

DÉRIVATION

Cours — Première spécialité

Version élève

Comment utiliser ce cours

Chaque partie commence par ce qu'il faut **savoir** (définitions, théorèmes), puis vient ce qu'il faut **savoir faire** : une méthode, avec des **exemples** faits en classe, puis des exercices « **À vous de jouer** » à chercher seul.

Sur cette feuille, les exemples n'ont que leur **énoncé** : la résolution, marquée (*au tableau*), s'écrit dans le cahier pendant le cours. Les réponses des « À vous de jouer » ne sont pas données.

I — Limite en zéro d'une fonction

Exemple — S'approcher d'une valeur interdite

Certaines fonctions ne se calculent pas en 0 : 0 est une **valeur interdite**. C'est le cas de

$$f(x) = \frac{x^2 + 2x}{x},$$

car on ne peut pas diviser par 0. On peut pourtant calculer $f(x)$ pour des valeurs de x de plus en plus proches de 0 :

x	-0,1	-0,01	-0,001	0	0,001	0,01	0,1
$f(x)$	1,9	1,99	1,999	interdit	2,001	2,01	2,1

Quand x s'approche de 0, $f(x)$ s'approche de 2.

Définition 1 — Limite en zéro

Si $f(x)$ s'approche d'un nombre L quand x s'approche de 0, on écrit

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = L$$

et on lit « la limite de $f(x)$ quand x tend vers 0 est L ». Dans l'exemple, $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 2$.

Méthode 1 — Calculer une limite en zéro

Exemples

(au tableau)

Calculer la limite en 0 de chaque fonction.

a) $f(x) = \frac{x^2 + 2x}{x}$ (l'exemple ci-dessus)

b) $g(x) = \frac{3x^2 + 5x}{x}$

c) $h(x) = \frac{(2+x)^2 - 4}{x}$

À vous de jouer

Calculer la limite en 0 de chaque fonction :

$$k(x) = \frac{x^2 + 7x}{x} \quad m(x) = \frac{5x^2 - 2x}{x} \quad p(x) = \frac{(3+x)^2 - 9}{x}$$

► **À faire** : fiche d'exercices du chapitre, exercices 1 à 4.

II — Nombre dérivé

Définition 2 — Nombre dérivé

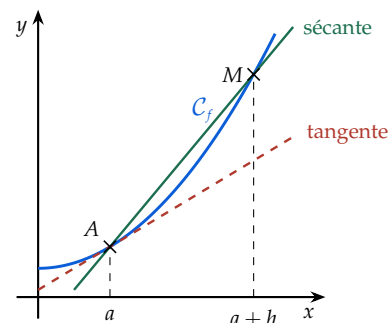
Soit $h \neq 0$. Le taux de variation de f entre a et $a + h$ est

$$T(h) = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

C'est le coefficient directeur de la sécante (AM) (ch. 2).

Si $T(h)$ s'approche d'un nombre quand h tend vers 0 (partie I), on dit que f est **dérivable en a** . Cette limite est le **nombre dérivé** de f en a , noté $f'(a)$:

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$



Quand h tend vers 0, M glisse vers A : la sécante tourne et se rapproche de la **tangente** en A .

Méthode 2 — Calculer un nombre dérivé par la définition

Exemples

a) $f(x) = x^2 + 3x$: calculer $f'(1)$.

b) $g(x) = \frac{1}{x}$: calculer $g'(2)$.

(au tableau)

À vous de jouer

1°) $h(x) = x^2 - 4x$: calculer $h'(3)$.

2°) $k(x) = 2x^2 + 1$: calculer $k'(-1)$.

3°) $m(x) = \frac{1}{x}$: calculer $m'(1)$.

► **À faire** : fiche d'exercices du chapitre, exercices 5 à 8.

Une fonction qui n'est pas dérivable

Pour la valeur absolue $f(x) = |x|$ en 0 : $T(h) = \frac{|h|}{h}$ vaut 1 si $h > 0$ et -1 si $h < 0$. $T(h)$ ne se rapproche pas d'un seul nombre : f n'est **pas dérivable en 0**. Sa courbe y fait une pointe, sans tangente.

