

1^{re} spécialité — Dérivation

Fiche d'exercices du chapitre

I — Limite en zéro d'une fonction

Exercice 1 : Conjecturer avec un tableau de valeurs

On considère $f(x) = \frac{x^2 - 3x}{x}$, avec $x \neq 0$.

- Calculer $f(x)$ pour x égal à $-0,1$, puis $-0,01$, puis $0,01$ et $0,1$.
- Quelle semble être la limite de $f(x)$ quand x tend vers 0 ?
- Simplifier $f(x)$ et retrouver cette limite.

Exercice 2 : Calculer des limites en zéro

Calculer la limite en 0 de chaque fonction.

a) $f(x) = \frac{x^2 + 4x}{x}$	c) $h(x) = \frac{4x^3 + x}{x}$
b) $g(x) = \frac{2x^2 - 6x}{x}$	d) $k(x) = \frac{3x^3 - x^2 + 8x}{x}$

Exercice 3 : Avec une identité remarquable

Calculer la limite en 0 de chaque fonction.

a) $f(x) = \frac{(1+x)^2 - 1}{x}$	c) $h(x) = \frac{(x-2)^2 - 4}{x}$
b) $g(x) = \frac{(5+x)^2 - 25}{x}$	d) $k(x) = \frac{(3-x)^2 - 9}{x}$

Exercice 4 : Limites quand h tend vers 0

Calculer la limite de chaque expression quand h tend vers 0.

a) $\frac{h^2 + 6h}{h}$	b) $\frac{(2+h)^2 - 4}{h}$	c) $\frac{3(1+h)^2 - 3}{h}$
-------------------------	----------------------------	-----------------------------

II — Nombre dérivé

Exercice 5 : Nombre dérivé par la définition

Pour chaque fonction, calculer le taux de variation $T(h)$, puis le nombre dérivé demandé.

- $f(x) = x^2$: calculer $f'(3)$.
- $g(x) = x^2 + 2x$: calculer $g'(1)$.
- $k(x) = -x^2 + 5x$: calculer $k'(1)$.
- $m(x) = 2x^2 - 3$: calculer $m'(-1)$.

Exercice 6 : Le taux de variation est donné

Dans chaque cas, $h \neq 0$. En déduire le nombre dérivé demandé.

- Le taux de variation de f entre 1 et $1+h$ est $T(h) = 3h + 7$: calculer $f'(1)$.
- Le taux de variation de g entre 4 et $4+h$ est $T(h) = h^2 - h - 2$: calculer $g'(4)$.
- On a $k(-1+h) - k(-1) = 5h - 2h^2$: calculer $k'(-1)$.

Exercice 7 : Avec des fractions

- $f(x) = \frac{1}{x}$. Montrer que $f(4+h) - f(4) = \frac{-h}{4(4+h)}$, puis calculer $f'(4)$.
- $g(x) = \frac{1}{x+1}$. Calculer $g(1+h) - g(1)$, puis $g'(1)$.

Exercice 8 : Pour un nombre a quelconque

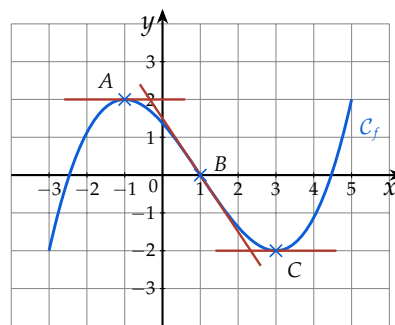
On considère $f(x) = x^2 - 4x$ et un nombre a .

- Montrer que le taux de variation de f entre a et $a+h$ est $T(h) = 2a - 4 + h$.
- En déduire $f'(a)$ en fonction de a .
- Calculer $f'(0)$, $f'(2)$ et $f'(5)$.

III — Tangente à une courbe

Exercice 9 : Lecture graphique

On a tracé la courbe C_f d'une fonction f définie sur $[-3; 5]$ et trois de ses tangentes, aux points A, B et C.



- Lire $f(-1)$, $f(1)$ et $f(3)$.
- Lire $f'(-1)$, $f'(1)$ et $f'(3)$.
- Donner une équation de la tangente à C_f en B.

Exercice 10 : Équation de la tangente

Dans chaque cas, donner une équation de la tangente à C_f au point d'abscisse a .

