices 39 à 42.

XI — Extremums d'une fonction

Définition 5 — Maximum, minimum

Soit f définie sur un intervalle I et c un nombre de I .

- $f(c)$ est le **maximum** de f sur I si $f(x) \leq f(c)$ pour tout x de I .
- $f(c)$ est le **minimum** de f sur I si $f(x) \geq f(c)$ pour tout x de I .

Un maximum ou un minimum est un **extremum**. Il est **local** s'il ne vaut que sur un intervalle ouvert autour de c .

Théorème 2 — Extremum et dérivée

Soit f dérivable sur un intervalle ouvert I et c un nombre de I . Si f' s'annule en c en changeant de signe, alors f a un **extremum local** en c , et la tangente y est horizontale.

f' passe de + à - : **maximum** $f(c)$

x	c
$f'(x)$	+ 0 -
$f(x)$	↘ $f(c)$ ↗

f' passe de - à + : **minimum** $f(c)$

x	c
$f'(x)$	- 0 +
$f(x)$	↘ $f(c)$ ↗

Attention

$f'(c) = 0$ ne suffit pas : il faut que f' **change de signe**. Pour $f(x) = x^3$, $f'(x) = 3x^2$ s'annule en 0 mais reste positive : f est croissante, sans extremum en 0.

Méthode 12 — Déterminer les extremums d'une fonction

Exemples corrigés

$f(x) = x^3 - 3x + 1$ sur $[-2; 3]$.

- Dresser le tableau de variations de f .
- Donner le maximum et le minimum de f sur $[-2; 3]$.

c) Donner une équation de la tangente à C_f au point d'abscisse -1 .

a)

$$f'(x) = 3x^2 - 3 \quad \text{on dérive}$$

$$f'(x) = 3(x-1)(x+1) \quad 3(x^2-1) : \text{ racines } -1 \text{ et } 1$$

Images des racines et des bornes :

les nombres de la ligne des x

$$f(-2) = -8 + 6 + 1 = -1$$

$$f(-1) = -1 + 3 + 1 = 3$$

$$f(1) = 1 - 3 + 1 = -1$$

$$f(3) = 27 - 9 + 1 = 19$$

x	-2	-1	1	3			
$f'(x)$		+	0	-	0	+	
$f(x)$	-1	$\nearrow$	3	$\searrow$	-1	$\nearrow$	19

b)

Le maximum de f sur $[-2; 3]$ est 19, atteint en 3.

on compare les « sommets » du tableau, bornes comprises

Le minimum est -1 , atteint en -2 et en 1 .

3, atteint en -1 , n'est qu'un maximum local

c)

$f'(-1) = 0$: la tangente est horizontale, d'équation $y = 3$.

$$y = f'(-1)(x+1) + f(-1) \text{ avec } f'(-1) = 0$$

À vous de jouer

$$g(x) = -x^3 + 3x^2 \text{ sur } [-1; 4].$$

1°) Dresser le tableau de variations de g .

2°) Donner le maximum et le minimum de g sur $[-1; 4]$.

3°) Donner une équation de la tangente à C_g au point d'abscisse 2.

Réponses : 1°) $g'(x) = -3x(x-2)$: « - », « + », « - » ; $g(-1) = 4$ et $g(0) = 0$; $g(2) = 4$ et $g(4) = -16$; 2°) maximum 4, atteint en -1 et en 2 ; minimum -16 , atteint en 4 ; 3°) $y = 4$.

► À faire : fiche d'exercices du chapitre, exercices 43 à 45.

XII — Étude complète d'une fonction

Plan d'étude d'une fonction

- Ensemble de définition** : chercher les valeurs interdites (dénominateur nul, nombre négatif sous une racine).
- Dérivée** : calculer $f'(x)$, puis l'écrire sous forme factorisée.
- Signe de $f'(x)$** : étudier le signe de chaque facteur (tableau de signes).
- Variations** : tableau de variations, avec les images des valeurs où f' s'annule et des bornes.
- Extremums** : là où $f'(x)$ s'annule en changeant de signe.
- Tangentes** : $y = f'(a)(x-a) + f(a)$; aux extremums, la tangente est horizontale.
- Courbe** : tableau de valeurs, puis extremums, tangentes et courbe.

Dans un problème concret, la question posée dit quelles étapes faire ; on conclut par une phrase, avec l'unité (partie suivante).

Méthode 13 — Étudier une fonction de bout en bout

Exemples corrigés

On considère $f(x) = \frac{4x}{x^2 + 1}$.