III — Tangente à une courbe

Définition 3 — Tangente

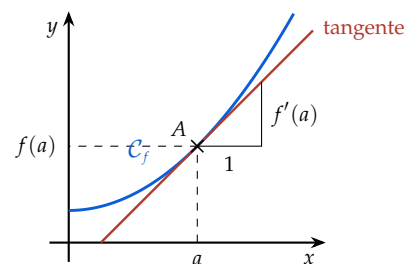
Soit f dérivable en a et $A(a; f(a))$ le point de C_f d'abscisse a . La **tangente** à C_f en A est la droite qui passe par A et dont le coefficient directeur est $f'(a)$.

Propriété 1 — Équation de la tangente

La tangente à C_f au point d'abscisse a a pour équation

$$y = f'(a)(x - a) + f(a).$$

Elle passe par $A(a; f(a))$; quand on avance de 1, elle monte de $f'(a)$.



Démonstration. La tangente a pour coefficient directeur $f'(a)$ et passe par A .

$$y = f'(a)x + p$$

équation d'une droite de coefficient directeur $f'(a)$

$$f(a) = f'(a) \times a + p$$

$A(a; f(a))$ est sur la droite

$$p = f(a) - f'(a) \times a$$

on isole p

$$y = f'(a)x - f'(a) \times a + f(a)$$

on remplace p dans l'équation

$$y = f'(a)(x - a) + f(a)$$

on factorise par $f'(a)$

Méthode 3 — Lire un nombre dérivé sur un graphique

On a tracé la courbe C_f d'une fonction f et quatre de ses tangentes.

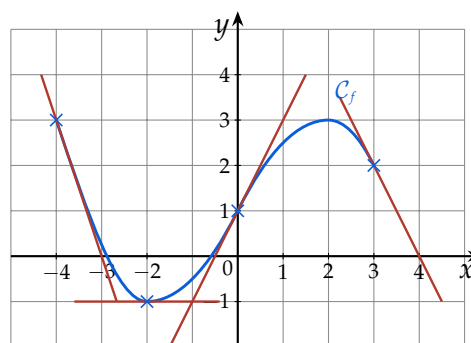
Exemples

(au tableau)

Lire $f'(-2)$ et $f'(0)$.

À vous de jouer

Lire $f(-4)$, $f'(-4)$, puis $f(3)$ et $f'(3)$.



Méthode 4 — Déterminer une équation de la tangente

Exemples

(au tableau)

a) $f(x) = x^2 - 2x + 3$: calculer $f'(2)$, puis une équation de la tangente à C_f au point d'abscisse 2.

b) $g(x) = \frac{1}{x}$: on a vu que $g'(2) = -\frac{1}{4}$ (méthode 2). Donner une équation de la tangente à C_g au point d'abscisse 2.

À vous de jouer

Avec les nombres dérivés déjà calculés à la méthode 2, donner une équation de la tangente :

1°) à la courbe de $f(x) = x^2 + 3x$ au point d'abscisse 1 ;

2°) à la courbe de $h(x) = x^2 - 4x$ au point d'abscisse 3.

► **À faire** : fiche d'exercices du chapitre, exercices 9 à 12.

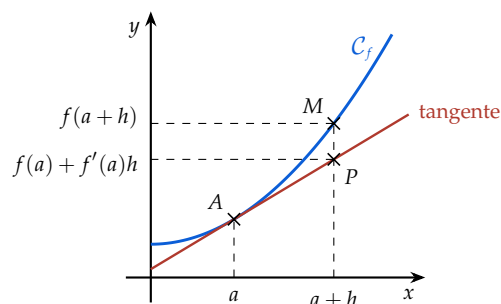
IV — Approximation linéaire

Propriété 2 — Approximation linéaire

Si f est dérivable en a , alors, pour h proche de 0 :

$$f(a+h) \simeq f(a) + f'(a) \times h.$$

Près de A , la courbe et sa tangente se confondent presque : on remplace l'ordonnée $f(a+h)$ du point M de la courbe par l'ordonnée $f(a) + f'(a) \times h$ du point P de la tangente. Plus h est petit, plus l'écart MP est petit. C'est l'équation de la tangente (propriété 1), avec $x = a + h$.

