

SUITES NUMÉRIQUES

Cours — Première spécialité
Version élève

Comment utiliser ce cours

Chaque partie commence par ce qu’il faut **savoir** (définitions, propriétés), puis vient ce qu’il faut **savoir faire** : une méthode, avec des **exemples** faits en classe, puis des exercices « **À vous de jouer** » à chercher seul.
Sur cette feuille, les exemples n’ont que leur **énoncé** : la résolution, marquée (au tableau), s’écrit dans le cahier pendant le cours. Les réponses des « À vous de jouer » ne sont pas données.

I — Définition d’une suite

Définition 1 — Suite numérique

Une **suite** (u_n) associe à chaque entier naturel n (à partir d’un certain rang n_0) un nombre réel noté u_n .
C’est une fonction définie sur les entiers : on écrit u_n plutôt que $u(n)$.

- n est le **rang** (ou l’indice);
- u_n est le **terme de rang n** ;
- (u_n) , avec les parenthèses, désigne toute la suite.

rang n	0	1	2	3	4
terme u_n	0	1	4	9	16

la suite des carrés : $u_3 = 9$

Termes consécutifs

u_n et u_{n+1} se suivent : u_{n+1} est le terme **suivant** u_n et u_{n-1} est le terme **précédent**. Si le premier terme est u_0 , le 5^e terme est u_4 : on compte à partir de 0.

L’indice s’écrit en petit

Dans u_4 , le rang 4 est un **indice** : il s’écrit **en petit, en bas à droite** du u . Écrit à la même taille, « $u\ 4$ » se lirait $u \times 4$: ce n’est pas u_4 . De même, u_{n+1} (terme suivant) n’est pas $u_n + 1$ (terme plus un).

Méthode 1 — Repérer les termes et les rangs

Exemples

(au tableau)

Une suite (u_n) , de premier terme u_0 , commence par : 3; 8; 15; 24; 35; 48.

- a) Donner u_0 et u_4 .
- b) Quel est le rang du terme 24?
- c) Quel est le 3^e terme de la suite?
- d) Donner le terme qui suit u_4 , puis celui qui le précède.

À vous de jouer

Une suite (v_n) , de premier terme v_0 , commence par : 2; 6; 18; 54; 162; 486.

- a) Donner v_0 et v_4 .
- b) Quel est le rang du terme 54?
- c) Quel est le 3^e terme de la suite?
- d) Donner le terme qui suit v_4 , puis celui qui le précède.

Méthode 2 — Trouver le premier rang d’une suite

Exemples

(au tableau)

Pour chaque suite, donner le premier rang n_0 à partir duquel elle est définie.

- a) $u_n = \frac{2}{n}$
- b) $v_n = \sqrt{n-4}$
- c) $w_n = \frac{3}{\sqrt{n-1}}$

À vous de jouer

Pour chaque suite, donner le premier rang n_0 à partir duquel elle est définie.

- a) $a_n = -\frac{4}{n}$
- b) $b_n = \sqrt{n-6}$
- c) $c_n = \frac{5}{\sqrt{n-2}}$

► **À faire** : fiche d’exercices du chapitre, exercices 1 à 4.

II — Suites définies explicitement

Définition 2 — Suite définie explicitement

Une suite est **définie explicitement** lorsque u_n s’écrit directement en fonction de n : $u_n = f(n)$. L’expression de u_n s’appelle le **terme général**.
Exemple : avec $u_n = 2n + 1$, on obtient $u_{10} = 21$ sans calculer les termes précédents.

Méthode 3 — Calculer un terme d’une suite explicite

Exemples

(au tableau)

Pour tout entier naturel n , on pose $u_n = n^2 - 3n + 5$ et $v_n = \frac{2n+1}{n+2}$.

- a) Calculer u_0 et u_4 .
- b) Calculer v_0 et v_3 .

À vous de jouer

Pour tout entier naturel n , on pose $a_n = 2n^2 - n + 1$ et $b_n = \frac{3n-1}{n+1}$.

- a) Calculer a_0 et a_3 .
- b) Calculer b_0 et b_4 .

Attention : u_{n+1} n’est pas $u_n + 1$

Pour obtenir u_{n+1} , on remplace n par $(n+1)$ **dans l’expression** ; $u_n + 1$, c’est le terme u_n auquel on ajoute 1.
De même, u_{n-1} s’obtient en remplaçant n par $(n-1)$.

