

CORRIGÉ — FICHE D'EXERCICES

Chapitre 5 — Suites numériques
Première spécialité mathématiques

I — Définition d'une suite

Exercice 01 — Repérer les termes et les rangs

On numérote à partir de 0 : $u_0 = 5$; $u_1 = 9$; $u_2 = 13$; $u_3 = 17$; $u_4 = 21$; $u_5 = 25$.

1. $u_0 = 5$ et $u_3 = 17$.
2. $21 = u_4$: le terme 21 est de rang 4.
3. Le 4^e terme est $u_3 = 17$ (on compte u_0, u_1, u_2, u_3).
4. Le terme suivant est $u_4 = 21$; le précédent est $u_2 = 13$.

Exercice 02 — Une suite qui commence à u_1

1. $v_1 = 1$ et $v_4 = 16$.
2. Le premier terme est v_1 : le 5^e terme est $v_5 = 25$, de rang 5.
3. Ce sont les carrés des rangs : on conjecture $v_n = n^2$.

Exercice 03 — Premier rang

- a) Il faut $n \neq 0$: $n_0 = 1$.
- b) Il faut $n - 3 \geq 0$, soit $n \geq 3$: $n_0 = 3$.
- c) Il faut $n - 5 > 0$ (racine et division), soit $n > 5$: $n_0 = 6$.
- d) Il faut $n \geq 0$ (racine) et $n \neq 0$ (division) : $n_0 = 1$.

Exercice 04 — Les décimales de $\frac{1}{7}$

1. $u_3 = 2$; $u_4 = 8$; $u_5 = 5$; $u_6 = 7$; $u_7 = 1$; $u_8 = 4$. Le premier rang est 1 (u_1 est la première décimale).
2. Les chiffres 1 ; 4 ; 2 ; 8 ; 5 ; 7 se répètent tous les 6 rangs. $20 = 3 \times 6 + 2$, donc $u_{20} = u_2 = 4$; $100 = 16 \times 6 + 4$, donc $u_{100} = u_4 = 8$.

→ Le reste de la division par 6 donne la position dans le motif.

II — Suites définies explicitement

Exercice 05 — Calculer des termes

- a) $u_0 = -3$; $u_1 = 1$; $u_5 = 4 \times 5 - 3 = 17$.
- b) $v_0 = 3$; $v_1 = 2$; $v_5 = 25 - 10 + 3 = 18$.
- c) $w_0 = \frac{2}{1} = 2$; $w_1 = \frac{5}{2}$; $w_5 = \frac{17}{6}$.
- d) $t_0 = 2^0 - 1 = 0$; $t_1 = 1$; $t_5 = 32 - 1 = 31$.

Exercice 06 — Retrouver un rang

1. $u_{10} = 3 \times 10 + 7 = 37$.

2. $3n + 7 = 52$ on résout

$$3n = 45$$

$$n = 15$$

$$u_{15} = 52.$$

3. $3n + 7 = 101$ donne $3n = 94$, soit $n = \frac{94}{3}$, qui n'est pas entier : 101 n'est pas un terme.

Exercice 07 — Exprimer u_{n+1} et u_{n-1}

a) $u_{n+1} = 5(n+1) - 2 = 5n + 3$; $u_{n-1} = 5(n-1) - 2 = 5n - 7$.

b) $v_{n+1} = (n+1)^2 - 4(n+1)$ on remplace n par $(n+1)$

$$v_{n+1} = n^2 + 2n + 1 - 4n - 4$$

$$v_{n+1} = n^2 - 2n - 3$$

$$v_{n-1} = (n-1)^2 - 4(n-1)$$

$$v_{n-1} = n^2 - 2n + 1 - 4n + 4$$

$$v_{n-1} = n^2 - 6n + 5$$

$$v_{n+1} = n^2 - 2n - 3 \text{ et } v_{n-1} = n^2 - 6n + 5.$$

c) $w_{n+1} = \frac{(n+1)+3}{2(n+1)+1} = \frac{n+4}{2n+3}$; $w_{n-1} = \frac{(n-1)+3}{2(n-1)+1} = \frac{n+2}{2n-1}$.