**Méthode 5 — Calculer une valeur approchée****Exemples**

(au tableau)

- $f(x) = x^2$: calculer $f'(5)$ par le taux d'accroissement, puis donner une valeur approchée de $5,03^2$ sans calculatrice.
- Un loyer augmente de 2 % par an pendant 3 ans : il est multiplié par $1,02^3$. Avec $g(x) = x^3$, calculer $g'(1)$ par le taux d'accroissement, puis donner une valeur approchée de $1,02^3$ et le pourcentage d'augmentation sur les 3 ans.

À vous de jouer

- $f(x) = x^2$: calculer $f'(4)$ par le taux d'accroissement, puis donner une valeur approchée de $4,01^2$ sans calculatrice.
- Un abonnement augmente de 4 % par an pendant 2 ans : il est multiplié par $1,04^2$. Avec $g(x) = x^2$, calculer $g'(1)$ par le taux d'accroissement, puis donner une valeur approchée de $1,04^2$ et le pourcentage d'augmentation sur les 2 ans.

► **À faire** : fiche d'exercices du chapitre, exercices 13 à 15.

V — Dérivées des fonctions polynômes**Définition 4 — Fonction dérivée**

Si f est dérivable en tout nombre x d'un intervalle I , on dit que f est **dérivable sur I** . La fonction qui à x associe $f'(x)$ est la **fonction dérivée** de f , notée f' .

Elle **généralise le nombre dérivé** : au lieu de refaire le calcul de limite pour chaque nombre a , on le fait une fois pour un x quelconque. La fonction f' donne alors le nombre dérivé en **tout** x de I : il suffit de remplacer x par a pour obtenir $f'(a)$. Par exemple, si $f'(x) = 2x$, alors $f'(3) = 6$ et $f'(-1) = -2$.

Propriété 3 — Dérivée de la fonction carré

Si $f(x) = x^2$, alors $f'(x) = 2x$ pour tout réel x .

Démonstration. Pour un réel a et $h \neq 0$:

$$T(h) = \frac{(a+h)^2 - a^2}{h}$$

$$T(h) = \frac{a^2 + 2ah + h^2 - a^2}{h}$$

$$T(h) = \frac{\cancel{h}(2a+h)}{\cancel{h}}$$

$$T(h) = 2a + h$$

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} (2a + h)$$

$$f'(a) = 2a \quad h \text{ tend vers } 0$$

Propriété 4 — Dérivées des polynômes (admis)

$f(x)$	$f'(x)$
k (constante)	0
$mx + p$	m
x^2	$2x$
x^3	$3x^2$
x^n ($n \geq 1$ entier)	nx^{n-1}

Un polynôme se dérive **terme à terme**, et un coefficient se garde : la dérivée de kx^n est $k \times nx^{n-1}$.

Méthode 6 — Dériver un polynôme

Exemples

(au tableau)

Calculer la dérivée de chaque fonction.

a) $f(x) = 4x^3 - 5x^2 + 2x - 7$

b) $g(x) = x^5 - 3x^4$

c) $h(x) = \frac{1}{3}x^3 + 2x^2 - x$

d) $k(x) = (2x + 1)^2$

À vous de jouer

Calculer la dérivée de chaque fonction :

$$f(x) = 2x^3 + x^2 - 6x + 1 \quad g(x) = -x^4 + 5x \quad h(x) = \frac{1}{2}x^4 - \frac{2}{3}x^3 \quad k(x) = (x - 3)^2$$

► **À faire** : fiche d'exercices du chapitre, exercices 16 à 20.

