

# SUITES NUMÉRIQUES

Cours — Première, mathématiques spécifiques

## Comment utiliser ce cours

Chaque partie commence par ce qu'il faut **savoir** (définitions, propriétés), puis vient ce qu'il faut **savoir faire** : une méthode, avec des **exemples corrigés** faits en classe, puis des exercices « **À vous de jouer** » à chercher seul.

## I — Notion de suite

### Pour commencer

Écrivons les multiples de 4 dans l'ordre : 0 ; 4 ; 8 ; 12 ; 16 ; ... On leur donne un numéro, en commençant à 0 :

$$u_0 = 0 \quad u_1 = 4 \quad u_2 = 8 \quad u_3 = 12 \quad \dots$$

Chaque entier  $n$  reçoit un nombre  $u_n$  : c'est une **suite**. Ici,  $u_n = 4n$ .

### Définition 1 — Suite numérique

Une **suite** associe un nombre  $u_n$  à chaque entier  $n = 0 ; 1 ; 2 ; \dots$  (on lit «  $u$  indice  $n$  »).

- $u_n$  est le **terme de rang**  $n$  ; la suite se note  $(u_n)$ .
- Le premier terme est  $u_0$ , le deuxième  $u_1$ , le troisième  $u_2$ , ...
- Le terme **suivant**  $u_n$  est  $u_{n+1}$  ; le terme **précédent** est  $u_{n-1}$ .

### Définition 2 — Suite définie de façon explicite

Une suite est définie **de façon explicite** quand une formule donne  $u_n$  directement à partir de  $n$ , par exemple  $u_n = 4n$ . On calcule alors **n'importe quel terme** sans connaître les précédents.

### Méthode 1 — Calculer un terme d'une suite définie de façon explicite

#### Exemples corrigés

- Soit  $u_n = 3n + 4$ . Calculer  $u_0$ ,  $u_1$ ,  $u_2$  et  $u_{15}$ .
- Soit  $v_n = 4n^2 - 1$ . Calculer les quatre premiers termes.
- Une carte de bus coûte 8 €, puis chaque trajet 1,50 €. Pour  $n$  trajets, on paie  $c_n = 8 + 1,5n$  euros. Calculer  $c_{20}$  et interpréter.

a)

$$u_0 = 3 \times 0 + 4 \quad \text{on remplace } n \text{ par } 0$$

$$u_0 = 4$$

$$u_1 = 3 \times 1 + 4 = 7$$

$$u_2 = 3 \times 2 + 4 = 10$$

$$u_{15} = 3 \times 15 + 4 = 49 \quad \text{directement, sans les termes d'avant}$$

b)

$$v_0 = 4 \times 0^2 - 1 = -1 \quad \text{les quatre premiers : rangs 0 à 3}$$

$$v_1 = 4 \times 1^2 - 1 = 3$$

$$v_2 = 4 \times 2^2 - 1 = 15 \quad \text{le carré d'abord : } 4 \times 4 - 1$$

$$v_3 = 4 \times 3^2 - 1 = 35 \quad 4 \times 9 - 1$$

c)

$$c_{20} = 8 + 1,5 \times 20 \quad \text{on remplace } n \text{ par } 20$$

$$c_{20} = 8 + 30$$

$$c_{20} = 38$$

Avec 20 trajets, on paie 38 € en tout, carte comprise.

*on répond dans le contexte*

### À vous de jouer

1°) Soit  $u_n = 4n - 7$ . Calculer  $u_0$ ,  $u_1$  et  $u_{30}$ .

2°) Soit  $v_n = n^2 + 3n$ . Calculer les quatre premiers termes.

3°) Une salle de sport demande 30 € d'inscription, puis 6 € par séance. Pour  $n$  séances, on paie  $c_n = 30 + 6n$  euros. Calculer  $c_{12}$  et interpréter.

Réponses :  $u_0 = -7$ ;  $u_1 = -3$ ;  $u_{30} = 113$ ;  $v : 0; 4; 10; 18$ ;  $c_{12} = 102$  : 12 séances coûtent 102 €.

### Ne pas confondre $u_{n+1}$ et $u_n + 1$

$u_{n+1}$  est le terme **suitant**;  $u_n + 1$  est le terme  $u_n$  augmenté de 1. Avec  $u_n = 3n + 4$  et  $n = 2$  :  $u_3 = 13$ , alors que  $u_2 + 1 = 11$ .

► **À faire** : fiche d'exercices du chapitre, exercices 1 à 5.

## II — Suites définies par récurrence

### Définition 3 — Suite définie par récurrence

Une suite est définie **par récurrence** quand on connaît :

- son **premier terme** (en général  $u_0$ );
- une **relation** qui donne chaque terme à partir du **précédent** :  $u_{n+1}$  en fonction de  $u_n$ .

Exemple :  $u_0 = 6$  et  $u_{n+1} = 2u_n$  se lit « on part de 6, et chaque terme est le double du précédent ».