Exercice 08 — Ne pas confondre

a) $u_{n+1} = (n+1)^2 + 2(n+1)$

$$u_{n+1} = n^2 + 2n + 1 + 2n + 2 = n^2 + 4n + 3$$

b) $u_n + 1 = n^2 + 2n + 1$.

c) $u_{2n} = (2n)^2 + 2 \times 2n = 4n^2 + 4n$.

d) $2u_n = 2n^2 + 4n$.

→ Quatre expressions différentes : on remplace n (a, c) ou l'on opère sur le terme (b, d).

III — Suites définies par récurrence

Exercice 09 — Calculer de proche en proche

a) $u_1 = 2 \times 3 - 1 = 5$; $u_2 = 2 \times 5 - 1 = 9$; $u_3 = 2 \times 9 - 1 = 17$.

b) $v_1 = v_0 + 3 \times 0 - 1 = 1$; $v_2 = v_1 + 3 \times 1 - 1 = 3$; $v_3 = v_2 + 3 \times 2 - 1 = 8$.

c) $w_2 = \frac{16}{2} + 4 = 12$; $w_3 = \frac{12}{2} + 4 = 10$; $w_4 = \frac{10}{2} + 4 = 9$.

→ En b), le n de la relation est le rang du terme précédent.

Exercice 10 — Avec un carré, avec une fraction

a) $a_1 = 1^2 + 1 = 2$; $a_2 = 2^2 + 1 = 5$; $a_3 = 5^2 + 1 = 26$.

b) $b_1 = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$; $b_2 = \frac{1}{1+\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}$; $b_3 = \frac{1}{1+\frac{2}{3}} = \frac{3}{5}$.

Exercice 11 — Traduire une situation

a) $u_0 = 1\,800$ et $u_{n+1} = 1,02 u_n$ (+2 % : on multiplie par 1,02).

b) $u_0 = 12\,000$ et $u_{n+1} = 0,95 u_n + 900$ (il reste 95 %, puis on ajoute les arrivants).

c) $u_0 = 500$ et $u_{n+1} = u_n - 40$.

Exercice 12 — Une forêt

- $u_1 = 5\,000 - 0,08 \times 5\,000 + 300 = 5\,000 - 400 + 300 = 4\,900$;
 $u_2 = 0,92 \times 4\,900 + 300 = 4\,508 + 300 = 4\,808$.
- Abatte 8 %, c'est multiplier par $1 - 0,08 = 0,92$; on ajoute ensuite les 300 arbres plantés :
 $u_{n+1} = 0,92 u_n + 300$.

IV — Calculatrice

Exercice 13 — Afficher des termes

- Explicite, Tableau de 0 à 10 :

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
u_n	30	21	14	9	6	5	6	9	14	21	30

- Par exemple X de 0 à 11 et Y de 0 à 32.
- Récurrente d'ordre 1 : $v_{10} = 1\,026$ et $v_{20} = 1\,048\,578$.

Exercice 14 — Conjecturer une expression

- w_0 à w_6 : 1 ; 2 ; 5 ; 10 ; 17 ; 26 ; 37. Puis $w_{10} = 101$ et $w_{50} = 2\,501$.
- Chaque terme est un carré plus 1 : $w_n = n^2 + 1$.

Exercice 15 — Représenter et conjecturer

- 20 ; 10 ; 6,67 ; 5 ; 4 ; 3,33 ; 2,86 ; 2,5 ; 2,22 ; 2.
- Les points descendent : la suite semble décroissante.

Exercice 16 — Le carré ou la puissance ?

- | n | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|-------|---|---|---|---|----|----|----|-----|-----|-----|-------|
| n^2 | 0 | 1 | 4 | 9 | 16 | 25 | 36 | 49 | 64 | 81 | 100 |
| 2^n | 1 | 2 | 4 | 8 | 16 | 32 | 64 | 128 | 256 | 512 | 1 024 |

- $u_n > v_n$ seulement pour $n = 3$; $u_n = v_n$ pour $n = 2$ et $n = 4$.
- On conjecture que, pour $n \geq 5$, $2^n > n^2$: l'écart grandit vite.

