

CALCUL LITTÉRAL ET SECOND DEGRÉ

Cours — Première, mathématiques spécifiques
Version élève

Comment utiliser ce cours

Chaque partie commence par ce qu’il faut **savoir** (définitions, propriétés), puis vient ce qu’il faut **savoir faire** : une méthode, avec des **exemples** faits en classe, puis des exercices « **À vous de jouer** » à chercher seul. Tout le chapitre se fait **sans calculatrice**.
Sur cette feuille, seuls les **énoncés** des exemples figurent : la résolution, signalée par la mention *(au tableau)*, est à rédiger dans le cahier.

I — Développer

Définition 1 — Développer

Développer, c’est transformer un **produit** en une **somme**.
Le chemin inverse s’appelle **factoriser**.



Propriété 1 — Distributivité

Pour tous nombres k, a, b, c et d :

$$k(a + b) = ka + kb \qquad (a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd$$

Dans $(a + b)(c + d)$, chaque terme de la première parenthèse multiplie chaque terme de la seconde : quatre produits.

Méthode 1 — Développer et réduire

Exemples

Développer et réduire :

- a) $A = 3(2x - 5)$
- b) $B = -2x(x + 4)$
- c) $C = (x + 3)(2x - 1)$

À vous de jouer

Développer et réduire :

$$\begin{aligned} D &= 4(3x + 2) & E &= -5(x - 3) & F &= -3x(x + 2) & G &= x(5 - x) \\ H &= (x + 4)(x - 2) & I &= (2x - 3)(x + 5) \end{aligned}$$

► **À faire** : fiche d’exercices du chapitre, exercices 1 à 4.

II — Identités remarquables

Propriété 2 — Identités remarquables

Pour tous nombres a et b :

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \qquad (a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 \qquad (a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$

Attention : $(x + 5)^2$ n’est pas égal à $x^2 + 25$; il manque le **double produit** $2ab$.

Méthode 2 — Développer avec une identité remarquable

Exemples

Développer et réduire :

- a) $A = (x + 5)^2$
- b) $B = (3x - 2)^2$
- c) $C = (x + 7)(x - 7)$

À vous de jouer

Développer et réduire :

$$\begin{aligned} D &= (x + 3)^2 & E &= (2x + 5)^2 & F &= (x - 8)^2 & G &= (4x - 1)^2 \\ H &= (x + 10)(x - 10) & I &= (2x - 9)(2x + 9) \end{aligned}$$

► **À faire** : fiche d’exercices du chapitre, exercices 5 à 8.

III — Équations du premier degré

Définition 2 — Résoudre une équation

Résoudre une équation d’inconnue x , c’est trouver toutes les valeurs de x qui rendent l’égalité vraie : ce sont les **solutions**. On les écrit entre accolades : $S = \{4\}$.

Propriété 3 — Transformer une équation

On obtient une équation qui a les mêmes solutions quand on **ajoute** (ou **retranche**) un même nombre aux deux membres, ou quand on les **multiplie** (ou les **divise**) par un même nombre non nul.

Méthode 3 — Résoudre une équation du premier degré

Exemples

- a) Résoudre $7x - 3 = 4x + 9$.
- b) Résoudre $2(x + 1) = 5x - 7$.
- c) Résoudre $\frac{20}{x} = 4$.
- d) Une salle d’escalade propose deux tarifs : 8 € la séance, ou un abonnement de 30 € puis 5 € la séance. Pour combien de séances les deux tarifs coûtent-ils autant ?

À vous de jouer

- a) Résoudre $6x + 5 = 2x + 17$, puis $9x - 4 = -x + 6$.
- b) Résoudre $3(x - 2) = x + 8$, puis $-2(x - 4) = x - 1$.
- c) Résoudre $\frac{36}{x} = 9$, puis $\frac{15}{x} = -3$.

- d) Une location de trottinette coûte 4 € par jour, ou 18 € d'inscription puis 1 € par jour. Pour combien de jours les deux formules coûtent-elles autant ?

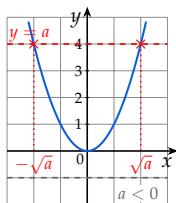
► **À faire** : fiche d'exercices du chapitre, exercices 9 à 12.

IV — Équations $x^2 = a$

Propriété 4 — Équation $x^2 = a$

- Si $a > 0$: deux solutions, $-\sqrt{a}$ et $\sqrt{a}$.
- Si $a = 0$: une seule solution, 0.
- Si $a < 0$: aucune solution, car un carré n'est jamais négatif.

Sur le graphique : la droite horizontale $y = a$ coupe la courbe de $x \mapsto x^2$ en deux points si $a > 0$, en aucun si $a < 0$.



