

SUITES NUMÉRIQUES

Cours — Première spécialité

Comment utiliser ce cours

Chaque partie commence par ce qu’il faut **savoir** (définitions, propriétés), puis vient ce qu’il faut **savoir faire** : une méthode, avec des **exemples corrigés** faits en classe, puis des exercices « **À vous de jouer** » à chercher seul.

I — Définition d’une suite

Définition 1 — Suite numérique

Une **suite** (u_n) associe à chaque entier naturel n (à partir d’un certain rang n_0) un nombre réel noté u_n .

C’est une fonction définie sur les entiers : on écrit u_n plutôt que $u(n)$.

- n est le **rang** (ou l’indice);
- u_n est le **terme de rang** n ;
- (u_n) , avec les parenthèses, désigne toute la suite.

rang n	0	1	2	3	4
terme u_n	0	1	4	9	16

la suite des carrés : $u_3 = 9$

Termes consécutifs

u_n et u_{n+1} se suivent : u_{n+1} est le terme **suivant** u_n et u_{n-1} est le terme **précédent**. Si le premier terme est u_0 , le 5^e terme est u_4 : on compte à partir de 0.

L’indice s’écrit en petit

Dans u_4 , le rang 4 est un **indice** : il s’écrit **en petit, en bas à droite** du u . Écrit à la même taille, « $u\ 4$ » se lirait $u \times 4$: ce n’est pas u_4 . De même, u_{n+1} (terme suivant) n’est pas $u_n + 1$ (terme plus un).

Méthode 1 — Repérer les termes et les rangs

Exemples corrigés

Une suite (u_n) , de premier terme u_0 , commence par : 3 ; 8 ; 15 ; 24 ; 35 ; 48.

- Donner u_0 et u_4 .
- Quel est le rang du terme 24 ?
- Quel est le 3^e terme de la suite ?
- Donner le terme qui suit u_4 , puis celui qui le précède.

On numérote les termes à partir de 0 :

le premier terme est u_0

n	0	1	2	3	4	5
u_n	3	8	15	24	35	48

a)

$u_0 = 3$ et $u_4 = 35$.

on lit sous $n = 0$ et sous $n = 4$

b)

$24 = u_3$: le terme 24 est de rang 3.

le rang est l’indice

c)

Le 3^e terme est $u_2 = 15$.

on compte u_0 , u_1 puis u_2

d)

Le terme suivant est $u_5 = 48$; le précédent est $u_3 = 24$.

u_{4+1} et u_{4-1}

À vous de jouer

Une suite (v_n) , de premier terme v_0 , commence par : 2; 6; 18; 54; 162; 486.

- Donner v_0 et v_4 .
- Quel est le rang du terme 54?
- Quel est le 3^e terme de la suite?
- Donner le terme qui suit v_4 , puis celui qui le précède.

Réponses : a) $v_0 = 2$ et $v_4 = 162$. b) Rang 3. c) $v_2 = 18$. d) $v_5 = 486$ et $v_3 = 54$.

Méthode 2 — Trouver le premier rang d'une suite

Exemples corrigés

Pour chaque suite, donner le premier rang n_0 à partir duquel elle est définie.

- $u_n = \frac{2}{n}$
- $v_n = \sqrt{n-4}$
- $w_n = \frac{3}{\sqrt{n-1}}$

a)

On ne divise pas par 0 : il faut $n \neq 0$.

valeur interdite

(u_n) est définie à partir du rang $n_0 = 1$.

premier entier différent de 0

b)

Sous la racine, il faut $n - 4 \geq 0$, soit $n \geq 4$.

une racine carrée n'existe que pour un nombre positif

(v_n) est définie à partir du rang $n_0 = 4$.

$$v_4 = \sqrt{0} = 0$$

c)

Il faut $n - 1 \geq 0$ (racine) et $\sqrt{n-1} \neq 0$ (division), soit $n - 1 > 0$.

les deux conditions

$n > 1$: (w_n) est définie à partir du rang $n_0 = 2$.

n est entier : après 1 vient 2

À vous de jouer

Pour chaque suite, donner le premier rang n_0 à partir duquel elle est définie.

- $a_n = -\frac{4}{n}$
- $b_n = \sqrt{n-6}$
- $c_n = \frac{5}{\sqrt{n-2}}$

Réponses : a) $n_0 = 1$. b) $n_0 = 6$. c) $n_0 = 3$.

► **À faire** : fiche d'exercices du chapitre, exercices 1 à 4.

II — Suites définies explicitement

Définition 2 — Suite définie explicitement

Une suite est **définie explicitement** lorsque u_n s'écrit directement en fonction de n : $u_n = f(n)$. L'expression de u_n s'appelle le **terme général**.

Exemple : avec $u_n = 2n + 1$, on obtient $u_{10} = 21$ sans calculer les termes précédents.

Méthode 3 — Calculer un terme d'une suite explicite

Exemples corrigés

Pour tout entier naturel n , on pose $u_n = n^2 - 3n + 5$ et $v_n = \frac{2n+1}{n+2}$.