VI — Dérivées des autres fonctions de référence

Propriété 5 — Inverse, puissances inverses, racine carrée, cosinus, sinus

$f(x)$	$f'(x)$	f est dérivable sur
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$	$] -\infty; 0[$ et $] 0; +\infty[$
$\frac{1}{x^n}$ ($n \geq 1$ entier)	$-\frac{n}{x^{n+1}}$	$] -\infty; 0[$ et $] 0; +\infty[$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$] 0; +\infty[$
$\cos x$	$-\sin x$	$\mathbb{R}$
$\sin x$	$\cos x$	$\mathbb{R}$

Les dérivées de $\frac{1}{x^n}$, de la racine carrée, du cosinus et du sinus sont admises ; les fonctions cosinus et sinus seront étudiées au chapitre 9.

Démonstration pour l'inverse

On reprend la méthode 2 avec un nombre $a \neq 0$ quelconque. Pour $f(x) = \frac{1}{x}$ et $h \neq 0$, on calcule d'abord la différence $f(a+h) - f(a)$, puis on divise par h .

$$f(a+h) - f(a) = \frac{1}{a+h} - \frac{1}{a} \quad \text{on recopie la différence}$$

$$f(a+h) - f(a) = \frac{1 \times a}{(a+h) \times a} - \frac{1 \times (a+h)}{a \times (a+h)} \quad \text{même dénominateur}$$

$$f(a+h) - f(a) = \frac{a - a - h}{a(a+h)}$$

$$f(a+h) - f(a) = \frac{-h}{a(a+h)}$$

$$T(h) = \frac{-\cancel{h}}{a(a+h)} \times \frac{1}{\cancel{h}} \quad \text{diviser par } h, \text{ c'est multiplier par } \frac{1}{h}$$

$$T(h) = \frac{-1}{a(a+h)}$$

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-1}{a(a+h)}$$

$$f'(a) = -\frac{1}{a^2} \quad a+h \text{ tend vers } a$$

Méthode 7 — Utiliser les dérivées de référence

Exemples

(au tableau)

a) $f(x) = \frac{1}{x}$: calculer $f'(-2)$.

b) $g(x) = \sqrt{x}$: calculer $g'(9)$.

c) Calculer la dérivée de $h(x) = \frac{5}{x}$, puis de $k(x) = 4\sqrt{x}$.

d) Calculer la dérivée de $m(x) = \frac{1}{x^3}$, puis de $p(x) = \frac{2}{x^4}$.

e) Calculer la dérivée de $q(x) = 3 \sin x$, puis de $r(x) = -2 \cos x$.

À vous de jouer

1°) $f(x) = \frac{1}{x}$: calculer $f'(4)$. $g(x) = \sqrt{x}$: calculer $g'(25)$.

2°) Calculer la dérivée de chaque fonction : $h(x) = -\frac{2}{x}$ $k(x) = 6\sqrt{x}$ $m(x) = \frac{1}{x^2}$ $p(x) = \frac{3}{x^5}$.

3°) Calculer la dérivée de chaque fonction : $q(x) = 4 \cos x$ $r(x) = -5 \sin x$.

► **À faire** : fiche d'exercices du chapitre, exercices 21 à 24.

VII — Dérivée d'une somme et d'un produit

Propriété 6 — Somme, produit par un nombre, produit

u et v sont deux fonctions dérivables sur un intervalle I , et k un nombre réel.

fonction	dérivée
$u + v$	$u' + v'$
ku	ku'
uv	$u'v + uv'$

Attention : la dérivée d'un produit n'est **pas** le produit des dérivées.

Démonstration pour le produit

Pour $h \neq 0$, on enlève et on ajoute $u(a)v(a+h)$ au numérateur :

$$T(h) = \frac{u(a+h)v(a+h) - u(a)v(a)}{h}$$

$$T(h) = \frac{u(a+h)v(a+h) - u(a)v(a+h) + u(a)v(a+h) - u(a)v(a)}{h}$$

$$T(h) = \frac{u(a+h) - u(a)}{h} \times v(a+h) + u(a) \times \frac{v(a+h) - v(a)}{h}$$

$$(uv)'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} T(h)$$

$$(uv)'(a) = u'(a)v(a) + u(a)v'(a)$$

En effet, quand h tend vers 0, les deux quotients tendent vers $u'(a)$ et $v'(a)$, et $v(a+h)$ tend vers $v(a)$ (admis).