### Méthode 2 — Calculer les termes d'une suite définie par récurrence

#### Exemples corrigés

a) Soit  $u_0 = 2$  et  $u_{n+1} = 5u_n$ . Calculer  $u_1$ ,  $u_2$  et  $u_3$ .

b) Soit  $v_0 = 4$  et  $v_{n+1} = 2v_n - 3$ . Calculer  $v_1$ ,  $v_2$  et  $v_3$ .

c) Léa a 45 abonnés sur son compte de photos et en gagne 8 chaque semaine. On note  $a_n$  son nombre d'abonnés après  $n$  semaines. Donner  $a_0$ , exprimer  $a_{n+1}$  en fonction de  $a_n$ , puis calculer  $a_3$ .

a)

$$u_1 = 5 \times u_0 \quad \text{la relation avec } n = 0$$

$$u_1 = 5 \times 2 = 10 \quad \text{on remplace } u_0 \text{ par sa valeur}$$

$$u_2 = 5 \times 10 = 50 \quad u_2 = 5 \times u_1$$

$$u_3 = 5 \times 50 = 250 \quad u_3 = 5 \times u_2$$

b)

$$\begin{aligned}v_1 &= 2 \times 4 - 3 = 5 & v_1 &= 2v_0 - 3 \\v_2 &= 2 \times 5 - 3 = 7 & \text{toujours avec le terme d'avant} \\v_3 &= 2 \times 7 - 3 = 11\end{aligned}$$

c)

$$a_0 = 45$$

$$a_{n+1} = a_n + 8$$

$$a_1 = 53; a_2 = 61; a_3 = 69.$$

le nombre de départ

d'une semaine à la suivante, on ajoute 8

après 3 semaines, Léa a 69 abonnés

**À vous de jouer**1°) Soit  $u_0 = 1$  et  $u_{n+1} = 3u_n + 2$ . Calculer  $u_1$ ,  $u_2$  et  $u_3$ .2°) Soit  $v_0 = 80$  et  $v_{n+1} = v_n - 12$ . Calculer  $v_1$ ,  $v_2$  et  $v_3$ .3°) À 8 h, un parking a 300 places libres; chaque quart d'heure, 25 voitures s'y garent. On note  $p_n$  le nombre de places libres après  $n$  quarts d'heure. Donner  $p_0$ , exprimer  $p_{n+1}$  en fonction de  $p_n$ , puis calculer  $p_3$ .Réponses :  $u_1 = 5; u_2 = 17; u_3 = 53; v_1 = 68; v_2 = 56; v_3 = 44; p_0 = 300, p_{n+1} = p_n - 25$  et  $p_3 = 225$ .**Au tableur**

Pour une suite définie par récurrence,  $u_{12}$  demande d'abord  $u_{11}$ , donc  $u_{10} \dots$  jusqu'à  $u_0$  : douze calculs, qu'un tableur fait à notre place. On écrit le premier terme en B2, puis en B3 une formule qui utilise la cellule du dessus, recopiée vers le bas. Pour  $v_{n+1} = 2v_n - 3 : =2*B2-3$ . L'épreuve demande parfois cette formule.

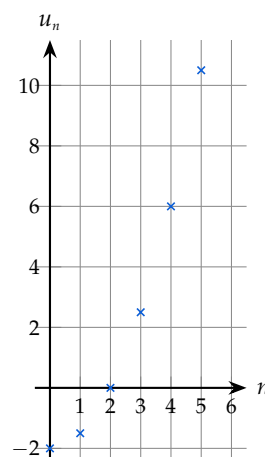
► **À faire** : fiche d'exercices du chapitre, exercices 6 à 11.**III — Représentation graphique d'une suite****Définition 4 — Représentation graphique**

Dans un repère, une suite  $(u_n)$  se représente par les **points** de coordonnées  $(n; u_n)$ .  
On ne relie **pas** les points :  $n$  ne prend que des valeurs entières.

**Méthode 3 — Représenter graphiquement une suite****Exemples corrigés**Représenter les six premiers termes de la suite définie par  $u_n = \frac{n^2}{2} - 2$ .**Résolution**On calcule les termes de rang 0 à 5 : *tableau de valeurs*

| $n$   | 0  | 1    | 2 | 3   | 4 | 5    |
|-------|----|------|---|-----|---|------|
| $u_n$ | -2 | -1,5 | 0 | 2,5 | 6 | 10,5 |

On place les points  $(n; u_n)$ , sans les relier.  $n$  en abscisse,  $u_n$  en ordonnée



**À vous de jouer**

Représenter les cinq premiers termes de chaque suite :

1°)  $v_n = 7 - 2n$ ;

2°)  $w_n = n^2 - 4$ .

Réponses :  $v : 7; 5; 3; 1; -1$  (points alignés);  $w : -4; -3; 0; 5; 12$ .