- a) Calculer u_0 et u_4 .
- b) Calculer v_0 et v_3 .

a)

$$u_0 = 0^2 - 3 \times 0 + 5 \quad \text{on remplace } n \text{ par } 0$$

$$u_0 = 5$$

$$u_4 = 4^2 - 3 \times 4 + 5 \quad \text{on remplace } n \text{ par } 4$$

$$u_4 = 16 - 12 + 5 = 9$$

b)

$$v_0 = \frac{2 \times 0 + 1}{0 + 2} \quad \text{on remplace } n \text{ par } 0$$

$$v_0 = \frac{1}{2}$$

$$v_3 = \frac{2 \times 3 + 1}{3 + 2} \quad \text{on remplace } n \text{ par } 3$$

$$v_3 = \frac{7}{5} = 1,4$$

À vous de jouer

Pour tout entier naturel n , on pose $a_n = 2n^2 - n + 1$ et $b_n = \frac{3n-1}{n+1}$.

- a) Calculer a_0 et a_3 .
- b) Calculer b_0 et b_4 .

Réponses : a) $a_0 = 1$ et $a_3 = 16$. b) $b_0 = -1$ et $b_4 = \frac{11}{5} = 2,2$.

Attention : u_{n+1} n'est pas $u_n + 1$

Pour obtenir u_{n+1} , on remplace n par $(n+1)$ dans l'expression ; $u_n + 1$, c'est le terme u_n auquel on ajoute 1. De même, u_{n-1} s'obtient en remplaçant n par $(n-1)$.

Méthode 4 — Exprimer u_{n+1} et u_{n-1} en fonction de n

Exemples corrigés

Pour tout entier naturel n , on pose $u_n = n^2 + 3$ et $v_n = \frac{n}{n+2}$.

- a) Exprimer u_{n+1} en fonction de n , puis le comparer à $u_n + 1$.
- b) Exprimer u_{n-1} en fonction de n (pour $n \geq 1$).
- c) Exprimer v_{n+1} en fonction de n .

a)

$$u_{n+1} = (n+1)^2 + 3 \quad \text{on remplace } n \text{ par } (n+1)$$

$$u_{n+1} = n^2 + 2n + 1 + 3 \quad (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$u_{n+1} = n^2 + 2n + 4$$

$$u_n + 1 = n^2 + 3 + 1 \quad \text{on ajoute 1 au terme } u_n$$

$$u_n + 1 = n^2 + 4$$

Les deux expressions sont différentes : $u_{n+1} \neq u_n + 1$.

elles diffèrent de $2n$

b)

$$u_{n-1} = (n-1)^2 + 3 \quad \text{on remplace } n \text{ par } (n-1)$$

$$u_{n-1} = n^2 - 2n + 1 + 3 \quad (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$u_{n-1} = n^2 - 2n + 4$$

c)

$$v_{n+1} = \frac{n+1}{(n+1)+2} \quad \text{on remplace chaque } n \text{ par } (n+1)$$

$$v_{n+1} = \frac{n+1}{n+3}$$

À vous de jouer

Pour tout entier naturel n , on pose $a_n = n^2 + n$ et $b_n = \frac{2n}{n+1}$.

a) Exprimer a_{n+1} en fonction de n , puis le comparer à $a_n + 1$.

b) Exprimer a_{n-1} en fonction de n (pour $n \geq 1$).

c) Exprimer b_{n+1} en fonction de n .

Réponses : a) $a_{n+1} = n^2 + 3n + 2$ et $a_n + 1 = n^2 + n + 1$: différents. b) $a_{n-1} = n^2 - n$. c) $b_{n+1} = \frac{2n+2}{n+2}$.

► **À faire** : fiche d'exercices du chapitre, exercices 5 à 8.

III — Suites définies par récurrence

Définition 3 — Suite définie par récurrence

Une suite est **définie par récurrence** lorsqu'on donne :

- son premier terme, par exemple $u_0 = 2$;
- une **relation de récurrence**, qui donne chaque terme à partir du précédent, par exemple $u_{n+1} = 3u_n - 1$.

On calcule alors les termes **de proche en proche** : pour connaître u_{20} , il faut d'abord u_{19} , donc u_{18} ...

$$u_0 = 2 \xrightarrow{\times 3 - 1} u_1 = 5 \xrightarrow{\times 3 - 1} u_2 = 14$$

Méthode 5 — Calculer des termes de proche en proche

Exemples corrigés

Pour chaque suite, calculer les trois termes qui suivent le premier.

a) $u_0 = 4$ et, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = 2u_n - 3$.

b) $v_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n , $v_{n+1} = v_n + 2n + 1$.

c) $w_1 = 10$ et, pour tout entier $n \geq 1$, $w_{n+1} = \frac{w_n}{2} + 1$.