- $a = 2$; $f(2) = 3$ et $f'(2) = 4$
- $a = -1$; $f(-1) = 2$ et $f'(-1) = -3$
- $a = 0$; $f(0) = 5$ et $f'(0) = \frac{1}{2}$
- $a = 4$; $f(4) = -1$ et $f'(4) = 0$

Exercice 11 : Nombre dérivé, puis tangente

- $f(x) = x^2 + x - 2$. Calculer $f'(1)$ par la définition, puis une équation de la tangente à C_f au point d'abscisse 1.
- $g(x) = \frac{1}{x}$. Calculer $g'(-1)$ par la définition, puis une équation de la tangente à C_g au point d'abscisse -1 .

Exercice 12 : Tangente passant par un point

- La tangente à C_f au point A(1; -2) passe par B(3; 4). Calculer $f'(1)$, puis donner une équation de cette tangente.
- La tangente à C_g au point C(-2; 1) passe par D(0; -3). Calculer $g'(-2)$, puis donner une équation de cette tangente.

IV — Approximation linéaire

Exercice 13 : Valeurs approchées sans calculatrice

On utilise $f(a+h) \simeq f(a) + f'(a) \times h$, pour h proche de 0; chaque nombre dérivé se calcule par le taux d'accroissement.

- Pour $6,02^2$, on prend $f(x) = x^2$, $a = 6$ et $h = 0,02$. Calculer $f(6)$ et $f'(6)$, puis une valeur approchée de $6,02^2$.
- Même méthode pour $1,01^3$, avec $g(x) = x^3$, $a = 1$ et $h = 0,01$.
- Pour $\frac{1}{0,98}$, avec $k(x) = \frac{1}{x}$: choisir a et h , calculer $k'(a)$, puis donner une valeur approchée.
- Même question pour $\frac{1}{2,01}$.
- Comparer les quatre résultats avec la calculatrice.

Exercice 14 : Augmentations et baisses successives

Chaque nombre dérivé se calcule par le taux d'accroissement.

- Un abonnement augmente de 1,5 % par mois pendant 2 mois. Avec $f(x) = x^2$, calculer $f'(1)$, puis donner une valeur approchée de $1,015^2$ et le pourcentage d'augmentation sur les 2 mois.
- La population d'un village baisse de 2 % par an pendant 3 ans. Avec $g(x) = x^3$, calculer $g'(1)$, puis donner une valeur approchée de $0,98^3$ et le pourcentage de baisse sur les 3 ans.

Exercice 15 : Courbe et tangente

- On considère $f(x) = x^2 + 3x$. Calculer $f(2)$, puis $f'(2)$ par le taux d'accroissement.
- En déduire une valeur approchée de $f(2,1)$, puis calculer l'écart avec la valeur exacte.
- Même question pour $f(1,95)$.

V — Dérivées des fonctions polynômes**Exercice 16 : Dériver un polynôme**

Calculer la dérivée de chaque fonction.

- | | |
|--------------------|---------------------------------|
| a) $f(x) = 7$ | d) $k(x) = 3x^2 - 4x + 1$ |
| b) $g(x) = 5x - 3$ | e) $m(x) = -2x^3 + x^2 - 5x$ |
| c) $h(x) = x^6$ | f) $p(x) = x^4 - 2x^3 + 7x - 1$ |

Exercice 17 : Avec des fractions

Calculer la dérivée de chaque fonction.

- | | |
|--------------------------------------|---|
| a) $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 3x$ | c) $h(x) = \frac{1}{4}x^4 + \frac{2}{3}x^3$ |
| b) $g(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 + 4$ | d) $k(x) = \frac{x^3 - 6x}{3}$ |

Exercice 18 : Développer d'abord

Développer, puis calculer la dérivée de chaque fonction.

- | | |
|------------------------|----------------------------|
| a) $f(x) = (x + 4)^2$ | c) $h(x) = x(x^2 - 5)$ |
| b) $g(x) = (3x - 1)^2$ | d) $k(x) = (x + 2)(x - 2)$ |

Exercice 19 : Entraînement : polynômes

Calculer la dérivée de chaque fonction.