Méthode 4 — Exprimer u_{n+1} et u_{n-1} en fonction de n

Exemples

(au tableau)

Pour tout entier naturel n , on pose $u_n = n^2 + 3$ et $v_n = \frac{n}{n+2}$.

- a) Exprimer u_{n+1} en fonction de n , puis le comparer à $u_n + 1$.
- b) Exprimer u_{n-1} en fonction de n (pour $n \geq 1$).

c) Exprimer v_{n+1} en fonction de n .

À vous de jouer

Pour tout entier naturel n , on pose $a_n = n^2 + n$ et $b_n = \frac{2n}{n+1}$.

a) Exprimer a_{n+1} en fonction de n , puis le comparer à $a_n + 1$.

b) Exprimer a_{n-1} en fonction de n (pour $n \geq 1$).

c) Exprimer b_{n+1} en fonction de n .

► À faire : fiche d'exercices du chapitre, exercices 5 à 8.

III — Suites définies par récurrence

Définition 3 — Suite définie par récurrence

Une suite est **définie par récurrence** lorsqu'on donne :

- son premier terme, par exemple $u_0 = 2$;
- une **relation de récurrence**, qui donne chaque terme à partir du précédent, par exemple $u_{n+1} = 3u_n - 1$.

On calcule alors les termes **de proche en proche** : pour connaître u_{20} , il faut d'abord u_{19} , donc u_{18} ...

$$u_0 = 2 \xrightarrow{\times 3 - 1} u_1 = 5 \xrightarrow{\times 3 - 1} u_2 = 14$$

Méthode 5 — Calculer des termes de proche en proche

Exemples (au tableau)

Pour chaque suite, calculer les trois termes qui suivent le premier.

a) $u_0 = 4$ et, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = 2u_n - 3$.

b) $v_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n , $v_{n+1} = v_n + 2n + 1$.

c) $w_1 = 10$ et, pour tout entier $n \geq 1$, $w_{n+1} = \frac{w_n}{2} + 1$.

À vous de jouer

Pour chaque suite, calculer les trois termes qui suivent le premier.

a) $a_0 = 3$ et, pour tout entier naturel n , $a_{n+1} = 3a_n - 5$.

b) $b_0 = 2$ et, pour tout entier naturel n , $b_{n+1} = b_n + 4n - 1$.

c) $c_1 = 20$ et, pour tout entier $n \geq 1$, $c_{n+1} = \frac{c_n}{2} + 2$.

Méthode 6 — Traduire une situation par une relation de récurrence

Exemples (au tableau)

Une médiathèque compte 5 000 abonnés au début de 2026. Chaque année, 20 % des abonnés ne renouvellent pas leur abonnement et 1 200 nouveaux lecteurs s'inscrivent. On note u_n le nombre d'abonnés au début de l'année 2026 + n .

a) Donner u_0 , puis calculer u_1 .

b) Justifier que, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = 0,8u_n + 1\,200$.

c) Calculer u_2 .

À vous de jouer

Une citerne de jardin contient 2 000 L d'eau le 1^{er} juin. Chaque semaine, on utilise 10 % de l'eau pour arroser et la pluie apporte 150 L. On note v_n le volume d'eau, en litres, au bout de n semaines.

a) Donner v_0 , puis calculer v_1 .

b) Justifier que, pour tout entier naturel n , $v_{n+1} = 0,9v_n + 150$.

c) Calculer v_2 .

► À faire : fiche d'exercices du chapitre, exercices 9 à 12.

IV — Calculatrice

Application Suites de la NumWorks

Pour	On fait
entrer une suite explicite	Onglet Suites, Ajouter une suite, Explicite, puis par exemple $u_n = n^2 - 8n + 20$ (n avec la touche $\boxed{x, n, f}$).
entrer une suite récurrente	Ajouter une suite, Récurrente d'ordre 1, puis la relation $u_{n+1} = \dots$ (u_n se trouve dans la boîte à outils $\boxed{\text{toolbox}}$) et le premier terme u_0 .
afficher des termes	Onglet Tableau, Régler l'intervalle : N début, N fin.
représenter la suite	Onglet Graphique : les points $(n; u_n)$; menu Axes pour régler la fenêtre.