► **À faire** : fiche d'exercices du chapitre, exercices 12 à 15.

**IV — Suites arithmétiques : définition****Pour commencer**

On part de 2 et on ajoute 6 à chaque étape : 2; 8; 14; 20; ... C'est la suite définie par  $u_0 = 2$  et  $u_{n+1} = u_n + 6$ .

On part de 10 et on retire 3 : 10; 7; 4; 1; ... C'est la suite définie par  $v_0 = 10$  et  $v_{n+1} = v_n - 3$ .

**Définition 5 — Suite arithmétique**

Une suite  $(u_n)$  est **arithmétique** quand on passe d'un terme au suivant en **ajoutant toujours le même nombre**  $r$  : pour tout  $n$ ,

$$u_{n+1} = u_n + r$$

Le nombre  $r$  s'appelle la **raison** de la suite.

**Propriété 1 — Reconnaître une suite arithmétique**

Une suite est arithmétique quand la **différence** entre deux termes consécutifs est toujours la même :  $u_{n+1} - u_n = r$ . Dans un énoncé : une grandeur augmente (ou diminue) **de la même quantité** à chaque étape.

**Méthode 4 — Reconnaître et modéliser une suite arithmétique****Exemples corrigés**

- En 2020, une commune compte 800 arbres en ville et en plante 150 de plus chaque année. On note  $u_n$  le nombre d'arbres en 2020 +  $n$ . Calculer  $u_1$  et  $u_2$ , exprimer  $u_{n+1}$  en fonction de  $u_n$ , puis donner la nature de la suite.
- Le 1<sup>er</sup> mars, une station de ski a 120 cm de neige; la hauteur baisse de 4 cm par jour. On note  $h_n$  la hauteur, en cm,  $n$  jours après le 1<sup>er</sup> mars. Modéliser par une suite.
- Les listes 7; 11; 15; 19 et 2; 5; 9; 14 sont-elles les premiers termes de suites arithmétiques?

**a)**

$$u_0 = 800; u_1 = 800 + 150 = 950; u_2 = 950 + 150 = 1\,100.$$

$$u_{n+1} = u_n + 150$$

$(u_n)$  est arithmétique, de premier terme  $u_0 = 800$  et de raison  $r = 150$ .

**b)**

$$h_0 = 120 \text{ et } h_{n+1} = h_n - 4.$$

$(h_n)$  est arithmétique, de raison  $r = -4$ .

**c)**

$$11 - 7 = 4; 15 - 11 = 4; 19 - 15 = 4.$$

Première liste : arithmétique, de raison 4.

$$5 - 2 = 3 \text{ mais } 9 - 5 = 4.$$

Deuxième liste : pas arithmétique.

**À vous de jouer**

en 2022, la commune compte 1 100 arbres  
chaque année, on ajoute 150  
même nombre ajouté à chaque étape

on retire 4 chaque jour  
retirer 4, c'est ajouter  $-4$

différences successives  
les différences sont égales

les différences changent

- 1°) En 2024, une association compte 65 bénévoles et en accueille 9 de plus chaque année. On note  $b_n$  le nombre de bénévoles en 2024 +  $n$ . Exprimer  $b_{n+1}$  en fonction de  $b_n$  et donner la nature de la suite.
- 2°) Les listes 30; 26; 22; 18 et 2; 4; 8; 16 sont-elles les premiers termes de suites arithmétiques ?

Réponses :  $b_{n+1} = b_n + 9$  : arithmétique de raison 9 ; la première oui (raison -4), la seconde non (2, puis 4).

► **À faire** : fiche d'exercices du chapitre, exercices 16 à 19.

## V — Suites arithmétiques : expression en fonction de $n$

### Propriété 2 — Terme de rang $n$

Si  $(u_n)$  est arithmétique de raison  $r$ , alors, pour tout entier  $n$  :

$$u_n = u_0 + n \times r$$

En effet, pour aller de  $u_0$  à  $u_n$ , on ajoute  $n$  fois la raison :  $u_1 = u_0 + r$  ;  $u_2 = u_0 + 2r$  ;  $u_3 = u_0 + 3r \dots$

### Méthode 5 — Exprimer une suite arithmétique en fonction de $n$

#### Exemples corrigés

- a) Soit  $u_0 = 12$  et  $u_{n+1} = u_n - 5$ . Exprimer  $u_n$  en fonction de  $n$ , puis calculer  $u_{30}$ .
- b) Soit  $u_1 = 8$  et  $u_{n+1} = u_n + 3$ . Exprimer  $u_n$  en fonction de  $n$ .
- c) Arbres de la méthode 4 : exprimer  $u_n$  en fonction de  $n$ , puis calculer le nombre d'arbres en 2035.