V — Programmer en Python

Exercice 17 — Écrire la fonction

```
def terme_v(n):
    v = 4
    for i in range(n):
        v = 3*v - 5
    return v
```

`terme_v(10)` renvoie 88 576.

Exercice 18 — Lire un programme

1. La suite définie par $u_0 = 5$ et $u_{n+1} = \frac{u_n}{2} + 3$: la fonction renvoie u_n .
2. $\text{mystere}(1) = \frac{5}{2} + 3 = 5,5$; $\text{mystere}(2) = \frac{5,5}{2} + 3 = 5,75$; $\text{mystere}(3) = \frac{5,75}{2} + 3 = 5,875$.

Exercice 19 — Une relation qui dépend de n

1. $w_1 = 0 + 0 + 3 = 3$; $w_2 = 3 + 2 + 3 = 8$; $w_3 = 8 + 4 + 3 = 15$.
2. Ligne à compléter : $w = w + 2*i + 3$.
3. `terme_w(10)` renvoie 120.

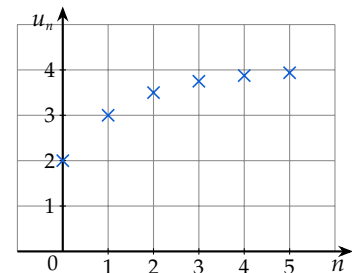
→ À la première boucle, i vaut 0 : on calcule bien w_1 à partir de w_0 .

Exercice 20 — La suite de Fibonacci

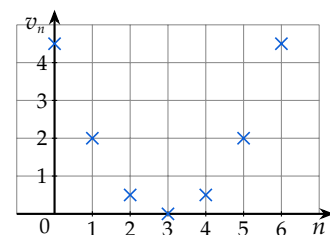
1. $f_2 = 2$; $f_3 = 3$; $f_4 = 5$; $f_5 = 8$; $f_6 = 13$.
2. Ligne à compléter : $a, b = b, a + b$ (le nouveau terme est la somme des deux précédents).
3. `fibonacci(20)` renvoie 10 946.

VI — Représentation graphique**Exercice 21 — Représenter une suite récurrente**

1. $u_0 = 2$; $u_1 = 3$; $u_2 = 3,5$; $u_3 = 3,75$; $u_4 = 3,875$; $u_5 = 3,9375$.
2. Voir le graphique.
3. Les points montent : la suite semble croissante (et se rapprocher de 4).

**Exercice 22 — Représenter une suite explicite**

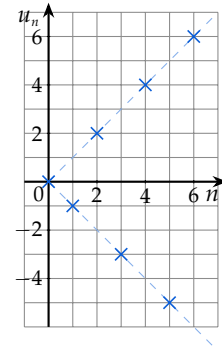
1. 4,5; 2; 0,5; 0; 0,5; 2; 4,5.
2. Voir le graphique.
3. La suite décroît jusqu'au rang 3, puis croît.

**Exercice 23 — Lire un nuage de points**

1. $u_0 = 1$; $u_2 = 4$; $u_5 = 1$.
2. $u_n = 4$ pour $n = 2$ et $n = 3$.
3. La suite croît de u_0 à u_2 , reste égale à 4 de u_2 à u_3 , puis décroît jusqu'à $u_6 = 0$.

Exercice 24 — Des points sur deux droites

1. $0; -1; 2; -3; 4; -5; 6$.
2. Ni l'un ni l'autre : $u_1 < u_0$ mais $u_2 > u_1$.
3. Rangs pairs : $u_n = n$, points sur $y = x$; rangs impairs : $u_n = -n$, points sur $y = -x$.

**VII — Sens de variation : signe de $u_{n+1} - u_n$** **Exercice 25 — Étudier le signe de la différence**

- $u_{n+1} - u_n = 3(n+1)^2 + (n+1) - (3n^2 + n)$
 $u_{n+1} - u_n = 3n^2 + 6n + 3 + n + 1 - 3n^2 - n$
 $u_{n+1} - u_n = 6n + 4$
 $6n + 4 > 0$: (u_n) est **strictement croissante**.
- $v_{n+1} - v_n = n^2 + 2 > 0$: (v_n) est **strictement croissante**.
- $w_{n+1} - w_n = (n+1)^2 - 10(n+1) - (n^2 - 10n)$
 $w_{n+1} - w_n = n^2 + 2n + 1 - 10n - 10 - n^2 + 10n$
 $w_{n+1} - w_n = 2n - 9$
 $2n - 9 \geq 0$ pour $n \geq 4,5$: (w_n) est **strictement croissante à partir du rang 5**.