Méthode 8 — Dériver une somme, un produit

Exemples

(au tableau)

Calculer la dérivée de chaque fonction.

a) $f(x) = x^2 + \frac{1}{x}$

b) $g(x) = 3x - 4\sqrt{x}$

c) $h(x) = (2x+1)(x^2-3)$

d) $k(x) = x\sqrt{x}$ sur $]0; +\infty[$

e) $m(x) = x \cos x$

À vous de jouer

Calculer la dérivée de chaque fonction :

$$f(x) = x^3 - \frac{2}{x} \quad g(x) = 5x^2 + 2\sqrt{x} \quad h(x) = (x-4)(3x+2)$$

$$k(x) = (x^2 + 1)\sqrt{x} \quad m(x) = x^2 + \sin x \quad p(x) = x \sin x$$

► **À faire** : fiche d'exercices du chapitre, exercices 25 à 29.

VIII — Dérivée d'un inverse et d'un quotient**Propriété 7 — Inverse et quotient**

u et v sont deux fonctions dérivables sur un intervalle I , et v ne s'annule pas sur I .

fonction	dérivée
$\frac{1}{v}$	$-\frac{v'}{v^2}$
$\frac{u}{v}$	$\frac{u'v - uv'}{v^2}$

Méthode 9 — Dériver un inverse, un quotient**Exemples**

(au tableau)

Calculer la dérivée de chaque fonction, là où elle est définie.

a) $f(x) = \frac{1}{4x-3}$

b) $g(x) = \frac{1}{x^2+1}$

c) $h(x) = \frac{2x+1}{x-3}$

d) $k(x) = \frac{x^2}{x+1}$

À vous de jouer

Calculer la dérivée de chaque fonction :

$$f(x) = \frac{1}{5x+2} \quad g(x) = \frac{1}{x^2-4x} \quad h(x) = \frac{3x-1}{x+2} \quad k(x) = \frac{x^2+3}{x}$$

► **À faire** : fiche d'exercices du chapitre, exercices 30 à 35.

IX — Dérivée des fonctions composées

Propriété 8 — Dérivée d'une composée (admis)

u est une fonction dérivable sur un intervalle I , et $n \geq 2$ un entier.

fonction	dérivée
u^2	$2u'u$
u^n	$nu'u^{n-1}$
$\frac{1}{u}$	$-\frac{u'}{u^2}$
$\sqrt{u}$	$\frac{u'}{2\sqrt{u}}$
$\cos u$	$-u' \sin u$
$\sin u$	$u' \cos u$

Pour $1/u$, u ne s'annule pas sur I (c'est la formule de la partie VIII); pour $\sqrt{u}$, $u > 0$ sur I .
Toutes ces lignes viennent d'une même formule : si $f(x) = g(u(x))$, alors

$$f'(x) = u'(x) \times g'(u(x)).$$

On dérive la fonction « extérieure » g en gardant $u(x)$ à l'intérieur, puis on multiplie par $u'(x)$.

Démonstration pour u^2

$$\begin{aligned} (u^2)' &= (u \times u)' && u^2 \text{ est un produit} \\ (u^2)' &= u'u + uu' && u'v + uv', \text{ avec } v = u \\ (u^2)' &= 2u'u \end{aligned}$$

Méthode 10 — Dériver une fonction composée

Exemples

(au tableau)

Calculer la dérivée de chaque fonction, là où elle est définie.