a)

$$u_1 = 2u_0 - 3 \quad \text{la relation avec } n = 0$$

$$u_1 = 2 \times 4 - 3 = 5 \quad \text{on remplace } u_0 \text{ par sa valeur}$$

$$u_2 = 2u_1 - 3 \quad \text{la relation avec } n = 1$$

$$u_2 = 2 \times 5 - 3 = 7$$

$$u_3 = 2u_2 - 3$$

$$u_3 = 2 \times 7 - 3 = 11$$

b)

$$v_1 = v_0 + 2 \times 0 + 1 \quad n = 0 : \text{on remplace aussi } n \text{ par } 0$$

$$v_1 = 1 + 0 + 1 = 2$$

$$v_2 = v_1 + 2 \times 1 + 1 \quad n = 1 : \text{le rang du terme précédent}$$

$$v_2 = 2 + 2 + 1 = 5$$

$$v_3 = v_2 + 2 \times 2 + 1 \quad n = 2$$

$$v_3 = 5 + 4 + 1 = 10$$

c)

$$w_2 = \frac{w_1}{2} + 1 \quad \text{le premier terme est } w_1 : \text{on part de } n = 1$$

$$w_2 = \frac{10}{2} + 1 = 6$$

$$w_3 = \frac{6}{2} + 1 = 4$$

$$w_4 = \frac{4}{2} + 1 = 3$$

À vous de jouer

Pour chaque suite, calculer les trois termes qui suivent le premier.

a) $a_0 = 3$ et, pour tout entier naturel n , $a_{n+1} = 3a_n - 5$.

b) $b_0 = 2$ et, pour tout entier naturel n , $b_{n+1} = b_n + 4n - 1$.

c) $c_1 = 20$ et, pour tout entier $n \geq 1$, $c_{n+1} = \frac{c_n}{2} + 2$.

Réponses : a) $a_1 = 4$; $a_2 = 7$; $a_3 = 16$. b) $b_1 = 1$; $b_2 = 4$; $b_3 = 11$. c) $c_2 = 12$; $c_3 = 8$; $c_4 = 6$.

Méthode 6 — Traduire une situation par une relation de récurrence

Exemples corrigés

Une médiathèque compte 5 000 abonnés au début de 2026. Chaque année, 20 % des abonnés ne renouvellent pas leur abonnement et 1 200 nouveaux lecteurs s'inscrivent. On note u_n le nombre d'abonnés au début de l'année 2026 + n .

a) Donner u_0 , puis calculer u_1 .

b) Justifier que, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = 0,8u_n + 1\,200$.

c) Calculer u_2 .

a)

$$u_0 = 5\,000.$$

début de 2026 : $n = 0$

$$u_1 = 5\,000 - 0,2 \times 5\,000 + 1\,200 \quad \text{on retire 20\%, on ajoute les nouveaux}$$

$$u_1 = 5\,000 - 1\,000 + 1\,200 = 5\,200$$

b)

Retirer 20 %, c'est multiplier par $1 - 0,2 = 0,8$: il reste $0,8u_n$ *coefficient multiplicateur*
abonnés.

On ajoute les 1 200 inscrits : $u_{n+1} = 0,8u_n + 1\,200$. *d'une année à la suivante*

c)

$$u_2 = 0,8 \times 5\,200 + 1\,200 \quad \text{la relation avec } n = 1$$

$$u_2 = 4\,160 + 1\,200 = 5\,360$$

À vous de jouer

Une citerne de jardin contient 2 000 L d'eau le 1^{er} juin. Chaque semaine, on utilise 10 % de l'eau pour arroser et la pluie apporte 150 L. On note v_n le volume d'eau, en litres, au bout de n semaines.

- Donner v_0 , puis calculer v_1 .
- Justifier que, pour tout entier naturel n , $v_{n+1} = 0,9v_n + 150$.
- Calculer v_2 .

Réponses : a) $v_0 = 2\,000$ et $v_1 = 1\,950$. b) Retirer 10 %, c'est multiplier par 0,9, puis on ajoute 150. c) $v_2 = 1\,905$.

► **À faire** : fiche d'exercices du chapitre, exercices 9 à 12.

IV — Calculatrice

Application Suites de la NumWorks

Pour	On fait
entrer une suite explicite	Onglet Suites, Ajouter une suite, Explicite, puis par exemple $u_n = n^2 - 8n + 20$ (n avec la touche $[x, n, t]$).
entrer une suite récurrente	Ajouter une suite, Récurrente d'ordre 1, puis la relation $u_{n+1} = \dots$ (u_n se trouve dans la boîte à outils $[toolbox]$) et le premier terme u_0 .
afficher des termes	Onglet Tableau, Régler l'intervalle : N début, N fin.
représenter la suite	Onglet Graphique : les points $(n; u_n)$; menu Axes pour régler la fenêtre.

Les intitulés peuvent varier selon la version du logiciel.

Méthode 7 — Calculer des termes avec la calculatrice

Exemples corrigés

Pour tout entier naturel n , on pose $u_n = n^2 - 8n + 20$. La suite (v_n) est définie par $v_0 = 1$ et $v_{n+1} = 2v_n + 3$.