Exercice 26 — Suites décroissantes

- $u_{n+1} - u_n = 7 - 2(n+1)^2 - 7 + 2n^2 = -4n - 2 < 0$: **strictement décroissante**.
- $v_{n+1} - v_n = -(n-3)^2 \leq 0$: **décroissante** (avec $v_4 = v_3$, elle n'est pas strictement décroissante).
- $w_{n+1} - w_n = \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+1}$
 $w_{n+1} - w_n = \frac{1 \times (n+1)}{(n+2) \times (n+1)} - \frac{1 \times (n+2)}{(n+1) \times (n+2)}$ *même dénominateur*
 $w_{n+1} - w_n = \frac{-1}{(n+1)(n+2)}$
 Un numérateur négatif et un dénominateur positif : **strictement décroissante**.

Exercice 27 — Conjecturer, puis démontrer

1. $u_1 = 13; u_2 = 8; u_3 = 5; u_4 = 4; u_5 = 5$: la suite semble décroître, puis croître à partir du rang 4.
2. $u_{n+1} - u_n = 2n - 7$, positif pour $n \geq 3,5$.
3. La suite est **croissante à partir du rang 4**.

Exercice 28 — Un carré toujours positif

1. $v_{n+1} - v_n = (v_n - 1)^2 \geq 0$ (un carré) : (v_n) est **croissante**.
2. $v_1 = 0 + 1 = 1; v_2 = 1 + 0 = 1; v_3 = 1$. La suite est constante à partir du rang 1 : elle n'est pas strictement croissante.

VIII — Sens de variation : quotient $\frac{u_{n+1}}{u_n}$

Exercice 29 — Comparer le quotient à 1

Tous les termes sont strictement positifs.

a) $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{2 \times 5^{n+1}}{2 \times 5^n} = 5 > 1$: **strictement croissante**.

b) $\frac{v_{n+1}}{v_n} = 0,8 < 1$: **strictement décroissante**.

c) $\frac{w_{n+1}}{w_n} = \frac{4^{n+1}}{n+1} \times \frac{n}{4^n}$ *multiplier par l'inverse*

$$\frac{w_{n+1}}{w_n} = \frac{4n}{n+1}$$

$$\frac{w_{n+1}}{w_n} - 1 = \frac{4n - n - 1}{n+1} = \frac{3n-1}{n+1}$$

Pour $n \geq 1$ on a $3n - 1 > 0$: **strictement croissante**.

Exercice 30 — D'autres quotients

a) $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{3}{2} = 1,5 > 1$: **strictement croissante**.

b) $\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{n+1}{2^{n+1}} \times \frac{2^n}{n} = \frac{n+1}{2n}$ et $\frac{n+1}{2n} - 1 = \frac{1-n}{2n} \leq 0$: **décroissante** ($v_1 = v_2 = \frac{1}{2}$).

c) $\frac{w_{n+1}}{w_n} = \frac{5(n+1)}{n+2}$ et $\frac{5(n+1)}{n+2} - 1 = \frac{4n+3}{n+2} > 0$: **strictement croissante**.

Exercice 31 — Choisir la méthode

a) Quotient : $0,5 < 1$ et termes positifs : **strictement décroissante**.

b) Différence : $v_{n+1} - v_n = 2n + 6 > 0$: **strictement croissante**.

c) Quotient : $\frac{(n+1) \times 2^{n+1}}{n \times 2^n} = \frac{2(n+1)}{n} > 1$: **strictement croissante**.

Exercice 32 — Croissante à partir d'un rang

1. $u_1 = 2; u_2 = 1; u_3 = \frac{8}{9} \simeq 0,89; u_4 = 1; u_5 = 1,28$.