- a) $f(x) = (2x + 5)^2$
- b) $g(x) = (x^2 + 1)^3$
- c) $h(x) = \sqrt{3x + 1}$
- d) $k(x) = \cos(2x)$
- e) $m(x) = \sin(x^2 + 1)$

À vous de jouer

Calculer la dérivée de chaque fonction, là où elle est définie :

$$\begin{aligned} f(x) &= (3x - 2)^2 & g(x) &= (x^2 - 2)^4 & h(x) &= \sqrt{5x + 4} \\ k(x) &= \sin(4x) & m(x) &= \cos(x^2) \end{aligned}$$

► **À faire** : fiche d'exercices du chapitre, exercices 36 à 38.

X — Étude des variations d'une fonction

Théorème 1 — Signe de la dérivée et variations

Soit f dérivable sur un intervalle I .

- Si $f'(x) \geq 0$ pour tout x de I , alors f est croissante sur I .
- Si $f'(x) \leq 0$ pour tout x de I , alors f est décroissante sur I .
- Si $f'(x) = 0$ pour tout x de I , alors f est constante sur I .

Si $f'(x) > 0$ (sauf en quelques valeurs isolées où $f'(x) = 0$), f est **strictement** croissante ; de même pour $f'(x) < 0$.

Une tangente qui monte (coefficient directeur positif) suit une courbe qui monte.

Méthode 11 — Étudier les variations d'une fonction

Exemples

(au tableau)

Dresser le tableau de variations de chaque fonction.

a) $f(x) = x^2 - 6x + 1$ sur $\mathbb{R}$

b) $g(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 2$ sur $\mathbb{R}$

c) $h(x) = x + \frac{4}{x}$ sur $]0; +\infty[$

À vous de jouer

Dresser le tableau de variations de chaque fonction :

$$f(x) = -2x^2 + 8x - 3 \quad g(x) = x^3 - 12x + 1 \quad h(x) = \frac{2x-1}{x+1} \text{ sur }]-1; +\infty[$$

► **À faire** : fiche d'exercices du chapitre, exercices 39 à 42.

XI — Extremums d'une fonction

Définition 5 — Maximum, minimum

Soit f définie sur un intervalle I et c un nombre de I .

- $f(c)$ est le **maximum** de f sur I si $f(x) \leq f(c)$ pour tout x de I .
- $f(c)$ est le **minimum** de f sur I si $f(x) \geq f(c)$ pour tout x de I .

Un maximum ou un minimum est un **extremum**. Il est **local** s'il ne vaut que sur un intervalle ouvert autour de c .

Théorème 2 — Extremum et dérivée

Soit f dérivable sur un intervalle ouvert I et c un nombre de I . Si f' s'annule en c en changeant de signe, alors f a un **extremum local** en c , et la tangente y est horizontale.

f' passe de $+$ à $-$: **maximum** $f(c)$

x	c
$f'(x)$	$\begin{array}{ccc} + & 0 & - \end{array}$
$f(x)$	$\begin{array}{c} \nearrow f(c) \searrow \end{array}$

f' passe de $-$ à $+$: **minimum** $f(c)$

x	c
$f'(x)$	$\begin{array}{ccc} - & 0 & + \end{array}$
$f(x)$	$\begin{array}{c} \searrow f(c) \nearrow \end{array}$

Attention

$f'(c) = 0$ ne suffit pas : il faut que f' **change de signe**. Pour $f(x) = x^3$, $f'(x) = 3x^2$ s'annule en 0 mais reste positive : f est croissante, sans extremum en 0.

Méthode 12 — Déterminer les extremums d'une fonction**Exemples**

(au tableau)

$f(x) = x^3 - 3x + 1$ sur $[-2; 3]$.

- Dresser le tableau de variations de f .
- Donner le maximum et le minimum de f sur $[-2; 3]$.
- Donner une équation de la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse -1 .

À vous de jouer

$g(x) = -x^3 + 3x^2$ sur $[-1; 4]$.

- Dresser le tableau de variations de g .
- Donner le maximum et le minimum de g sur $[-1; 4]$.
- Donner une équation de la tangente à $\mathcal{C}_g$ au point d'abscisse 2.