- | | |
|---------------------------------|-------------------------------|
| a) $f(x) = x^3 - 7x^2 + 2x - 9$ | e) $m(x) = 0,5x^4 - 1,5x^2$ |
| b) $g(x) = -4x^5 + 3x^2$ | f) $p(x) = \frac{x^2 - 3}{4}$ |
| c) $h(x) = 6x^4 - x^3 + x$ | g) $q(x) = x^7 - x^5 + x^3$ |
| d) $k(x) = \frac{2}{5}x^5 - x$ | h) $r(x) = 3(x^2 - 2x + 5)$ |

Exercice 20 : Fonction dérivée et nombres dérivésOn considère $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$.

- Calculer $f'(x)$.
- En déduire $f'(0)$, $f'(1)$, $f'(-1)$ et $f'(2)$.
- Donner une équation de la tangente à C_f au point d'abscisse 1.
- En quels points de C_f la tangente est-elle horizontale ?

VI — Dérivées des autres fonctions de référence**Exercice 21 : Nombres dérivés des fonctions de référence**

- $f(x) = \frac{1}{x}$: calculer $f'(5)$ et $f'(\frac{1}{2})$.
- $g(x) = \sqrt{x}$: calculer $g'(16)$ et $g'(\frac{1}{4})$.
- $k(x) = \frac{1}{x^2}$: calculer $k'(1)$ et $k'(-2)$.

Exercice 22 : Dériver avec les fonctions de référence

Calculer la dérivée de chaque fonction.

- | | |
|---------------------------|---------------------------|
| a) $f(x) = \frac{4}{x}$ | d) $k(x) = \frac{5}{x^3}$ |
| b) $g(x) = -3\sqrt{x}$ | e) $m(x) = 2 \cos x$ |
| c) $h(x) = \frac{1}{x^4}$ | f) $p(x) = -\sin x$ |

Exercice 23 : Entraînement : fonctions de référence

Calculer la dérivée de chaque fonction.

- | | |
|----------------------------|---------------------------------|
| a) $f(x) = -\frac{7}{x}$ | e) $m(x) = \frac{1}{3}\sqrt{x}$ |
| b) $g(x) = 8\sqrt{x}$ | f) $p(x) = -4 \cos x$ |
| c) $h(x) = \frac{2}{x^2}$ | g) $q(x) = \frac{1}{2x}$ |
| d) $k(x) = -\frac{1}{x^5}$ | h) $r(x) = \frac{1}{2} \sin x$ |

Exercice 24 : Tangentes aux courbes de référence

- Donner une équation de la tangente à la courbe de $f(x) = \frac{1}{x}$ au point d'abscisse 1.

- Donner une équation de la tangente à la courbe de $g(x) = \sqrt{x}$ au point d'abscisse 4.
- Justifier que la courbe de f n'a aucune tangente horizontale.

VII — Dérivée d'une somme et d'un produit**Exercice 25 : Dériver une somme**

Calculer la dérivée de chaque fonction.

- | | |
|-------------------------------|------------------------------|
| a) $f(x) = x^3 + \frac{1}{x}$ | c) $h(x) = \frac{3}{x} + 5x$ |
| b) $g(x) = 2x^2 - \sqrt{x}$ | d) $k(x) = x + \cos x$ |

Exercice 26 : Dériver un produit

Calculer la dérivée de chaque fonction.

- | | |
|-------------------------------|-----------------------------|
| a) $f(x) = (3x - 2)(x + 4)$ | c) $h(x) = (x + 1)\sqrt{x}$ |
| b) $g(x) = (x^2 + 1)(2x - 3)$ | d) $k(x) = x^2 \cos x$ |

Exercice 27 : Entraînement : sommes et produits

Calculer la dérivée de chaque fonction.

- | | |
|------------------------------------|--------------------------------|
| a) $f(x) = x^2 - 3x + \frac{4}{x}$ | e) $m(x) = (x + 2) \cos x$ |
| b) $g(x) = 4\sqrt{x} - 2x^3$ | f) $p(x) = \frac{1}{x}(x + 5)$ |
| c) $h(x) = (x^2 - 4)(3x + 1)$ | g) $q(x) = (x^2 + x)(x^2 - x)$ |
| d) $k(x) = (2x - 1)\sqrt{x}$ | h) $r(x) = \sin x \cos x$ |

Exercice 28 : Deux façons de dériverOn considère $f(x) = (2x + 5)(1 - 3x)$.