2. $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{2^{n+1}}{(n+1)^2} \times \frac{n^2}{2^n} = \frac{2n^2}{(n+1)^2}$. Ce quotient est ≥ 1 si $2n^2 \geq (n+1)^2$, soit $2n^2 \geq n^2 + 2n + 1$, soit $n^2 - 2n - 1 \geq 0$.

3. $\Delta = 8$; racines $1 - \sqrt{2}$ et $1 + \sqrt{2} \simeq 2,41$. Pour n entier ≥ 1 , $n^2 - 2n - 1 \geq 0$ dès $n \geq 3$: **croissante à partir du rang 3**.

IX — Sens de variation : fonction associée

Exercice 33 — Étudier la fonction associée

a) $f(x) = x^3 + 6x^2 + 1$; $f'(x) = 3x^2 + 12x = 3x(x+4) \geq 0$ sur $[0; +\infty[$: **(u_n) strictement croissante**.

b) $f(x) = \frac{2x+3}{x+1}$; $f'(x) = \frac{2(x+1) - (2x+3)}{(x+1)^2} = \frac{-1}{(x+1)^2} < 0$: **(v_n) strictement décroissante**.

c) $f(x) = x^3 - 3x^2$; $f'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x-2)$; $f(2) = -4$.

x	0	2	$+\infty$	
$f'(x)$	0	—	0	+
$f(x)$	0	$\searrow$	-4	$\nearrow$

(w_n) croissante à partir du rang 2.

Exercice 34 — D'autres fonctions

- $f'(x) = 2x - 8$: f décroît sur $[0; 4]$, croît sur $[4; +\infty[$: (u_n) croissante à partir du rang 4.
- $f(x) = 5 - \frac{4}{x+2}$; $f'(x) = \frac{4}{(x+2)^2} > 0$: (v_n) strictement croissante.
- $f'(x) = \frac{(x^2+1) - x \times 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}$, négatif pour $x \geq 1$:
 (w_n) décroissante à partir du rang 1.

Exercice 35 — Une erreur fréquente

- $u_1 = 0,5 \times 10 + 2 = 7$; $u_2 = 5,5$; $u_3 = 4,75$.
- La suite décroît : l'affirmation est fausse. La propriété ne vaut que pour une suite explicite $u_n = f(n)$.

Exercice 36 — Suite croissante, fonction non croissante

- $f'(x) = 2(x - 0,4)$: f décroît sur $[0; 0,4]$ et croît sur $[0,4; +\infty[$.
- $u_{n+1} - u_n = (n + 0,6)^2 - (n - 0,4)^2$
 $u_{n+1} - u_n = (n + 0,6 - n + 0,4)(n + 0,6 + n - 0,4) \quad a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$
 $u_{n+1} - u_n = 2n + 0,2$
 $2n + 0,2 > 0$: (u_n) strictement croissante.
- Non** : ici la suite croît alors que f n'est pas croissante sur $[0; +\infty[$. La propriété du cours ne se renverse pas.

X — Notion de limite

Exercice 37 — Conjecturer une limite

- $u_9 = 2,5$; $u_{99} = 2,05$; $u_{999} = 2,005$: limite 2.
- $v_{10} = 301$; $v_{100} = 30\,001$; $v_{1\,000} = 3\,000\,001$: limite $+\infty$.
- 4 ; -4 ; 4 ; -4 : pas de limite.

Exercice 38 — Limite finie ou infinie

- 95 ; -9 995 ; -999 995 : limite $-\infty$.
- 0,01 ; 0,000 1 ; 0,000 001 : limite 0.
- 2,1 ; 2,01 ; 2,001 : limite 2.

Exercice 39 — Avec la calculatrice

- $u_{10} \simeq 5,995\,117$; $u_{20} \simeq 5,999\,995$; $u_{30} \simeq 6,000\,000$.
- On conjecture $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 6$.

Exercice 40 — Alternier et converger

- $u_{10} = 0,1$; $u_{11} \simeq -0,091$; $u_{100} = 0,01$; $u_{101} \simeq -0,009\,9$.
- Le signe change à chaque rang, mais les termes se rapprochent de 0 : on conjecture $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.
 → Une suite qui alterne peut avoir une limite : il suffit que les écarts à 0 deviennent aussi petits que l'on veut.