a)

$$u_n = u_0 + n \times r \quad \text{premier terme 12, raison } -5$$

$$u_n = 12 + n \times (-5)$$

$$u_n = 12 - 5n$$

$$u_{30} = 12 - 5 \times 30 \quad \text{on remplace } n \text{ par } 30$$

$$u_{30} = -138$$

b)

$$u_0 = u_1 - 3 \quad \text{on recule d'un rang : on retire la raison}$$

$$u_0 = 5$$

$$u_n = 5 + 3n \quad u_0 + n \times r$$

Contrôle :  $u_1 = 5 + 3 \times 1 = 8$ .

on retrouve la donnée

c)

$$u_n = 800 + 150n \quad \text{premier terme 800, raison 150}$$

$$u_{15} = 800 + 150 \times 15 \quad 2035 \text{ correspond à } n = 15$$

$$u_{15} = 3\,050$$

En 2035, la commune comptera 3 050 arbres.

#### À vous de jouer

- 1°) Soit  $v_0 = -3$  et  $v_{n+1} = v_n + 7$ . Exprimer  $v_n$  en fonction de  $n$  et calculer  $v_{20}$ .
- 2°) Soit  $w_1 = 40$  et  $w_{n+1} = w_n - 1,5$ . Exprimer  $w_n$  en fonction de  $n$ .
- 3°) Bénévoles de la méthode 4 : combien seront-ils en 2034 ?

Réponses :  $v_n = -3 + 7n$  et  $v_{20} = 137$  ;  $w_0 = 41,5$  donc  $w_n = 41,5 - 1,5n$  ;  $b_n = 65 + 9n$  donc  $b_{10} = 155$ .

► **À faire** : fiche d'exercices du chapitre, exercices 20 à 24.

## VI — Suites arithmétiques : problème de seuil

### Problème de seuil

« À partir de quel rang  $u_n$  dépasse-t-il telle valeur ? » Pour une suite arithmétique, on résout une **inéquation du premier degré** (vue en seconde). Comme  $n$  est entier, on garde le **premier entier** qui convient.

### Méthode 6 — Résoudre un problème de seuil (croissance linéaire)

#### Exemples corrigés

Une cycliste parcourt 20 km le jour 0, puis 4 km de plus chaque jour. On note  $u_n$  la distance parcourue le jour  $n$ . À partir de quel jour parcourra-t-elle plus de 75 km ?

#### Résolution

$$u_n = 20 + 4n$$

arithmétique : premier terme 20, raison 4

$$20 + 4n > 75 \quad \text{on traduit la question}$$

$$4n > 55 \quad \text{on retire 20}$$

$$n > 13,75 \quad \text{on divise par 4, positif}$$

Le premier entier qui convient est  $n = 14$  : à partir du 14<sup>e</sup> jour, elle parcourra plus de 75 km.

on répond dans le contexte

Contrôle :  $u_{13} = 72$  et  $u_{14} = 76$ .

#### À vous de jouer

1°) Arbres de la méthode 4 ( $u_n = 800 + 150n$ ) : à partir de quelle année la commune comptera-t-elle au moins 2750 arbres ?

2°) Neige de la méthode 4 ( $h_n = 120 - 4n$ ) : à partir de quel jour de mars y aura-t-il moins de 50 cm de neige ?

Réponses :  $150n \geq 1950$  donc  $n \geq 13$  : en 2033 ;  $-4n < -70$  donc  $n > 17,5$  (on divise par  $-4$  : le sens change) :  $n = 18$ , le 19 mars.

► **À faire** : fiche d'exercices du chapitre, exercices 25 à 28.

## VII — Suites arithmétiques : variations et représentation graphique

### Propriété 3 — Sens de variation

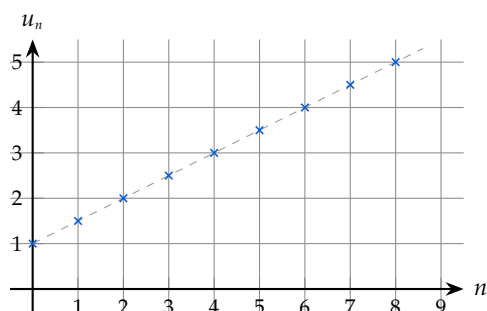
Soit  $(u_n)$  une suite arithmétique de raison  $r$ .

- Si  $r > 0$ , la suite est **croissante** : chaque terme est plus grand que le précédent (les points montent).
- Si  $r = 0$ , la suite est **constante**.
- Si  $r < 0$ , la suite est **décroissante** : chaque terme est plus petit que le précédent (les points descendent).

**Démonstration.**  $u_{n+1} = u_n + r$  : on ajoute  $r$  à chaque terme ; si  $r > 0$ , le terme suivant est plus grand.

### Propriété 4 — Représentation graphique

Les points d'une suite arithmétique sont **alignés**, sur la droite d'équation  $y = u_0 + rx$  : on parle de **croissance linéaire**. La raison  $r$  joue le rôle du coefficient directeur.