Les intitulés peuvent varier selon la version du logiciel.

Méthode 7 — Calculer des termes avec la calculatrice

Exemples (au tableau)

Pour tout entier naturel n , on pose $u_n = n^2 - 8n + 20$. La suite (v_n) est définie par $v_0 = 1$ et $v_{n+1} = 2v_n + 3$.

a) Afficher les termes u_0 à u_8 et les recopier.

b) Représenter (u_n) à la calculatrice.

c) Donner v_{10} et v_{20} .

À vous de jouer

Pour tout entier naturel n , on pose $a_n = n^2 - 6n + 11$. La suite (b_n) est définie par $b_0 = 2$ et $b_{n+1} = 3b_n - 2$.

a) Afficher les termes a_0 à a_6 et les recopier.

b) Représenter (a_n) à la calculatrice.

c) Donner b_{10} et b_{15} .

► À faire : fiche d'exercices du chapitre, exercices 13 à 16.

V — Programmer en Python

Python sur la NumWorks

Application Python, Ajouter un script : on tape la fonction, puis Exécuter le script ; dans la console, on appelle la fonction, par exemple `terme_v(10)`. Une boucle `for i in range(n)` répète n fois les lignes décalées en dessous d'elle.

Méthode 8 — Programmer le calcul d'un terme en Python

Exemples (au tableau)

On reprend la suite (v_n) définie par $v_0 = 1$ et $v_{n+1} = 2v_n + 3$.

a) Écrire une fonction `terme_v(n)` qui renvoie v_n .

b) Que renvoie `terme_v(10)` ?

À vous de jouer

On reprend la suite (b_n) définie par $b_0 = 2$ et $b_{n+1} = 3b_n - 2$.

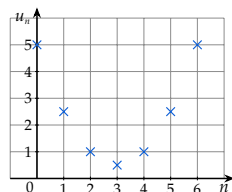
- Écrire une fonction `terme_b(n)` qui renvoie b_n .
- Que renvoie `terme_b(10)` ?

► **À faire** : fiche d'exercices du chapitre, exercices 17 à 20.

VI — Représentation graphique**Définition 4 — Représentation graphique d'une suite**

Dans un repère, la **représentation graphique** de la suite (u_n) est le nuage des points de coordonnées $(n; u_n)$.
Ces points sont **isolés** : n ne prend que des valeurs entières, on ne les relie donc pas.

Ci-contre : $u_n = 0,5n^2 - 3n + 5$, de u_0 à u_6 .

**Méthode 9 — Représenter une suite et conjecturer ses variations****Exemples**

La suite (u_n) est définie par $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = 0,5u_n + 3$.

- Dresser le tableau des termes u_0 à u_5 (arrondis à 0,01).
- Représenter ces termes dans un repère.
- Conjecturer le sens de variation de la suite.

À vous de jouer

La suite (v_n) est définie par $v_0 = 8$ et, pour tout entier naturel n , $v_{n+1} = 0,5v_n + 1$.

- Dresser le tableau des termes v_0 à v_5 (arrondis à 0,01).
- Représenter ces termes dans un repère.
- Conjecturer le sens de variation de la suite.

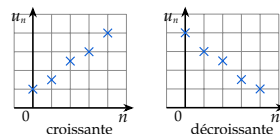
► **À faire** : fiche d'exercices du chapitre, exercices 21 à 24.

VII — Sens de variation : signe de $u_{n+1} - u_n$ **Définition 5 — Suite croissante, suite décroissante**

La suite (u_n) est :

- croissante** si, pour tout n , $u_{n+1} \geq u_n$;
- décroissante** si, pour tout n , $u_{n+1} \leq u_n$;
- constante** si, pour tout n , $u_{n+1} = u_n$.

Avec $>$ ou $<$, elle est **strictement** croissante ou décroissante. Si l'inégalité n'est vraie que pour $n \geq p$, la suite est croissante (ou décroissante) **à partir du rang p** .

**Propriété 1 — Signe de la différence**

- Si, pour tout n , $u_{n+1} - u_n \geq 0$, alors (u_n) est croissante.
- Si, pour tout n , $u_{n+1} - u_n \leq 0$, alors (u_n) est décroissante.

En effet, $u_{n+1} - u_n \geq 0$ revient à $u_{n+1} \geq u_n$ (on ajoute u_n aux deux membres).