XI — Problèmes : déterminer un seuil**Exercice 41 — Abonnés d'une newsletter**

- $u_1 = 0,85 \times 3\,000 + 800 = 3\,350$; $u_2 = 0,85 \times 3\,350 + 800 = 3\,647,5$.
- 15 % partent : il reste $0,85 u_n$; on ajoute 800.
-

```
def seuil():
    u = 3000
    n = 0
    while u <= 5000 :
        u = 0.85*u + 800
        n = n + 1
    return n
```

- $u_{11} \simeq 4\,942,9$ et $u_{12} \simeq 5\,001,4$: au bout de 12 mois.

Exercice 42 — Seuil d'une suite explicite

- while $u \leq 1000$: puis $u = 2*n**2 + 3*n$ (on calcule directement le terme de rang n).
- $u_{21} = 945$ et $u_{22} = 1\,034$: $n = 22$.

Exercice 43 — Élimination d'un médicament

- $m_1 = 32$; $m_2 = 25,6$; $m_{n+1} = 0,8 m_n$.
-

```
def seuil():
    m = 40
    n = 0
    while m >= 5 :
        m = 0.8*m
        n = n + 1
    return n
```

- $m_9 \simeq 5,37$ et $m_{10} \simeq 4,29$: 10 heures.

Exercice 44 — Qui dépasse l'autre ?

- Tant que $b_n \leq a_n = 500 + 40n$, on passe au mois suivant : la fonction renvoie le premier mois où le second site a plus d'abonnés que le premier.
- $b_{19} \simeq 1\,223 < a_{19} = 1\,260$ et $b_{20} \simeq 1\,345 > a_{20} = 1\,300$: elle renvoie 20 ; au bout de 20 mois, le site à +10 % dépasse l'autre.

Exercices type bac

Exercice 45 — Automatismes (QCM)

1. b) : $(n+1)^2 - 1 = n^2 + 2n$; 2. b) : $u_1 = 5$ puis $u_2 = 14$; 3. c); 4. b) : la différence est négative; 5. b).

Exercice 46 — Une plateforme de covoiturage

- $u_1 = 0,9 \times 600 + 40 = 580$; $u_2 = 0,9 \times 580 + 40 = 562$. Il reste 90 % des conducteurs, puis 40 s'ajoutent : $u_{n+1} = 0,9 u_n + 40$.
- $n = 0$: $400 + 200 = 600 = u_0$; $n = 1$: $400 + 180 = 580 = u_1$.
- $u_{n+1} - u_n = 200 \times 0,9^{n+1} - 200 \times 0,9^n$ *les 400 s'éliminent*
 $u_{n+1} - u_n = 200 \times 0,9^n (0,9 - 1)$ *facteur commun*
 $u_{n+1} - u_n = -20 \times 0,9^n$
 $0,9^n > 0$, donc la différence est négative : (u_n) est strictement décroissante.
- $0,9^n$ se rapproche de 0 : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 400$. Le nombre de conducteurs se stabiliserait vers 400.
- while $u \geq 450$: et $u = 0,9 * u + 40$. $u_{13} \simeq 450,8$ et $u_{14} \simeq 445,8$: la fonction renvoie 14, soit mars 2027.

Exercice 47 — Coût moyen de fabrication

- $c_1 = 401$; $c_{10} = 10 + 40 = 50$; $c_{20} = 20 + 20 = 40$.
- $f'(x) = 1 - \frac{400}{x^2}$ $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$
 $f'(x) = \frac{x^2 - 400}{x^2} = \frac{(x-20)(x+20)}{x^2}$

x	1	20	$+\infty$
$f'(x)$	—	0	+
$f(x)$	401	40	

- (c_n) décroît jusqu'au rang 20, puis croît : le coût moyen est le plus faible pour 20 lampes (40 €).
- Pour $n > 0$, $c_n > 50$ revient à $n^2 + 400 > 50n$, soit $n^2 - 50n + 400 > 0$. $\Delta = 900$; racines 10 et 40; le trinôme est positif à l'extérieur des racines. Pour $n \geq 20$: $n \geq 41$.