Suite arithmétique de premier terme  $u_0 = 1$  et de raison  $r = 0,5$  :  $u_n = 1 + 0,5n$ .

Les points sont alignés : à chaque pas de 1 vers la droite, on monte de 0,5. Comme  $r > 0$ , la suite est croissante.

### Méthode 7 — Sens de variation d'une suite arithmétique

#### Exemples corrigés

Donner le sens de variation de chaque suite.

a)  $u_n = 7 - 2n$

b)  $v_0 = 10$  et  $v_{n+1} = v_n + 0,3$

c) La suite représentée ci-dessus : lire aussi son premier terme et sa raison.

**a)**  $(u_n)$  est arithmétique de raison  $-2$  : elle est décroissante. *la raison est le coefficient de  $n$ , et  $-2 < 0$*

**b)**  $(v_n)$  est arithmétique de raison  $0,3$  : elle est croissante. *on ajoute 0,3 à chaque étape, et  $0,3 > 0$*

**c)**  $u_0 = 1$  *le premier point est  $(0; 1)$*   
 $r = 0,5$  : la suite est croissante. *d'un point au suivant, on monte de 0,5*

#### À vous de jouer

Donner le sens de variation de chaque suite arithmétique :

$$u_n = -5 + 0,5n$$

$$v_0 = 3 \text{ et } v_{n+1} = v_n - 1,5$$

$$w_n = 4n - 9$$

Réponses :  $r = 0,5$  : croissante ;  $r = -1,5$  : décroissante ;  $r = 4$  : croissante.

► **À faire** : fiche d'exercices du chapitre, exercices 29 à 31.

## VIII — Suites géométriques : définition

### Pour commencer

On part de 3 et on multiplie par 2 à chaque étape :

$$3 \xrightarrow{\times 2} 6 \xrightarrow{\times 2} 12 \xrightarrow{\times 2} 24 \xrightarrow{\times 2} \dots$$

C'est une suite **géométrique**, de premier terme  $u_0 = 3$  et de raison  $q = 2$  :  $u_{n+1} = 2 u_n$ .

### Définition 6 — Suite géométrique

Une suite  $(u_n)$  est **géométrique** quand on passe d'un terme au suivant en **multipliant toujours par le même nombre**  $q > 0$  : pour tout  $n$ ,

$$u_{n+1} = q \times u_n$$

Le nombre  $q$  s'appelle la **raison** de la suite.

**Exemple**

La suite géométrique de premier terme  $u_0 = 3$  et de raison  $q = 5$  :

$$u_0 = 3 \quad u_1 = 5 \times 3 = 15 \quad u_2 = 5 \times 15 = 75 \quad u_3 = 5 \times 75 = 375$$

**Rappel de seconde — Coefficient multiplicateur**

- Augmenter de  $t\%$ , c'est multiplier par  $1 + \frac{t}{100}$  :  $+3\%$  donne  $\times 1,03$ .
- Diminuer de  $t\%$ , c'est multiplier par  $1 - \frac{t}{100}$  :  $-15\%$  donne  $\times 0,85$ .
- Lien avec la raison : une grandeur qui évolue **du même pourcentage** à chaque étape forme une suite géométrique ; sa raison  $q$  est le **coefficient multiplicateur**.

**Méthode 8 — Calculer les premiers termes d'une suite géométrique****Exemples corrigés**

- a) La suite  $(u_n)$  est géométrique, de premier terme  $u_0 = 2$  et de raison  $q = 3$ . Calculer  $u_1$ ,  $u_2$  et  $u_3$ .
- b) On place 1 000 € sur un livret à 3 % par an, intérêts compris dans le capital. On note  $u_n$  le capital, en €, au bout de  $n$  années. Calculer  $u_1$  et  $u_2$ , puis exprimer  $u_{n+1}$  en fonction de  $u_n$ .
- c) En 2022, un lac contient 400 kg de déchets plastiques ; grâce au nettoyage, cette masse baisse de 20 % par an. On note  $v_n$  la masse, en kg, en 2022 +  $n$ . Calculer  $v_1$  et  $v_2$ , puis exprimer  $v_{n+1}$  en fonction de  $v_n$ .

**a)**

$$u_1 = 3 \times 2 = 6$$

$$u_2 = 3 \times 6 = 18$$

$$u_3 = 3 \times 18 = 54$$

*on multiplie par la raison***b)**

Augmenter de 3 %, c'est multiplier par 1,03.

$$u_0 = 1\,000 \text{ et } u_1 = 1,03 \times 1\,000 = 1\,030.$$

$$u_2 = 1,03 \times 1\,030 = 1\,060,90$$

$$u_{n+1} = 1,03 u_n : \text{suite géométrique de raison } q = 1,03.$$

$$1 + \frac{3}{100} = 1,03$$

*au bout d'un an : 1 030 €*

$$1\,030 + 30,90$$

*même coefficient chaque année***c)**

Baisser de 20 %, c'est multiplier par 0,8.