- Afficher les termes u_0 à u_8 et les recopier.
- Représenter (u_n) à la calculatrice.
- Donner v_{10} et v_{20} .

a)

Explicite : $u_n = n^2 - 8n + 20$; Tableau : N début 0, N fin 8. *du rang 0 au rang 8*

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8
u_n	20	13	8	5	4	5	8	13	20

b)

Graphique, Axes : $X_{\min} = 0$, $X_{\max} = 9$, $Y_{\min} = 0$, $Y_{\max} = 22$.

un peu au-delà des valeurs du tableau

c)

Récurrente d'ordre 1 : $v_{n+1} = 2v_n + 3$ et $v_0 = 1$.

la relation et le premier terme

Tableau jusqu'à 20 : $v_{10} = 4\,093$ et $v_{20} = 4\,194\,301$.

la calculatrice enchaîne les termes à notre place

À vous de jouer

Pour tout entier naturel n , on pose $a_n = n^2 - 6n + 11$. La suite (b_n) est définie par $b_0 = 2$ et $b_{n+1} = 3b_n - 2$.

- Afficher les termes a_0 à a_6 et les recopier.
- Représenter (a_n) à la calculatrice.
- Donner b_{10} et b_{15} .

Réponses : a) 11; 6; 3; 2; 3; 6; 11. b) Par exemple X de 0 à 7 et Y de 0 à 12. c) $b_{10} = 59\,050$ et $b_{15} = 14\,348\,908$.

► **À faire** : fiche d'exercices du chapitre, exercices 13 à 16.

V — Programmer en Python

Python sur la NumWorks

Application Python, Ajouter un script : on tape la fonction, puis Exécuter le script ; dans la console, on appelle la fonction, par exemple `terme_v(10)`. Une boucle `for i in range(n)` répète n fois les lignes décalées en dessous d'elle.

Méthode 8 — Programmer le calcul d'un terme en Python

Exemples corrigés

On reprend la suite (v_n) définie par $v_0 = 1$ et $v_{n+1} = 2v_n + 3$.

- Écrire une fonction `terme_v(n)` qui renvoie v_n .
- Que renvoie `terme_v(10)` ?

a)

```
def terme_v(n):
    v = 1
    for i in range(n):
        v = 2*v + 3
    return v
```

$v = 1$ donne v_0 ; la boucle tourne n fois, de v_0 à v_n ; dans $v = 2*v + 3$, le nouveau v est le terme suivant, l'ancien est le terme précédent

b)

`terme_v(10)` renvoie 4093 : $v_{10} = 4\,093$.

comme avec la calculatrice

À vous de jouer

On reprend la suite (b_n) définie par $b_0 = 2$ et $b_{n+1} = 3b_n - 2$.

- Écrire une fonction `terme_b(n)` qui renvoie b_n .
- Que renvoie `terme_b(10)` ?

Réponses : a) $b = 2$, puis $b = 3*b - 2$ dans la boucle. b) 59050.

► **À faire** : fiche d'exercices du chapitre, exercices 17 à 20.

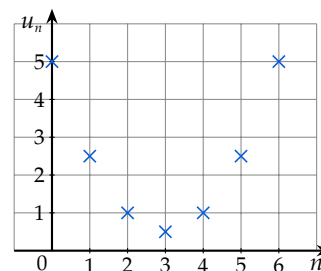
VI — Représentation graphique

Définition 4 — Représentation graphique d'une suite

Dans un repère, la **représentation graphique** de la suite (u_n) est le nuage des points de coordonnées $(n; u_n)$.

Ces points sont **isolés** : n ne prend que des valeurs entières, on ne les relie donc pas.

Ci-contre : $u_n = 0,5n^2 - 3n + 5$, de u_0 à u_6 .



Méthode 9 — Représenter une suite et conjecturer ses variations

Exemples corrigés

La suite (u_n) est définie par $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = 0,5u_n + 3$.

- Dresser le tableau des termes u_0 à u_5 (arrondis à 0,01).
- Représenter ces termes dans un repère.
- Conjecturer le sens de variation de la suite.

a)

$u_1 = 0,5 \times 1 + 3 = 3,5$, puis de même pour les suivants.

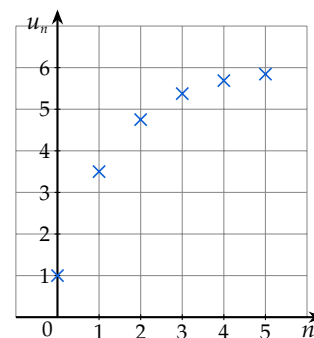
de proche en proche, ou avec la calculatrice

n	0	1	2	3	4	5
u_n	1	3,5	4,75	5,38	5,69	5,84

b) et c)

On place un point par colonne du tableau : $(0; 1)$, $(1; 3,5)$, $(2; 4,75)$...

Les points montent de gauche à droite : la suite semble **croissante**. C'est une conjecture, démontrée à la partie VII.



À vous de jouer

La suite (v_n) est définie par $v_0 = 8$ et, pour tout entier naturel n , $v_{n+1} = 0,5v_n + 1$.

- Dresser le tableau des termes v_0 à v_5 (arrondis à 0,01).
- Représenter ces termes dans un repère.
- Conjecturer le sens de variation de la suite.

Réponses : a) 8 ; 5 ; 3,5 ; 2,75 ; 2,38 ; 2,19. c) Les points descendent : la suite semble décroissante.

► **À faire** : fiche d'exercices du chapitre, exercices 21 à 24.