- Calculer $f'(x)$ avec la dérivée d'un produit.
- Développer $f(x)$, puis dériver l'expression obtenue.
- Vérifier que les deux résultats sont égaux.

Exercice 29 : Produit et tangenteOn considère $f(x) = (x - 3)\sqrt{x}$ sur $]0; +\infty[$.

- Montrer que $f'(x) = \frac{3x - 3}{2\sqrt{x}}$.
- Calculer $f(4)$ et $f'(4)$.
- Donner une équation de la tangente à C_f au point d'abscisse 4.

VIII — Dérivée d'un inverse et d'un quotient**Exercice 30 : Dériver un inverse**

Calculer la dérivée de chaque fonction, là où elle est définie.

- | | |
|-------------------------------|--------------------------------|
| a) $f(x) = \frac{1}{2x + 3}$ | c) $h(x) = \frac{3}{x - 1}$ |
| b) $g(x) = \frac{1}{x^2 + 4}$ | d) $k(x) = \frac{1}{x^2 - 2x}$ |

Exercice 31 : Dériver un quotient

Calculer la dérivée de chaque fonction, là où elle est définie.

- | | |
|-----------------------------------|-------------------------------------|
| a) $f(x) = \frac{x + 3}{x - 2}$ | c) $h(x) = \frac{x^2}{x - 3}$ |
| b) $g(x) = \frac{4x - 1}{2x + 1}$ | d) $k(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$ |

Exercice 32 : Entraînement : inverses et quotients

Calculer la dérivée de chaque fonction, là où elle est définie.

- | | |
|------------------------------------|------------------------------------|
| a) $f(x) = \frac{1}{3 - x}$ | e) $m(x) = \frac{x^2 + 1}{x}$ |
| b) $g(x) = \frac{-2}{x^2 + x + 1}$ | f) $p(x) = \frac{3x}{x^2 + 1}$ |
| c) $h(x) = \frac{5x + 2}{x - 1}$ | g) $q(x) = \frac{x^2 - 4x}{x + 2}$ |
| d) $k(x) = \frac{1 - 2x}{x + 3}$ | h) $r(x) = \frac{\sqrt{x}}{x + 1}$ |

Exercice 33 : Choisir la bonne formule

Pour chaque fonction, dire s'il s'agit d'une somme, d'un produit, d'un inverse ou d'un quotient, puis calculer sa dérivée.

- | | |
|--------------------------------|-------------------------------|
| a) $f(x) = 3x^4 - \frac{2}{x}$ | d) $k(x) = \frac{x-4}{2x+1}$ |
| b) $g(x) = (x-1)(x^2+2)$ | e) $m(x) = x^2\sqrt{x}$ |
| c) $h(x) = \frac{4}{x^2+3}$ | f) $p(x) = \sqrt{x} + \sin x$ |

Exercice 34 : Tangentes à une hyperbole

On considère $f(x) = \frac{2x-4}{x+1}$, pour $x \neq -1$.

- Montrer que $f'(x) = \frac{6}{(x+1)^2}$.
- $\mathcal{C}_f$ coupe l'axe des abscisses en A. Calculer les coordonnées de A, puis une équation de la tangente à $\mathcal{C}_f$ en A.
- Même question avec le point B où $\mathcal{C}_f$ coupe l'axe des ordonnées.

Exercice 35 : Deux fonctions, une même dérivée

On considère $f(x) = \frac{2x+1}{x-1}$ et $g(x) = \frac{3}{x-1}$, pour $x \neq 1$.

- Calculer $f'(x)$ et $g'(x)$. Que remarque-t-on ?
- Calculer $f(x) - g(x)$. Expliquer la remarque de la question 1.

IX — Dérivée des fonctions composées

Exercice 36 : Dériver une puissance, une racine

Calculer la dérivée de chaque fonction, là où elle est définie.

- | | |
|-----------------------|--------------------------|
| a) $f(x) = (3x+1)^2$ | d) $k(x) = (4x-1)^5$ |
| b) $g(x) = (1-2x)^2$ | e) $m(x) = \sqrt{2x+6}$ |
| c) $h(x) = (x^2+3)^3$ | f) $p(x) = \sqrt{x^2+4}$ |

Exercice 37 : Cosinus, sinus et formule générale

- Calculer la dérivée de chaque fonction.