$$v_0 = 400 \text{ et } v_1 = 0,8 \times 400 = 320.$$

$$v_2 = 0,8 \times 320 = 256$$

$$v_{n+1} = 0,8 v_n : \text{suite géométrique de raison } q = 0,8.$$

$$1 - \frac{20}{100} = 0,8$$

*en 2023, il reste 320 kg**en 2024, il reste 256 kg**même coefficient chaque année***À vous de jouer**

- 1°) La suite  $(w_n)$  est géométrique, de premier terme  $w_0 = 4$  et de raison  $q = 5$ . Calculer  $w_1$ ,  $w_2$  et  $w_3$ .
- 2°) En 2025, une ville compte 30 000 habitants ; sa population augmente de 2 % par an. On note  $p_n$  la population en 2025 +  $n$ . Calculer  $p_1$  et  $p_2$ , puis exprimer  $p_{n+1}$  en fonction de  $p_n$ .
- 3°) Un téléphone acheté 800 € perd 25 % de sa valeur chaque année. On note  $t_n$  sa valeur, en €, au bout de  $n$  années. Calculer  $t_1$  et  $t_2$ , puis exprimer  $t_{n+1}$  en fonction de  $t_n$ .

Réponses : 20 ; 100 ; 500 ;  $p_1 = 30\,600$  ;  $p_2 = 31\,212$  ;  $p_{n+1} = 1,02 p_n$  ;  $t_1 = 600$  ;  $t_2 = 450$  ;  $t_{n+1} = 0,75 t_n$ .

► **À faire** : fiche d'exercices du chapitre, exercices 32 à 35.

**Propriété 5 — Reconnaître une suite géométrique**

Une suite à termes strictement positifs est géométrique quand le **quotient** de deux termes consécutifs est toujours le même :  $\frac{u_{n+1}}{u_n} = q$ . Dans un énoncé : une grandeur évolue **du même pourcentage** à chaque étape.

**Méthode 9 — Reconnaître une suite géométrique****Exemples corrigés**

- a) Les listes 5 ; 15 ; 45 ; 135 et 5 ; 10 ; 15 ; 20 sont-elles les premiers termes de suites géométriques ?  
 b) Chaque mois, le nombre d'abonnés d'une chaîne vidéo augmente de 10 %. Le nombre d'abonnés forme-t-il une suite géométrique ? Si oui, donner sa raison.

**a)**

$$\frac{15}{5} = 3; \frac{45}{15} = 3; \frac{135}{45} = 3.$$

*quotients successifs*

Première liste : géométrique, de raison 3.

*les quotients sont égaux*

$$\frac{10}{5} = 2 \text{ mais } \frac{15}{10} = 1,5.$$

Deuxième liste : pas géométrique (elle est arithmétique, de raison 5).

**b)**

Augmenter de 10 %, c'est multiplier par 1,1.

$$1 + \frac{10}{100} = 1,1$$

Suite géométrique, de raison  $q = 1,1$ .

*même pourcentage chaque mois***À vous de jouer**

- 1°) Les listes 81 ; 27 ; 9 ; 3 et 2 ; 4 ; 8 ; 14 sont-elles les premiers termes de suites géométriques ?  
 2°) Chaque année, la consommation d'eau d'un immeuble baisse de 5 %. Forme-t-elle une suite géométrique ? Si oui, donner sa raison.

Réponses : La première oui (raison  $\frac{1}{3}$ ), la seconde non ; oui, de raison 0,95.

► **À faire** : fiche d'exercices du chapitre, exercice 36.

**IX — Suites géométriques : expression en fonction de  $n$** **Propriété 6 — Terme de rang  $n$** 

Si  $(u_n)$  est géométrique de raison  $q$ , alors, pour tout entier  $n$  :

$$u_n = u_0 \times q^n$$

En effet, pour aller de  $u_0$  à  $u_n$ , on multiplie  $n$  fois par la raison :  $u_1 = u_0 \times q$  ;  $u_2 = u_0 \times q^2$  ;  $u_3 = u_0 \times q^3 \dots$

**Méthode 10 — Exprimer une suite géométrique en fonction de  $n$** **Exemples corrigés**

- a) Soit  $u_0 = 5$  et  $u_{n+1} = 3u_n$ . Exprimer  $u_n$  en fonction de  $n$ , puis calculer  $u_4$ .  
 b) Soit  $u_1 = 12$  et  $u_{n+1} = 4u_n$ . Exprimer  $u_n$  en fonction de  $n$ .  
 c) Livret à 3 % (partie VIII) : exprimer  $u_n$  en fonction de  $n$ , puis donner le capital au bout de 10 ans. On donne  $1,03^{10} \simeq 1,34$ .

a)

$$u_n = u_0 \times q^n \quad \text{premier terme 5, raison 3}$$

$$u_n = 5 \times 3^n$$

$$u_4 = 5 \times 3^4 \quad \text{la puissance d'abord : } 3^4 = 81$$

$$u_4 = 405$$

b)

$$u_0 = \frac{u_1}{4} \quad \text{on recule d'un rang : on divise par la raison}$$

$$u_0 = 3$$

$$u_n = 3 \times 4^n \quad u_0 \times q^n$$

c)

$$u_n = 1\,000 \times 1,03^n \quad \text{premier terme 1 000, raison 1,03}$$

$$u_{10} \simeq 1\,000 \times 1,34 \quad \text{on utilise la valeur donnée}$$

$$u_{10} \simeq 1\,340$$

Au bout de 10 ans, le capital vaut environ 1 340 €.