Méthode 4 — Résoudre une équation $x^2 = a$

Exemples

(au tableau)

- Résoudre $x^2 = 36$.
- Résoudre $x^2 = 11$.
- Résoudre $x^2 = -9$.
- Résoudre $2x^2 - 50 = 0$.
- Un jardin carré a une aire de 64 m². Quelle est la longueur de son côté ?

À vous de jouer

- Résoudre $x^2 = 49$, puis $x^2 = 100$.
- Résoudre $x^2 = 7$, puis $x^2 = 15$.
- Résoudre $x^2 = -16$.
- Résoudre $3x^2 - 12 = 0$, puis $x^2 + 5 = 30$.
- Une nappe carrée a une aire de 4 m². Quelle est la longueur de son côté ?

► **À faire** : fiche d'exercices du chapitre, exercices 13 à 15.

V — Équations produit

Propriété 5 — Produit nul

Un produit est nul quand l'un de ses facteurs est nul : si $A \times B = 0$, alors $A = 0$ ou $B = 0$.

Méthode 5 — Résoudre une équation produit

Exemples

(au tableau)

Résoudre :

- $(x - 4)(x + 6) = 0$
- $(3x - 6)(-2x + 10) = 0$
- $x^2 - 5x = 0$

À vous de jouer

Résoudre :

$$\begin{aligned} (x - 2)(x + 9) = 0 & \quad (x + 1)(x + 8) = 0 & \quad (2x + 8)(-3x + 3) = 0 \\ (5x - 10)(4x + 12) = 0 & \quad x^2 + 3x = 0 & \quad 2x^2 - 8x = 0 \end{aligned}$$

► **À faire** : fiche d'exercices du chapitre, exercices 16 à 18.

VI — Fonction polynôme du second degré

Définition 3 — Fonction polynôme du second degré

Une **fonction polynôme du second degré** est une fonction f de la forme

$$f(x) = ax^2 + bx + c \quad \text{avec } a \neq 0.$$

Les nombres a , b et c sont ses **coefficients**. Sa courbe s'appelle une **parabole**.

Remarque

Sans terme en x^2 , il reste $bx + c$: c'est une fonction affine, dont la courbe est une droite.

Méthode 6 — Reconnaître une fonction du second degré, calculer une image

Exemples

(au tableau)

- Pour chaque fonction f , g et h , dire si elle est du second degré et, si oui, donner a , b et c : $f(x) = 3x^2 - 2x + 1$; $g(x) = 5 - x^2$; $h(x) = 4x + 7$.
- Calculer $f(-2)$.
- Les points $A(1; 2)$ et $B(-1; 4)$ sont-ils sur la courbe de f ?

À vous de jouer

- Pour chaque fonction u , v et w , dire si elle est du second degré et, si oui, donner a , b et c : $u(x) = -2x^2 + x + 4$; $v(x) = x^2 - 3x$; $w(x) = 1 - 6x$.
- Calculer $u(-1)$.
- Les points $C(2; -2)$ et $D(-2; 0)$ sont-ils sur la courbe de u ?

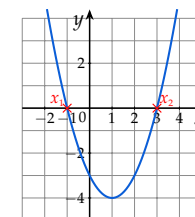
► **À faire** : fiche d'exercices du chapitre, exercices 19 à 22.

VII — Forme factorisée et racines

Définition 4 — Forme factorisée, racines

Une fonction du second degré est écrite sous **forme factorisée** quand elle s'écrit $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$.

Les **racines** de f sont les solutions de $f(x) = 0$. Ce sont les abscisses des points où la parabole coupe l'axe des abscisses.



Propriété 6 — Racines d’une forme factorisée

Les racines de $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$ sont x_1 et x_2 : chacune annule une parenthèse. Dans $(x - 4)$, la racine est 4 ; dans $(x + 2)$, elle est -2 .

Méthode 7 — Utiliser une forme factorisée

Exemples

Soit $f(x) = 2x^2 + 4x - 6$.

a) Vérifier que $f(x) = 2(x - 1)(x + 3)$.

b) En déduire les racines de f .

c) Donner les points où la courbe de f coupe l’axe des abscisses.

À vous de jouer

Mêmes questions pour :

a) $g(x) = -x^2 + 2x + 8$, avec $g(x) = -(x - 4)(x + 2)$;

b) $h(x) = 3x^2 - 12$, avec $h(x) = 3(x - 2)(x + 2)$.

► À faire : fiche d’exercices du chapitre, exercices 23 à 25.

VIII — Représentation graphique

Propriété 7 — Allure de la parabole

La parabole de $f(x) = ax^2 + bx + c$:

- est tournée vers le **haut** si $a > 0$, vers le **bas** si $a < 0$;
- a un **axe de symétrie** vertical, qui passe par son point le plus bas (ou le plus haut) : le **sommet** S ;
- coupe l’axe des ordonnées au point $(0 ; c)$, car $f(0) = c$.