- Déterminer l'ensemble de définition de f .
- Calculer $f'(x)$ et l'écrire sous forme factorisée.
- Étudier le signe de $f'(x)$.
- Dresser le tableau de variations de f et donner ses extremums.
- Donner une équation de la tangente T à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 0.
- Tracer T et $\mathcal{C}_f$ sur $[-4; 4]$.

a)

$x^2 + 1 \geq 1$: le dénominateur ne s'annule jamais.

on cherche les valeurs interdites

f est définie sur $\mathbb{R}$.

aucune valeur interdite

b)

$$u(x) = 4x$$

$$u'(x) = 4$$

$$v(x) = x^2 + 1$$

$$v'(x) = 2x$$

$$f'(x) = \frac{4(x^2 + 1) - 4x \times 2x}{(x^2 + 1)^2} \quad \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

$$f'(x) = \frac{4 - 4x^2}{(x^2 + 1)^2} \quad 4x^2 + 4 - 8x^2$$

$$f'(x) = \frac{4(1 - x)(1 + x)}{(x^2 + 1)^2} \quad 1 - x^2 = (1 - x)(1 + x)$$

c)

$4 > 0$ et $(x^2 + 1)^2 > 0$: $f'(x)$ a le signe de $1 - x^2$.

on ne garde que les facteurs dont le signe change

$1 - x^2$ est négatif avant -1 , positif entre -1 et 1 , négatif après.

trinôme de racines ± 1 , avec $a = -1 < 0$

d)

$$f(-1) = \frac{-4}{2} = -2 \quad \text{images des racines de } f'$$

$$f(1) = \frac{4}{2} = 2$$

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$		
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$		$\searrow$	-2	$\nearrow$	2	$\searrow$

f a un minimum local -2 en -1 et un maximum local 2 en 1 . f' s'annule en changeant de signe (théorème 2)

e)

$$f(0) = 0$$

$$f'(0) = \frac{4}{1} = 4$$

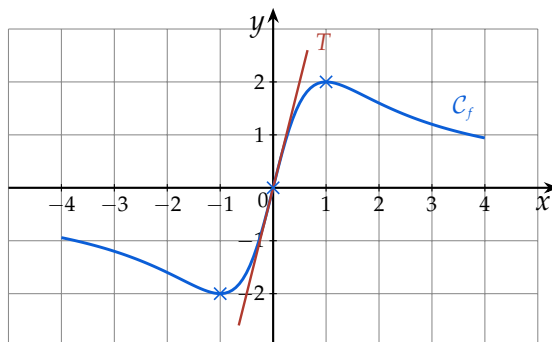
$$y = 4(x - 0) + 0 \quad y = f'(0)(x - 0) + f(0)$$

$$y = 4x$$

f)

Tableau de valeurs à la calculatrice (arrondis au dixième) : *on ajoute les extremums et le point de tangence*

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$f(x)$	-0,9	-1,2	-1,6	-2	0	2	1,6	1,2	0,9

On place d'abord les extremums, où la tangente est horizontale, puis la tangente T .*la courbe « colle » à ses tangentes***À vous de jouer**Mêmes questions a) à e) pour $g(x) = \frac{x^2 + 3}{x - 1}$, avec la tangente au point d'abscisse 0; puis tracer C_g sur $[-3; 0,5]$ et sur $[1,5; 5]$.Réponses : g est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$; $g'(x) = \frac{(x+1)(x-3)}{(x-1)^2}$; maximum local -2 en -1, minimum local 6 en 3; tangente en 0 : $y = -3x - 3$.► **À faire** : fiche d'exercices du chapitre, exercices 46 à 48.**XIII — Problèmes concrets****Lire une fonction dans un contexte**Quand $f(t)$ est une grandeur (altitude, concentration, nombre de personnes...) à l'instant t :

- $f(0)$ est la valeur **au départ**;
- $f'(t)$ est la **vitesse** à laquelle la grandeur varie à l'instant t (en km/h si $f(t)$ est en km et t en heures);
- le maximum de f donne la plus grande valeur, et l'instant où elle est atteinte.