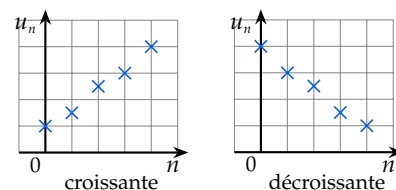
VII — Sens de variation : signe de $u_{n+1} - u_n$

Définition 5 — Suite croissante, suite décroissante

La suite (u_n) est :

- **croissante** si, pour tout n , $u_{n+1} \geq u_n$;
- **décroissante** si, pour tout n , $u_{n+1} \leq u_n$;
- **constante** si, pour tout n , $u_{n+1} = u_n$.

Avec $>$ ou $<$, elle est **strictement** croissante ou décroissante. Si l'inégalité n'est vraie que pour $n \geq p$, la suite est croissante (ou décroissante) à **partir du rang** p .



Propriété 1 — Signe de la différence

- Si, pour tout n , $u_{n+1} - u_n \geq 0$, alors (u_n) est croissante.
- Si, pour tout n , $u_{n+1} - u_n \leq 0$, alors (u_n) est décroissante.

En effet, $u_{n+1} - u_n \geq 0$ revient à $u_{n+1} \geq u_n$ (on ajoute u_n aux deux membres).

Méthode 10 — Étudier le sens de variation par la différence

Exemples corrigés

Étudier le sens de variation de chaque suite.

- $u_n = 2n^2 + n$ pour tout entier naturel n .
- $v_0 = 3$ et, pour tout entier naturel n , $v_{n+1} = v_n - n^2 - 1$.
- $w_n = n^2 - 6n$ pour tout entier naturel n .

a)

On exprime d'abord u_{n+1} :

on remplace n par $(n+1)$

$$u_{n+1} = 2(n+1)^2 + (n+1) \quad \text{on recopie l'expression}$$

$$u_{n+1} = 2n^2 + 4n + 2 + n + 1 \quad (n+1)^2 = n^2 + 2n + 1$$

$$u_{n+1} = 2n^2 + 5n + 3$$

Puis la différence :

on soustrait u_n entre parenthèses

$$u_{n+1} - u_n = 2n^2 + 5n + 3 - (2n^2 + n)$$

$$u_{n+1} - u_n = 2n^2 + 5n + 3 - 2n^2 - n \quad \text{le signe } - \text{ change tous les signes}$$

$$u_{n+1} - u_n = 4n + 3$$

Comme $n \geq 0$, on a $4n + 3 > 0$: la suite (u_n) est strictement croissante.

une différence positive pour tout n

b)

$$v_{n+1} - v_n = v_n - n^2 - 1 - v_n \quad \text{on remplace } v_{n+1} \text{ par la relation}$$

$$v_{n+1} - v_n = -n^2 - 1$$

$n^2 \geq 0$, donc $-n^2 - 1 < 0$: la suite (v_n) est strictement décroissante.

pas besoin de v_0

c)

$$w_{n+1} = (n+1)^2 - 6(n+1) \quad \text{on recopie l'expression}$$

$$w_{n+1} = n^2 + 2n + 1 - 6n - 6$$

$$w_{n+1} = n^2 - 4n - 5$$

$$w_{n+1} - w_n = n^2 - 4n - 5 - (n^2 - 6n)$$

$$w_{n+1} - w_n = 2n - 5 \quad \text{les } n^2 \text{ s'éliminent}$$

Signe de $2n - 5$:

une inéquation du premier degré

$$2n - 5 \geq 0$$

$$2n \geq 5$$

$$n \geq 2,5$$

n est entier : pour $n \geq 3$, $w_{n+1} - w_n > 0$. La suite (w_n) est strictement croissante à partir du rang 3.

avant, elle décroît : $w_0 = 0$ et $w_3 = -9$

À vous de jouer

Étudier le sens de variation de chaque suite.

a) $a_n = 3n^2 + 2n$ pour tout entier naturel n .

b) $b_0 = 10$ et, pour tout entier naturel n , $b_{n+1} = b_n - 2n^2 - 3$.

c) $c_n = n^2 - 8n$ pour tout entier naturel n .

Réponses : a) $a_{n+1} - a_n = 6n + 5 > 0$: strictement croissante. b) $b_{n+1} - b_n = -2n^2 - 3 < 0$: strictement décroissante. c) $c_{n+1} - c_n = 2n - 7$: strictement croissante à partir du rang 4.

► **À faire** : fiche d'exercices du chapitre, exercices 25 à 28.

VIII — Sens de variation : quotient $\frac{u_{n+1}}{u_n}$

D'où vient le quotient ? Une suite est croissante quand $u_{n+1} \geq u_n$; si ses termes sont strictement positifs, on peut diviser par u_n .

$$u_{n+1} \geq u_n \quad \text{la suite est croissante (définition 5)}$$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \geq \frac{u_n}{u_n} \quad \text{on divise par } u_n > 0 : \text{le sens ne change pas}$$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1 \quad \frac{u_n}{u_n} = 1$$

Comparer u_{n+1} à u_n revient donc à comparer le quotient $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ à 1 ; de même, $u_{n+1} \leq u_n$ donne $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq 1$.

Propriété 2 — Comparer le quotient à 1

Si tous les termes de la suite (u_n) sont strictement positifs :

- si, pour tout n , $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1$, alors (u_n) est croissante ;
- si, pour tout n , $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq 1$, alors (u_n) est décroissante.