### À vous de jouer

1°) Soit  $v_0 = 500$  et  $v_{n+1} = 0,8 v_n$ . Exprimer  $v_n$  en fonction de  $n$  et calculer  $v_2$ .

2°) Soit  $w_1 = 10$  et  $w_{n+1} = 2w_n$ . Exprimer  $w_n$  en fonction de  $n$  et calculer  $w_5$ .

3°) On place 3 000 € à 2 % par an. Quel est le capital au bout de 10 ans ? On donne  $1,02^{10} \simeq 1,22$ .

Réponses :  $v_n = 500 \times 0,8^n$  et  $v_2 = 320$ ;  $w_0 = 5$ ;  $w_n = 5 \times 2^n$  et  $w_5 = 160$ ; environ  $3\,000 \times 1,22 = 3\,660$  €.

► **À faire** : fiche d'exercices du chapitre, exercices 37 à 41.

## X — Suites géométriques : variations et représentation graphique

### Propriété 7 — Sens de variation

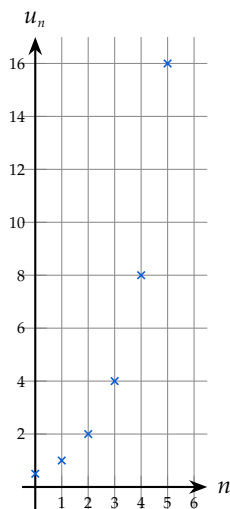
Soit  $(u_n)$  une suite géométrique de raison  $q > 0$  et de premier terme  $u_0 > 0$ .

- Si  $q > 1$ , la suite est **croissante**.
- Si  $q = 1$ , la suite est **constante**.
- Si  $0 < q < 1$ , la suite est **décroissante**.

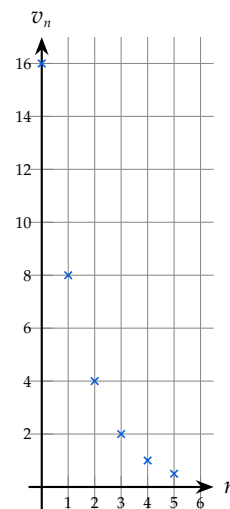
### Propriété 8 — Représentation graphique

Les points d'une suite géométrique **ne sont pas alignés**. Quand  $q > 1$ , l'écart entre deux termes consécutifs grandit de plus en plus : on parle de **croissance exponentielle** (de **décroissance exponentielle** quand  $0 < q < 1$ ).

$$u_n = 0,5 \times 2^n : q = 2 > 1$$



$$v_n = 16 \times 0,5^n : q = 0,5 < 1$$



### Méthode 11 — Sens de variation d'une suite géométrique

#### Exemples corrigés

Donner le sens de variation de chaque suite.

- a)  $u_n = 7 \times 1,5^n$
- b)  $v_0 = 40$  et  $v_{n+1} = 0,25 v_n$
- c) La masse de déchets du lac (méthode 8 :  $-20\%$  par an)

a)

$q = 1,5 > 1 : (u_n)$  est croissante.

*la raison est le nombre élevé à la puissance  $n$*

b)

$q = 0,25$  et  $0 < q < 1 : (v_n)$  est décroissante.

*on multiplie par 0,25 à chaque étape*

c)

$q = 0,8$  et  $0 < q < 1$  : la masse de déchets diminue d'année en année.

*baisse de  $20\%$  :  $\times 0,8$*

#### À vous de jouer

Donner le sens de variation de chaque suite géométrique :

$$u_n = 50 \times 0,9^n$$

$$v_0 = 3 \text{ et } v_{n+1} = 1,1 v_n$$

une population qui augmente de  $2\%$  par an

Réponses :  $q = 0,9 < 1$  : décroissante ;  $q = 1,1 > 1$  : croissante ;  $q = 1,02 > 1$  : croissante.

► **À faire** : fiche d'exercices du chapitre, exercices 42 à 44.

## XI — Suites géométriques : problème de seuil

### Seuil et croissance exponentielle

Cette année, l'inéquation  $u_0 \times q^n > \dots$  ne se résout pas par le calcul. L'énoncé donne un **tableau de valeurs** de  $q^n$  (comme à l'épreuve).