- | | |
|------------------------|-----------------------|
| a) $f(x) = \sin(3x)$ | c) $h(x) = \sin(x^2)$ |
| b) $g(x) = \cos(5x+1)$ | d) $k(x) = \cos(1-x)$ |

- On admet qu'une fonction g a pour dérivée

$$g'(x) = \frac{1}{1+x^2}. \text{ Avec la formule}$$

$$f'(x) = u'(x) \times g'(u(x)), \text{ calculer la dérivée de}$$

$$f(x) = g(2x).$$

Exercice 38 : Composée et tangente

On considère $f(x) = \sqrt{x^2+9}$, définie sur $\mathbb{R}$.

- Calculer $f'(x)$.
- Calculer $f(4)$ et $f'(4)$.
- Donner une équation de la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 4.
- En déduire une valeur approchée de $f(4,1)$, puis la comparer avec la calculatrice.

X — Étude des variations d'une fonction

Exercice 39 : Du signe de f' aux variations de f

Une fonction f est dérivable sur $[-4;5]$; voici le signe de $f'(x)$.

x	-4	-1	3	5	
$f'(x)$	-	0	+	0	-

On sait que $f(-4) = 2$, $f(-1) = -3$, $f(3) = 4$ et $f(5) = 1$.

- Dresser le tableau de variations de f .
- Comparer $f(0)$ et $f(2)$.

Exercice 40 : Variations de polynômes

Dresser le tableau de variations de chaque fonction sur $\mathbb{R}$.

- $f(x) = x^2 - 4x + 7$
- $g(x) = -3x^2 + 12x - 5$
- $h(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 1$
- $k(x) = x^3 + 3x - 2$

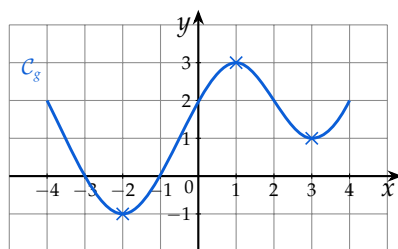
Exercice 41 : Variations d'un quotient

On considère $f(x) = \frac{x^2+3}{x+1}$ sur $]-1; +\infty[$.

- Montrer que $f'(x) = \frac{x^2+2x-3}{(x+1)^2}$.
- Étudier le signe de $f'(x)$ sur $]-1; +\infty[$.
- Dresser le tableau de variations de f .

Exercice 42 : Lire le signe de la dérivée

On a tracé la courbe $\mathcal{C}_g$ d'une fonction g dérivable sur $[-4;4]$. Ses tangentes sont horizontales aux points d'abscisses -2, 1 et 3.



- Dresser le tableau de signes de $g'(x)$ sur $[-4;4]$.
- Dresser le tableau de variations de g .

XI — Extremums d'une fonction

Exercice 43 : Lire les extremums

Voici le tableau de variations d'une fonction f dérivable sur $[-2;6]$.

x	-2	1	4	6
f		5	-3	0
	1 ↗		↘ -3	↗ 0

- Donner le maximum et le minimum de f sur $[-2;6]$.
- Donner le signe de $f'(x)$ selon les valeurs de x .
- Que vaut $f'(1)$? Et $f'(4)$?

Exercice 44 : Extremums d'un polynôme

On considère $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 1$ sur $[0;5]$.

- Dresser le tableau de variations de f .
- Donner le maximum et le minimum de f sur $[0;5]$.
- f a-t-elle un extremum local en 1? Lequel?

Exercice 45 : Vrai ou faux

Dire si chaque affirmation est vraie ou fausse, et justifier.

- Si $f'(2) = 0$, alors f a un extremum en 2.
- La fonction $g(x) = x^3 + x$ n'a aucun extremum sur $\mathbb{R}$.
- La fonction $h(x) = x + \frac{1}{x}$ a pour minimum 2 sur $]0; +\infty[$.

XII — Étude complète d'une fonction

Exercice 46 : Étude d'un polynôme

On considère $f(x) = -x^3 + 3x^2 - 1$ sur $[-1;3]$.