Cette méthode convient quand u_n est un produit, en particulier avec une puissance 3^n , $0,5^n$... : le quotient se simplifie.

Méthode 11 — Étudier le sens de variation par le quotient

Exemples corrigés

Étudier le sens de variation de chaque suite.

- a) $u_n = 5 \times 3^n$ pour tout entier naturel n .
 b) $v_n = 8 \times 0,5^n$ pour tout entier naturel n .
 c) $w_n = \frac{2^n}{n}$ pour tout entier $n \geq 1$.

a) $5 > 0$ et $3^n > 0$, donc $u_n > 0$ pour tout n . *on vérifie d'abord le signe des termes*

$$\begin{aligned}\frac{u_{n+1}}{u_n} &= \frac{5 \times 3^{n+1}}{5 \times 3^n} && \text{on recopie} \\ \frac{u_{n+1}}{u_n} &= \frac{\cancel{5} \times 3 \times \cancel{3^n}}{\cancel{5} \times \cancel{3^n}} && 3^{n+1} = 3 \times 3^n \\ \frac{u_{n+1}}{u_n} &= 3\end{aligned}$$

$3 > 1$: la suite (u_n) est strictement croissante. *chaque terme est le triple du précédent*

b) $8 > 0$ et $0,5^n > 0$, donc $v_n > 0$ pour tout n . *signe des termes*

$$\begin{aligned}\frac{v_{n+1}}{v_n} &= \frac{8 \times 0,5^{n+1}}{8 \times 0,5^n} && \text{on recopie} \\ \frac{v_{n+1}}{v_n} &= 0,5 && \text{même simplification qu'en a)}\end{aligned}$$

$0,5 < 1$: la suite (v_n) est strictement décroissante. *chaque terme est la moitié du précédent*

c) Pour $n \geq 1$, $2^n > 0$ et $n > 0$, donc $w_n > 0$. *signe des termes*

$$\begin{aligned}\frac{w_{n+1}}{w_n} &= \frac{2^{n+1}}{n+1} \times \frac{n}{2^n} && \text{diviser par } w_n, \text{ c'est multiplier par son inverse} \\ \frac{w_{n+1}}{w_n} &= \frac{2 \times \cancel{2^n} \times n}{(n+1) \times \cancel{2^n}} && 2^{n+1} = 2 \times 2^n \\ \frac{w_{n+1}}{w_n} &= \frac{2n}{n+1}\end{aligned}$$

On compare ce quotient à 1 par une différence : *signe de $\frac{w_{n+1}}{w_n} - 1$*

$$\begin{aligned}\frac{w_{n+1}}{w_n} - 1 &= \frac{2n}{n+1} - \frac{n+1}{n+1} && 1 = \frac{n+1}{n+1} \\ \frac{w_{n+1}}{w_n} - 1 &= \frac{2n - n - 1}{n+1} \\ \frac{w_{n+1}}{w_n} - 1 &= \frac{n-1}{n+1}\end{aligned}$$

Pour $n \geq 1$: $n-1 \geq 0$ et $n+1 > 0$, donc $\frac{w_{n+1}}{w_n} \geq 1$. La suite (w_n) est croissante. *$w_1 = w_2 = 2$, puis elle augmente*

À vous de jouer

Étudier le sens de variation de chaque suite.

- a) $a_n = 4 \times 2^n$ pour tout entier naturel n .
 b) $b_n = 6 \times 0,8^n$ pour tout entier naturel n .

c) $c_n = \frac{3^n}{n}$ pour tout entier $n \geq 1$.

Réponses : a) Quotient $2 > 1$: strictement croissante. b) Quotient $0,8 < 1$: strictement décroissante. c) Quotient $\frac{3n}{n+1}$ et $\frac{3n}{n+1} - 1 = \frac{2n-1}{n+1} > 0$: strictement croissante.

► **À faire** : fiche d'exercices du chapitre, exercices 29 à 32.

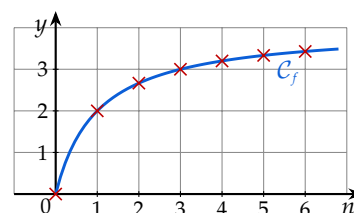
IX — Sens de variation : fonction associée

Propriété 3 — Suite $u_n = f(n)$

Soit (u_n) définie par $u_n = f(n)$, où f est une fonction définie sur $[0; +\infty[$.

- Si f est croissante sur $[0; +\infty[$, alors (u_n) est croissante.
- Si f est décroissante sur $[0; +\infty[$, alors (u_n) est décroissante.

Les points $(n; u_n)$ sont sur la courbe de f : ils suivent ses variations.



Démonstration (cas croissant).

$$n < n + 1 \quad \text{deux rangs qui se suivent}$$

$$f(n) \leq f(n + 1) \quad f \text{ croissante conserve l'ordre}$$

$$u_n \leq u_{n+1} \quad \text{car } u_n = f(n) \text{ et } u_{n+1} = f(n + 1)$$

Attention : seulement pour une suite explicite

Pour une suite définie par récurrence, $u_{n+1} = f(u_n)$, les variations de f ne donnent pas celles de la suite : $x \mapsto 0,5x + 1$ est croissante, pourtant la suite $v_0 = 8, v_{n+1} = 0,5v_n + 1$ (méthode 9) est décroissante.