Méthode 10 — Étudier le sens de variation par la différence**Exemples**

Étudier le sens de variation de chaque suite.

- $u_n = 2n^2 + n$ pour tout entier naturel n .
- $v_0 = 3$ et, pour tout entier naturel n , $v_{n+1} = v_n - n^2 - 1$.
- $w_n = n^2 - 6n$ pour tout entier naturel n .

À vous de jouer

Étudier le sens de variation de chaque suite.

- $a_n = 3n^2 + 2n$ pour tout entier naturel n .
- $b_0 = 10$ et, pour tout entier naturel n , $b_{n+1} = b_n - 2n^2 - 3$.
- $c_n = n^2 - 8n$ pour tout entier naturel n .

► **À faire** : fiche d'exercices du chapitre, exercices 25 à 28.

VIII — Sens de variation : quotient $\frac{u_{n+1}}{u_n}$

D'où vient le quotient ? Une suite est croissante quand $u_{n+1} \geq u_n$; si ses termes sont strictement positifs, on peut diviser par u_n .

$$\begin{aligned} u_{n+1} &\geq u_n && \text{la suite est croissante (définition 5)} \\ \frac{u_{n+1}}{u_n} &\geq \frac{u_n}{u_n} && \text{on divise par } u_n > 0 : \text{le sens ne change pas} \\ \frac{u_{n+1}}{u_n} &\geq 1 && \frac{u_n}{u_n} = 1 \end{aligned}$$

Comparer u_{n+1} à u_n revient donc à comparer le quotient $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ à 1 ; de même, $u_{n+1} \leq u_n$ donne $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq 1$.

Propriété 2 — Comparer le quotient à 1

Si **tous les termes** de la suite (u_n) sont **strictement positifs** :

- si, pour tout n , $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1$, alors (u_n) est croissante ;
- si, pour tout n , $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq 1$, alors (u_n) est décroissante.

Cette méthode convient quand u_n est un produit, en particulier avec une puissance $3^n, 0,5^n, \dots$: le quotient se simplifie.

Méthode 11 — Étudier le sens de variation par le quotient**Exemples**

Étudier le sens de variation de chaque suite.

- $u_n = 5 \times 3^n$ pour tout entier naturel n .
- $v_n = 8 \times 0,5^n$ pour tout entier naturel n .
- $w_n = \frac{2^n}{n}$ pour tout entier $n \geq 1$.

À vous de jouer

Étudier le sens de variation de chaque suite.

a) $a_n = 4 \times 2^n$ pour tout entier naturel n .

b) $b_n = 6 \times 0,8^n$ pour tout entier naturel n .

c) $c_n = \frac{3^n}{n}$ pour tout entier $n \geq 1$.

➤ À faire : fiche d'exercices du chapitre, exercices 29 à 32.

IX — Sens de variation : fonction associée

Propriété 3 — Suite $u_n = f(n)$

Soit (u_n) définie par $u_n = f(n)$, où f est une fonction définie sur $[0; +\infty[$.

• Si f est croissante sur $[0; +\infty[$, alors (u_n) est croissante.

• Si f est décroissante sur $[0; +\infty[$, alors (u_n) est décroissante.

Les points $(n; u_n)$ sont sur la courbe de f : ils suivent ses variations.

Démonstration (cas croissant).

$n < n + 1$

deux rangs qui se suivent

$f(n) \leq f(n + 1)$

f croissante conserve l'ordre

$u_n \leq u_{n+1}$

car $u_n = f(n)$ et $u_{n+1} = f(n + 1)$

Attention : seulement pour une suite explicite

Pour une suite définie par récurrence, $u_{n+1} = f(u_n)$, les variations de f ne donnent pas celles de la suite : $x \mapsto 0,5x + 1$ est croissante, pourtant la suite $v_0 = 8$, $v_{n+1} = 0,5v_n + 1$ (méthode 9) est décroissante.

Méthode 12 — Étudier le sens de variation à l'aide d'une fonction

Exemples

Étudier le sens de variation de chaque suite, définie pour tout entier naturel n .

a) $u_n = n^3 + 3n^2 + 2$

b) $v_n = \frac{3n + 1}{n + 2}$

c) $w_n = n^3 - 12n$

À vous de jouer

Étudier le sens de variation de chaque suite, définie pour tout entier naturel n .

a) $a_n = 2n^3 + 6n^2 - 1$

b) $b_n = \frac{2n + 5}{n + 1}$

c) $c_n = n^3 - 27n$

Quelle méthode choisir?