$a > 0 : f(x) = x^2 - 2x - 1$

$a < 0 : g(x) = -x^2 + 2x + 2$

Méthode 8 — Tracer une parabole

Exemples

Soit $f(x) = x^2 - 2x - 3$.

a) Compléter le tableau de valeurs de f pour les entiers de -2 à 4 .

b) Tracer la courbe de f .

c) Lire le sommet et l’axe de symétrie.

À vous de jouer

Mêmes questions pour $g(x) = -x^2 + 4x$, avec les entiers de -1 à 5 .

Méthode 9 — Associer une fonction à sa parabole

Exemples

Associer chaque fonction à sa courbe :

$f(x) = x^2 + 1$ $g(x) = -x^2 + 3$ $h(x) = x^2 - 2$

À vous de jouer

Associer chaque fonction à sa courbe :

$p(x) = -x^2 - 1$ $q(x) = x^2 - 3$ $r(x) = -x^2 + 2$

► À faire : fiche d’exercices du chapitre, exercices 26 à 28.

IX — Tableaux de variations

Propriété 8 — Sommet et variations

Si f a deux racines x_1 et x_2 , le sommet S de la parabole est **au milieu** : son abscisse est

$$x_s = \frac{x_1 + x_2}{2}$$

et son ordonnée est $f(x_s)$.

$a > 0 : f(x_s)$ est le **minimum**

x	x_s
$f(x)$	$f(x_s)$

$a < 0 : f(x_s)$ est le **maximum**

x	x_s
$f(x)$	$f(x_s)$

Méthode 10 — Dresser le tableau de variations

Exemples

Donner le sommet de la parabole, puis le tableau de variations de :

a) $f(x) = 2(x - 1)(x + 3)$

b) $g(x) = -(x - 2)(x - 6)$

c) $h(x) = 3x^2 - 12x$

À vous de jouer

Donner le sommet de la parabole, puis le tableau de variations de :

$f(x) = 3(x - 2)(x + 4)$ $g(x) = -2(x - 1)(x - 5)$ $h(x) = -x^2 + 8x$

► **À faire** : fiche d'exercices du chapitre, exercices 29 à 31.

X — Problèmes type épreuve anticipée

À l'épreuve, une fonction du second degré sert de **modèle** (bénéfice, hauteur, population...) : on calcule des images, on **vérifie** une forme factorisée donnée, puis on en tire les racines, le sommet et les variations, et on **interprète** chaque résultat dans le contexte.

Méthode 11 — Étudier un modèle du second degré

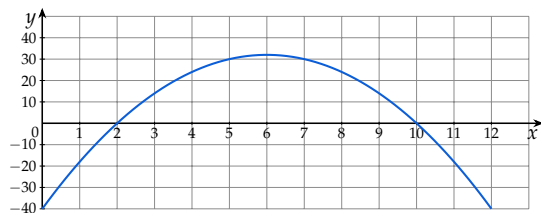
Exemples

(au tableau)

Un atelier fabrique et vend entre 0 et 1 200 trottinettes électriques par an. On note x le nombre de trottinettes, en centaines (x entre 0 et 12). Le bénéfice, en milliers d'euros, est modélisé par

$$B(x) = -2x^2 + 24x - 40.$$

Sa courbe est tracée ci-dessous (x en centaines, $B(x)$ en milliers d'euros).



1°) Par lecture graphique, déterminer pour quelles quantités le bénéfice est de 30 000 €.

2°) Calculer $B(1)$. Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

3°) Vérifier que $B(x) = -2(x - 2)(x - 10)$.

4°) Pour quelles quantités le bénéfice est-il nul ?

5°) Dresser le tableau de variations de B entre 0 et 12.

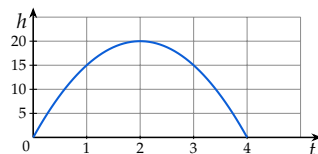
6°) Quel est le bénéfice maximal ? Pour combien de trottinettes ?

À vous de jouer

On lance une fusée à eau depuis le sol. Sa hauteur, en mètres, au bout de t secondes (t entre 0 et 4) est

$$h(t) = -5t^2 + 20t.$$

Sa courbe est tracée ci-contre (t en secondes, $h(t)$ en mètres).



1°) Par lecture graphique, déterminer à quels instants la fusée est à 15 m de haut.

2°) Calculer $h(1)$. Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

3°) Vérifier que $h(t) = -5t(t - 4)$.

4°) À quels instants la fusée est-elle au sol ?

5°) Dresser le tableau de variations de h entre 0 et 4.

6°) Quelle est la hauteur maximale ? À quel instant ?

► **À faire** : fiche d'exercices du chapitre, exercices 32 à 34.