Méthode 12 — Étudier le sens de variation à l'aide d'une fonction

Exemples corrigés

Étudier le sens de variation de chaque suite, définie pour tout entier naturel n .

a) $u_n = n^3 + 3n^2 + 2$

b) $v_n = \frac{3n+1}{n+2}$

c) $w_n = n^3 - 12n$

a)

On pose $f(x) = x^3 + 3x^2 + 2$ sur $[0; +\infty[: u_n = f(n)$.

la fonction associée

$$f'(x) = 3x^2 + 6x \quad \text{on dérive}$$

$$f'(x) = 3x(x+2) \quad \text{on factorise pour le signe}$$

Pour $x \geq 0 : 3x \geq 0$ et $x+2 > 0$, donc $f'(x) \geq 0$; f est croissante sur $[0; +\infty[$.

f' ne s'annule qu'en 0

La suite (u_n) est donc strictement croissante.

propriété 3

b)

On pose $f(x) = \frac{3x+1}{x+2}$ sur $[0; +\infty[$.

la fonction associée

$$f'(x) = \frac{3(x+2) - (3x+1) \times 1}{(x+2)^2} \quad \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

$$f'(x) = \frac{3x+6-3x-1}{(x+2)^2}$$

$$f'(x) = \frac{5}{(x+2)^2}$$

$5 > 0$ et $(x+2)^2 > 0$: $f'(x) > 0$, donc f est strictement croissante.

un carré non nul est positif

La suite (v_n) est donc strictement croissante.

propriété 3

c)

On pose $f(x) = x^3 - 12x$ sur $[0; +\infty[$.

la fonction associée

$$f'(x) = 3x^2 - 12 \quad \text{on dérive}$$

$$f'(x) = 3(x-2)(x+2) \quad x^2 - 4 = (x-2)(x+2)$$

$$f(2) = 8 - 24 = -16 \quad \text{image de la racine 2}$$

x	0	2	$+\infty$
$f'(x)$		0	+
$f(x)$	0	-16	

f est croissante sur $[2; +\infty[$: la suite (w_n) est croissante à partir du rang 2.

avant le rang 2, elle décroît

À vous de jouer

Étudier le sens de variation de chaque suite, définie pour tout entier naturel n .

a) $a_n = 2n^3 + 6n^2 - 1$

b) $b_n = \frac{2n+5}{n+1}$

c) $c_n = n^3 - 27n$

Réponses : a) $f'(x) = 6x(x+2) \geq 0$: strictement croissante. b) $f'(x) = \frac{-3}{(x+1)^2} < 0$: strictement décroissante. c) $f'(x) = 3(x-3)(x+3)$: croissante à partir du rang 3.

Quelle méthode choisir ?

- La **différence** $u_{n+1} - u_n$: la méthode générale, la seule pour une suite définie par récurrence.
- Le **quotient** $\frac{u_{n+1}}{u_n}$: termes strictement positifs, u_n écrit comme un produit avec une puissance n .
- La **fonction associée** : suite explicite $u_n = f(n)$, quand f se dérive facilement.

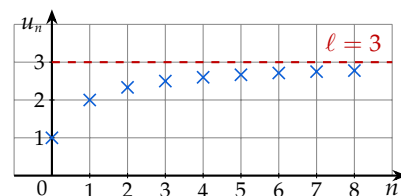
► **À faire** : fiche d'exercices du chapitre, exercices 33 à 36.

X — Notion de limite

Définition 6 — Limite d'une suite

On s'intéresse aux termes u_n quand n devient de plus en plus grand.

- La suite **tend vers** ℓ (on dit aussi qu'elle **converge** vers ℓ) si u_n devient aussi proche de ℓ que l'on veut, pour n assez grand. On note $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell$.
- La suite **tend vers** $+\infty$ si u_n devient aussi grand que l'on veut : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$ (de même pour $-\infty$).
- Une suite peut n'avoir **aucune limite** : $(-1)^n$ vaut 1 puis -1 puis 1...



$u_n = 3 - \frac{2}{n+1}$: les points se rapprochent de la droite d'équation $y = 3$

Exemples à connaître : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$; $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 = +\infty$; $\lim_{n \rightarrow +\infty} (-n) = -\infty$.

Méthode 13 — Conjecturer la limite d'une suite

Exemples corrigés

Pour chaque suite, définie pour tout entier naturel n , calculer les termes indiqués, puis conjecturer sa limite.

a) $u_n = 3 - \frac{2}{n+1}$: u_9 , u_{99} et u_{999} .

b) $v_n = n^2 - 5$: v_{10} , v_{100} et v_{1000} .

c) $w_n = 2 \times (-1)^n$: w_0 à w_3 .

a)

$$u_9 = 3 - \frac{2}{10} = 2,8 \quad \text{on remplace } n \text{ par } 9$$

$$u_{99} = 3 - \frac{2}{100} = 2,98$$

$$u_{999} = 3 - \frac{2}{1000} = 2,998$$

Les termes se rapprochent de 3 : on conjecture $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 3$.