► **À faire** : fiche d'exercices du chapitre, exercices 43 à 45.

XII — Étude complète d'une fonction**Plan d'étude d'une fonction**

- Ensemble de définition** : chercher les valeurs interdites (dénominateur nul, nombre négatif sous une racine).
- Dérivée** : calculer $f'(x)$, puis l'écrire sous forme factorisée.
- Signe de $f'(x)$** : étudier le signe de chaque facteur (tableau de signes).
- Variations** : tableau de variations, avec les images des valeurs où f' s'annule et des bornes.
- Extremums** : là où $f'(x)$ s'annule en changeant de signe.
- Tangentes** : $y = f'(a)(x - a) + f(a)$; aux extremums, la tangente est horizontale.
- Courbe** : tableau de valeurs, puis extremums, tangentes et courbe.

Dans un problème concret, la question posée dit quelles étapes faire ; on conclut par une phrase, avec l'unité (partie suivante).

Méthode 13 — Étudier une fonction de bout en bout**Exemples**

(au tableau)

On considère $f(x) = \frac{4x}{x^2 + 1}$.

- Déterminer l'ensemble de définition de f .
- Calculer $f'(x)$ et l'écrire sous forme factorisée.
- Étudier le signe de $f'(x)$.
- Dresser le tableau de variations de f et donner ses extremums.
- Donner une équation de la tangente T à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 0.
- Tracer T et $\mathcal{C}_f$ sur $[-4; 4]$.

À vous de jouer

Mêmes questions a) à e) pour $g(x) = \frac{x^2 + 3}{x - 1}$, avec la tangente au point d'abscisse 0 ; puis tracer $\mathcal{C}_g$ sur

$[-3; 0,5]$ et sur $[1,5; 5]$.

► **À faire** : fiche d'exercices du chapitre, exercices 46 à 48.

XIII — Problèmes concrets

Lire une fonction dans un contexte

Quand $f(t)$ est une grandeur (altitude, concentration, nombre de personnes...) à l'instant t :

- $f(0)$ est la valeur **au départ**;
- $f'(t)$ est la **vitesse** à laquelle la grandeur varie à l'instant t (en km/h si $f(t)$ est en km et t en heures);
- le maximum de f donne la plus grande valeur, et l'instant où elle est atteinte.

Une durée en heures se convertit en minutes : $0,75 \text{ h} = 0,75 \times 60 \text{ min} = 45 \text{ min}$.

Méthode 14 — Étudier une fonction dans un contexte

Exemples

(au tableau)

On injecte un médicament à un patient à 8 h 45. La concentration du médicament dans le sang, en mg/L, est donnée t heures après l'injection par

$$C(t) = \frac{180t}{4t^2 + 9}, \quad t \in [0; 8].$$

- Calculer $C(0)$ et interpréter le résultat.
- Montrer que $C'(t) = \frac{180(9 - 4t^2)}{(4t^2 + 9)^2}$.
- Étudier le signe de $C'(t)$ sur $[0; 8]$, puis dresser le tableau de variations de C .
- À quelle heure la concentration est-elle maximale? Que vaut-elle?
- Le médicament agit quand la concentration est d'au moins 9 mg/L. Pendant combien de temps agit-il?

À vous de jouer

Le nombre de spectateurs connectés à un match en ligne, en milliers, est donné t heures après 18 h par

$$N(t) = \frac{50t}{4t^2 + 25}, \quad t \in [0; 4].$$

- Calculer $N(0)$ et interpréter le résultat.
- Montrer que $N'(t) = \frac{50(25 - 4t^2)}{(4t^2 + 25)^2}$.
- Étudier le signe de $N'(t)$ sur $[0; 4]$, puis dresser le tableau de variations de N .
- À quelle heure y a-t-il le plus de spectateurs? Combien?
- Le match est « en tendance » quand il y a au moins 2 000 spectateurs. Pendant combien de temps l'est-il?

► **À faire** : fiche d'exercices du chapitre, exercices 49 à 51.