### Méthode 12 — Résoudre un problème de seuil avec un tableau de valeurs

#### Exemples corrigés

Déchets du lac (méthode 8) :  $v_n = 400 \times 0,8^n$ . En quelle année restera-t-il au plus 100 kg de déchets ? On donne :

| $n$               | 5    | 6    | 7    | 8    |
|-------------------|------|------|------|------|
| $0,8^n$ (arrondi) | 0,33 | 0,26 | 0,21 | 0,17 |

**Résolution**

$$400 \times 0,8^n \leq 100 \quad \text{on traduit la question : } v_n \leq 100$$

$$0,8^n \leq 0,25 \quad \text{on divise par 400 : } \frac{100}{400} = 0,25$$

$0,8^6 \simeq 0,26 > 0,25$  et  $0,8^7 \simeq 0,21 \leq 0,25$  : le premier rang est  $n = 7$ .

*on lit le tableau*

Il restera au plus 100 kg de déchets en  $2022 + 7 = 2029$ .

*on répond dans le contexte*

**À vous de jouer**

Une voiture achetée 20 000 € perd 15 % de sa valeur chaque année. On note  $a_n$  sa valeur, en euros, après  $n$  années.

1°) Exprimer  $a_n$  en fonction de  $n$ .

2°) Au bout de combien d'années vaudra-t-elle moins de 10 000 € ? On donne  $0,85^3 \simeq 0,61$  ;  $0,85^4 \simeq 0,52$  ;  $0,85^5 \simeq 0,44$ .

Réponses :  $a_n = 20\,000 \times 0,85^n$  ;  $a_n < 10\,000$  revient à  $0,85^n < 0,5$  : au bout de 5 ans.

► **À faire** : fiche d'exercices du chapitre, exercices 45 à 47.

**XII — Comparer deux évolutions**

|                        | Suite arithmétique    | Suite géométrique            |
|------------------------|-----------------------|------------------------------|
| D'un terme au suivant  | on <b>ajoute</b> $r$  | on <b>multiplie</b> par $q$  |
| Relation de récurrence | $u_{n+1} = u_n + r$   | $u_{n+1} = q \times u_n$     |
| Terme de rang $n$      | $u_n = u_0 + nr$      | $u_n = u_0 \times q^n$       |
| Croissante quand       | $r > 0$               | $q > 1$                      |
| Décroissante quand     | $r < 0$               | $0 < q < 1$                  |
| Graphique              | points alignés        | points non alignés           |
| Dans un énoncé         | même quantité ajoutée | même pourcentage d'évolution |
| Croissance             | linéaire              | exponentielle                |

**Méthode 13 — Comparer une croissance linéaire et une croissance exponentielle****Exemples corrigés**

Au 1<sup>er</sup> janvier, deux chaînes vidéo ont chacune 5 000 abonnés. La chaîne A en gagne 300 par mois ; celle de la chaîne B augmente de 5 % par mois. On note  $u_n$  et  $v_n$  les nombres d'abonnés de A et de B après  $n$  mois. À partir de quel mois la chaîne B a-t-elle plus d'abonnés que la chaîne A ? On donne :

| $n$             | 7     | 8     | 9     | 10    |
|-----------------|-------|-------|-------|-------|
| $v_n$ (arrondi) | 7 036 | 7 387 | 7 757 | 8 144 |

**Résolution**

$$u_n = 5\,000 + 300n$$

$$v_n = 5\,000 \times 1,05^n$$

A : on ajoute 300, suite arithmétique

B : on multiplie par 1,05, suite géométrique

$$u_8 = 5\,000 + 300 \times 8 = 7\,400 \quad 7\,400 > 7\,387 : A \text{ devant}$$

$$u_9 = 5\,000 + 300 \times 9 = 7\,700 \quad 7\,700 < 7\,757 : B \text{ devant}$$

À partir du 9<sup>e</sup> mois, la chaîne B a plus d'abonnés.

*la croissance exponentielle finit par dépasser la croissance linéaire*

### À vous de jouer

En 2025, la ville A compte 12 000 habitants et en gagne 400 par an ; la ville B compte 10 000 habitants, avec une hausse de 4 % par an.

1°) Exprimer la population de chaque ville en fonction de  $n$  (année 2025 +  $n$ ).

2°) À partir de quelle année la ville B sera-t-elle la plus peuplée ? On donne, pour la ville B : 16 651 habitants en 2038, 17 317 en 2039 et 18 009 en 2040 (valeurs arrondies).

Réponses :  $a_n = 12\,000 + 400n$  et  $b_n = 10\,000 \times 1,04^n$  ;  $a_{14} = 17\,600 > 17\,317$  mais  $a_{15} = 18\,000 < 18\,009$  : à partir de 2040.

► **À faire** : fiche d'exercices du chapitre, exercices 48 à 50, puis les exercices de type épreuve 51 à 53.