$\frac{2}{n+1}$ devient très petit

b)

$$v_{10} = 10^2 - 5 = 95 \quad \text{on remplace } n \text{ par } 10$$

$$v_{100} = 100^2 - 5 = 9995$$

$$v_{1000} = 1000^2 - 5 = 999995$$

Les termes deviennent aussi grands que l'on veut : on conjecture $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty$.

n^2 grandit sans fin

c)

$$w_0 = 2; w_1 = -2; w_2 = 2; w_3 = -2.$$

Les termes alternent entre 2 et -2 : la suite (w_n) n'a pas de limite.

$(-1)^n$ vaut 1 si n est pair, -1 sinon
ils ne se rapprochent d'aucun nombre

À vous de jouer

Pour chaque suite, définie pour tout entier naturel n , calculer les termes indiqués, puis conjecturer sa limite.

a) $a_n = 5 + \frac{4}{n+1}$: a_9 , a_{99} et a_{999} .

b) $b_n = 2n^2 + 1$: b_{10} , b_{100} et b_{1000} .

c) $c_n = 3 \times (-1)^n$: c_0 à c_3 .

Réponses : a) 5,4 ; 5,04 ; 5,004 : limite 5. b) 201 ; 20 001 ; 2 000 001 : limite $+\infty$. c) 3 ; -3 ; 3 ; -3 : pas de limite.

► **À faire** : fiche d'exercices du chapitre, exercices 37 à 40.

XI — Problèmes : déterminer un seuil

Définition 7 — Seuil

Chercher un **seuil**, c'est chercher le **premier rang** n à partir duquel u_n dépasse une valeur donnée (ou passe en dessous). On le trouve avec le tableau de la calculatrice, ou avec un programme qui calcule les termes un par un **tant que** la valeur n'est pas atteinte.

Méthode 14 — Déterminer un seuil dans un problème

Exemples corrigés

Un club d'escalade compte 2 000 adhérents en septembre 2026. Chaque année, 10 % des adhérents ne se réinscrivent pas et 500 nouveaux adhérents arrivent. On note u_n le nombre d'adhérents en septembre de l'année 2026 + n .

- Calculer u_1 et u_2 .
- Justifier que, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = 0,9u_n + 500$.
- Compléter la fonction ci-dessous pour qu'elle renvoie le nombre d'années au bout duquel le club dépasse 4 000 adhérents.
- À l'aide de la calculatrice, déterminer l'année où le club dépasse 4 000 adhérents.

```
def seuil():
    u = 2000
    n = 0
    while ..... :
        u = .....
        n = n + 1
    return n
```

a)

$$u_1 = 2\,000 - 0,1 \times 2\,000 + 500 \quad \text{on retire 10\%, on ajoute les nouveaux}$$

$$u_1 = 2\,000 - 200 + 500 = 2\,300$$

$$u_2 = 2\,300 - 230 + 500 = 2\,570 \quad 10\% \text{ de } 2\,300 : 230$$

b)

Retirer 10 %, c'est multiplier par 0,9 ; on ajoute ensuite les 500 nouveaux : $u_{n+1} = 0,9u_n + 500$ *comme à la méthode 6*

c)

```
def seuil():
    u = 2000
    n = 0
    while u <= 4000 :
        u = 0.9*u + 500
        n = n + 1
    return n
```

tant que le seuil n'est pas dépassé ($u \leq 4\,000$, le contraire de « dépasser »), on passe au terme suivant (relation de récurrence) et au rang suivant ; la boucle s'arrête au premier terme qui dépasse 4 000, et n est son rang

d)

Tableau de la calculatrice : $u_{10} \simeq 3\,954$ et $u_{11} \simeq 4\,059$.

seuil() renvoie 11 : le club dépasse 4 000 adhérents en septembre 2037.

le premier terme au-dessus de 4 000 est u_{11}

$$2026 + 11 = 2037$$

À vous de jouer

Un étang contient 800 kg d'algues le 1^{er} mai. Chaque semaine, on en retire 20 % et elles repoussent de 60 kg. On note a_n la masse d'algues, en kg, au bout de n semaines.

- Calculer a_1 et a_2 .
- Justifier que, pour tout entier naturel n , $a_{n+1} = 0,8a_n + 60$.
- Compléter la fonction ci-dessous pour qu'elle renvoie le nombre de semaines au bout duquel la masse passe sous 400 kg.
- À l'aide de la calculatrice, déterminer au bout de combien de semaines la masse passe sous 400 kg.

```
def seuil():  
    a = 800  
    n = 0  
    while ..... :  
        a = .....  
        n = n + 1  
    return n
```

Réponses : a) $a_1 = 700$ et $a_2 = 620$. b) Retirer 20 %, c'est multiplier par 0,8, puis on ajoute 60. c) `while a >= 400` et `a = 0.8*a + 60`. d) $a_7 \simeq 404,9$ et $a_8 \simeq 383,9$: au bout de 8 semaines.

► **À faire** : fiche d'exercices du chapitre, exercices 41 à 47.