- La **différence** $u_{n+1} - u_n$: la méthode générale, la seule pour une suite définie par récurrence.
- Le **quotient** $\frac{u_{n+1}}{u_n}$: termes strictement positifs, u_n écrit comme un produit avec une puissance n .

- La **fonction associée** : suite explicite $u_n = f(n)$, quand f se dérive facilement.

➤ À faire : fiche d'exercices du chapitre, exercices 33 à 36.

X — Notion de limite

Définition 6 — Limite d'une suite

On s'intéresse aux termes u_n quand n devient de plus en plus grand.

• La suite **tend vers** ℓ (on dit aussi qu'elle **converge** vers ℓ) si u_n devient aussi proche de ℓ que l'on veut, pour n assez grand. On note $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell$.

• La suite **tend vers** $+\infty$ si u_n devient aussi grand que l'on veut : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$ (de même pour $-\infty$).

• Une suite peut n'avoir **aucune limite** : $(-1)^n$ vaut 1 puis -1 puis 1 ...

Exemples à connaître : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$; $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 = +\infty$; $\lim_{n \rightarrow +\infty} (-n) = -\infty$.

Méthode 13 — Conjecturer la limite d'une suite

Exemples

Pour chaque suite, définie pour tout entier naturel n , calculer les termes indiqués, puis conjecturer sa limite.

a) $u_n = 3 - \frac{2}{n+1}$: u_9 , u_{99} et u_{999} .

b) $v_n = n^2 - 5$: v_{10} , v_{100} et $v_{1\,000}$.

c) $w_n = 2 \times (-1)^n$: w_0 à w_3 .

À vous de jouer

Pour chaque suite, définie pour tout entier naturel n , calculer les termes indiqués, puis conjecturer sa limite.

a) $a_n = 5 + \frac{4}{n+1}$: a_9 , a_{99} et a_{999} .

b) $b_n = 2n^2 + 1$: b_{10} , b_{100} et $b_{1\,000}$.

c) $c_n = 3 \times (-1)^n$: c_0 à c_3 .

➤ À faire : fiche d'exercices du chapitre, exercices 37 à 40.

XI — Problèmes : déterminer un seuil

Définition 7 — Seuil

Chercher un **seuil**, c'est chercher le **premier rang** n à partir duquel u_n dépasse une valeur donnée (ou passe en dessous). On le trouve avec le tableau de la calculatrice, ou avec un programme qui calcule les termes un par un **tant que** la valeur n'est pas atteinte.

Méthode 14 — Déterminer un seuil dans un problème

Exemples

Un club d'escalade compte 2 000 adhérents en septembre 2026. Chaque année, 10 % des adhérents ne se réinscrivent pas et 500 nouveaux adhérents arrivent. On note u_n le nombre d'adhérents en septembre de l'année 2026 + n .

- Calculer u_1 et u_2 .
- Justifier que, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = 0,9u_n + 500$.
- Compléter la fonction ci-dessous pour qu'elle renvoie le nombre d'années au bout duquel le club dépasse 4 000 adhérents.
- À l'aide de la calculatrice, déterminer l'année où le club dépasse 4 000 adhérents.

```
def seuil():
    u = 2000
    n = 0
    while ..... :
        u = .....
        n = n + 1
    return n
```

À vous de jouer

Un étang contient 800 kg d'algues le 1^{er} mai. Chaque semaine, on en retire 20 % et elles repoussent de 60 kg. On note a_n la masse d'algues, en kg, au bout de n semaines.

- Calculer a_1 et a_2 .
- Justifier que, pour tout entier naturel n , $a_{n+1} = 0,8a_n + 60$.
- Compléter la fonction ci-dessous pour qu'elle renvoie le nombre de semaines au bout duquel la masse passe sous 400 kg.
- À l'aide de la calculatrice, déterminer au bout de combien de semaines la masse passe sous 400 kg.

```
def seuil():
    a = 800
    n = 0
    while ..... :
        a = .....
        n = n + 1
    return n
```

► **À faire :** fiche d'exercices du chapitre, exercices 41 à 47.