Une durée en heures se convertit en minutes : $0,75 \text{ h} = 0,75 \times 60 \text{ min} = 45 \text{ min}$.**Méthode 14 — Étudier une fonction dans un contexte****Exemples corrigés**On injecte un médicament à un patient à 8 h 45. La concentration du médicament dans le sang, en mg/L, est donnée t heures après l'injection par

$$C(t) = \frac{180t}{4t^2 + 9}, \quad t \in [0; 8].$$

a) Calculer $C(0)$ et interpréter le résultat.b) Montrer que $C'(t) = \frac{180(9 - 4t^2)}{(4t^2 + 9)^2}$.c) Étudier le signe de $C'(t)$ sur $[0; 8]$, puis dresser le tableau de variations de C .

d) À quelle heure la concentration est-elle maximale? Que vaut-elle?

e) Le médicament agit quand la concentration est d'au moins 9 mg/L. Pendant combien de temps agit-il ?

a)

$$C(0) = \frac{180 \times 0}{4 \times 0^2 + 9} = 0$$

Au moment de l'injection, il n'y a pas encore de médicament dans le sang. *on interprète dans le contexte*

b)

$$u(t) = 180t$$

$$u'(t) = 180$$

$$v(t) = 4t^2 + 9$$

$$v'(t) = 8t$$

$$C'(t) = \frac{180(4t^2 + 9) - 180t \times 8t}{(4t^2 + 9)^2} \quad \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

$$C'(t) = \frac{720t^2 + 1620 - 1440t^2}{(4t^2 + 9)^2}$$

$$C'(t) = \frac{1620 - 720t^2}{(4t^2 + 9)^2}$$

$$C'(t) = \frac{180(9 - 4t^2)}{(4t^2 + 9)^2} \quad \text{on factorise par 180}$$

c)

$180 > 0$ et $(4t^2 + 9)^2 > 0$: $C'(t)$ a le signe de $9 - 4t^2 = (3 - 2t)(3 + 2t)$.

on ne garde que les facteurs dont le signe change

Sur $[0; 8]$, $3 + 2t > 0$: $C'(t)$ a le signe de $3 - 2t$, qui s'annule en $t = 1,5$.

$3 - 2t > 0$ pour $t < 1,5$

$$C(1,5) = \frac{270}{9 + 9} = 15 \quad \text{image de la racine de } C'$$

$$C(8) = \frac{1440}{265} = \frac{288}{53} \quad \text{environ } 5,4$$

t	0	1,5	8
$C'(t)$	+	0	-
$C(t)$	0	15	$\frac{288}{53}$

d)

$$1,5 \text{ h} = 1 \text{ h} + 0,5 \times 60 \text{ min}$$

$$1,5 \text{ h} = 1 \text{ h } 30 \text{ min}$$

Le maximum est atteint 1 h 30 après 8 h 45 : à **10 h 15**, la concentration vaut **15 mg/L**.

on répond par une phrase, avec l'unité

e)

On résout $C(t) \geq 9$:

on traduit la question

$$\frac{180t}{4t^2 + 9} \geq 9$$

$$180t \geq 36t^2 + 81 \quad \text{on multiplie par } 4t^2 + 9 > 0$$

$$36t^2 - 180t + 81 \leq 0$$

$$4t^2 - 20t + 9 \leq 0 \quad \text{on divise par 9}$$

Racines de $4t^2 - 20t + 9$:

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$\Delta = 400 - 144 = 256$$

$$t_1 = \frac{20 - 16}{8} = 0,5$$

$$t_2 = \frac{20 + 16}{8} = 4,5$$

Le trinôme est négatif entre ses racines : le médicament agit de $t = 0,5$ à $t = 4,5$, soit pendant **4 heures** (de 9 h 15 à 13 h 15). *signe de $a = 4$ à l'extérieur des racines*

À vous de jouer

Le nombre de spectateurs connectés à un match en ligne, en milliers, est donné t heures après 18 h par

$$N(t) = \frac{50t}{4t^2 + 25}, \quad t \in [0; 4].$$

1°) Calculer $N(0)$ et interpréter le résultat.

2°) Montrer que $N'(t) = \frac{50(25 - 4t^2)}{(4t^2 + 25)^2}$.

3°) Étudier le signe de $N'(t)$ sur $[0; 4]$, puis dresser le tableau de variations de N .

4°) À quelle heure y a-t-il le plus de spectateurs ? Combien ?

5°) Le match est « en tendance » quand il y a au moins 2 000 spectateurs. Pendant combien de temps l'est-il ?

Réponses : 1°) $N(0) = 0$: personne au coup d'envoi ; 3°) $N'(t)$ a le signe de $5 - 2t$: N croissante sur $[0; 2,5]$, décroissante sur $[2,5; 4]$; 4°) $N(2,5) = 2,5$: 2 500 spectateurs à 20 h 30 ; 5°) $4t^2 - 25t + 25 \leq 0$ pour $t \in [1,25; 4]$: pendant 2 h 45 (de 19 h 15 à 22 h).

► **À faire** : fiche d'exercices du chapitre, exercices 49 à 51.