- Justifier que f est définie et dérivable sur $[-1;3]$.
- Calculer $f'(x)$ et l'écrire sous forme factorisée.
- Étudier le signe de $f'(x)$, puis dresser le tableau de variations de f .
- Donner les extremums locaux de f , puis son maximum et son minimum sur $[-1;3]$.

- Donner une équation de la tangente T à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 1.
- Avec un tableau de valeurs (pas de 0,5), tracer T et $\mathcal{C}_f$ dans un repère orthonormé d'unité 1 cm.

Exercice 47 : Étude d'un quotient défini sur $\mathbb{R}$

On considère $f(x) = \frac{2x+1}{x^2+2}$.

- Justifier que f est définie sur $\mathbb{R}$.
- Montrer que $f'(x) = \frac{-2(x+2)(x-1)}{(x^2+2)^2}$.
- Étudier le signe de $f'(x)$, puis dresser le tableau de variations de f .
- Donner les extremums locaux de f .
- Donner une équation de la tangente T à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 0.
- Avec un tableau de valeurs (pas de 1), tracer T et $\mathcal{C}_f$ sur $[-4;4]$, dans un repère orthonormé d'unité 2 cm.

Exercice 48 : Étude d'un quotient avec une valeur interdite

On considère $f(x) = \frac{x^2-3}{x-2}$.

- Déterminer l'ensemble de définition de f .
- Montrer que $f'(x) = \frac{(x-1)(x-3)}{(x-2)^2}$.
- Étudier le signe de $f'(x)$, puis dresser le tableau de variations de f .
- Donner les extremums locaux de f . Que remarque-t-on ?
- Donner une équation de la tangente T à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 0.
- Avec un tableau de valeurs, tracer T et $\mathcal{C}_f$ sur $[-3;1,5]$ et sur $[2,5;7]$, dans un repère orthonormé d'unité 1 cm.

XIII — Problèmes concrets

Exercice 49 : Le vol d'une montgolfière

Une montgolfière décolle d'un village de montagne à 10 h 50. Son altitude, en centaines de mètres, est

$f(t) = \frac{8t+6}{t^2+1}$, où $t \in [0;5]$ est le temps en heures écoulé depuis le décollage.

- À quelle altitude se trouve le village ?
- Montrer que $f'(t) = \frac{-4(2t-1)(t+2)}{(t^2+1)^2}$.
- Étudier le signe de $f'(t)$ sur $[0;5]$, puis dresser le tableau de variations de f .
- À quelle heure la montgolfière commence-t-elle à perdre de l'altitude ? Quelle est alors son altitude ?
- À quelle heure revient-elle à l'altitude du village ?

Exercice 50 : Des bactéries et un antibiotique

Un antibiotique est ajouté à un milieu de culture. Le nombre de bactéries, en milliers, est

$N(t) = t^3 - 12t^2 + 36t + 10$, où $t \in [0;8]$ est le temps en heures. La vitesse de croissance de la population, en milliers de bactéries par heure, est $N'(t)$.

- Calculer $N(0)$ et interpréter le résultat.
- Montrer que $N'(t) = 3(t-2)(t-6)$.
- Dresser le tableau de variations de N sur $[0;8]$.
- Calculer $N'(0)$ et $N'(4)$, puis interpréter ces deux nombres.
- Montrer que $N(t) - 10 = t(t-6)^2$. Le nombre de bactéries peut-il descendre sous sa valeur de départ ?

Exercice 51 : Le coût moyen d'un artisan

Un artisan fabrique entre 5 et 50 lampes par mois. Le coût

moyen d'une lampe, en euros, est $M(x) = x + \frac{400}{x}$, où $x \in [5;50]$ est le nombre de lampes.

- Calculer $M(10)$ et interpréter le résultat.
- Montrer que $M'(x) = \frac{(x-20)(x+20)}{x^2}$.
- Dresser le tableau de variations de M . Combien de lampes faut-il fabriquer pour que le coût moyen soit le plus bas ? Quel est-il ?
- Vrai ou faux ? Justifier. « Le coût moyen est d'au plus 50 € dès que l'artisan fabrique entre 10 et 40 lampes. »
- Vrai ou faux ? Justifier. « La tangente à la courbe de M au point d'abscisse 10 est parallèle à la droite d'équation $y = -2x + 1$. »