

SUITES NUMÉRIQUES

Cours — Première, mathématiques spécifiques

Version élève

Comment utiliser ce cours

Chaque partie commence par ce qu'il faut **savoir** (définitions, propriétés), puis vient ce qu'il faut **savoir faire** : une méthode, avec des **exemples** faits en classe, puis des exercices « **À vous de jouer** » à chercher seul.

Sur cette feuille, seuls les **énoncés** des exemples figurent : la résolution, signalée par la mention *(au tableau)*, est à rédiger dans le cahier.

I — Notion de suite

Pour commencer

Écrivons les multiples de 4 dans l'ordre : 0 ; 4 ; 8 ; 12 ; 16 ; ... On leur donne un numéro, en commençant à 0 :

$$u_0 = 0 \quad u_1 = 4 \quad u_2 = 8 \quad u_3 = 12 \quad \dots$$

Chaque entier n reçoit un nombre u_n : c'est une **suite**. Ici, $u_n = 4n$.

Définition 1 — Suite numérique

Une **suite** associe un nombre u_n à chaque entier $n = 0 ; 1 ; 2 ; \dots$ (on lit « u indice n »).

- u_n est le **terme de rang** n ; la suite se note (u_n) .
- Le premier terme est u_0 , le deuxième u_1 , le troisième u_2 , ...
- Le terme **suivant** u_n est u_{n+1} ; le terme **précédent** est u_{n-1} .

Définition 2 — Suite définie de façon explicite

Une suite est définie **de façon explicite** quand une formule donne u_n directement à partir de n , par exemple $u_n = 4n$. On calcule alors **n'importe quel terme** sans connaître les précédents.

Méthode 1 — Calculer un terme d'une suite définie de façon explicite

Exemples

(au tableau)

- Soit $u_n = 3n + 4$. Calculer u_0 , u_1 , u_2 et u_{15} .
- Soit $v_n = 4n^2 - 1$. Calculer les quatre premiers termes.
- Une carte de bus coûte 8 €, puis chaque trajet 1,50 €. Pour n trajets, on paie $c_n = 8 + 1,5n$ euros. Calculer c_{20} et interpréter.

À vous de jouer

- Soit $u_n = 4n - 7$. Calculer u_0 , u_1 et u_{30} .
- Soit $v_n = n^2 + 3n$. Calculer les quatre premiers termes.
- Une salle de sport demande 30 € d'inscription, puis 6 € par séance. Pour n séances, on paie $c_n = 30 + 6n$ euros. Calculer c_{12} et interpréter.

Ne pas confondre u_{n+1} et $u_n + 1$

u_{n+1} est le terme **suivant**; $u_n + 1$ est le terme u_n augmenté de 1. Avec $u_n = 3n + 4$ et $n = 2$: $u_3 = 13$, alors que $u_2 + 1 = 11$.

► **À faire** : fiche d'exercices du chapitre, exercices 1 à 5.

II — Suites définies par récurrence**Définition 3 — Suite définie par récurrence**

Une suite est définie **par récurrence** quand on connaît :

- son **premier terme** (en général u_0);
- une **relation** qui donne chaque terme à partir du **précédent** : u_{n+1} en fonction de u_n .

Exemple : $u_0 = 6$ et $u_{n+1} = 2u_n$ se lit « on part de 6, et chaque terme est le double du précédent ».

Méthode 2 — Calculer les termes d'une suite définie par récurrence**Exemples**

(au tableau)

- Soit $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = 5u_n$. Calculer u_1 , u_2 et u_3 .
- Soit $v_0 = 4$ et $v_{n+1} = 2v_n - 3$. Calculer v_1 , v_2 et v_3 .
- Léa a 45 abonnés sur son compte de photos et en gagne 8 chaque semaine. On note a_n son nombre d'abonnés après n semaines. Donner a_0 , exprimer a_{n+1} en fonction de a_n , puis calculer a_3 .

À vous de jouer

- Soit $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = 3u_n + 2$. Calculer u_1 , u_2 et u_3 .
- Soit $v_0 = 80$ et $v_{n+1} = v_n - 12$. Calculer v_1 , v_2 et v_3 .
- À 8 h, un parking a 300 places libres; chaque quart d'heure, 25 voitures s'y garent. On note p_n le nombre de places libres après n quarts d'heure. Donner p_0 , exprimer p_{n+1} en fonction de p_n , puis calculer p_3 .

Au tableur

Pour une suite définie par récurrence, u_{12} demande d'abord u_{11} , donc u_{10} ... jusqu'à u_0 : douze calculs, qu'un tableur fait à notre place. On écrit le premier terme en B2, puis en B3 une formule qui utilise la cellule du dessus, recopiée vers le bas. Pour $v_{n+1} = 2v_n - 3$: $=2*B2-3$. L'épreuve demande parfois cette formule.

► **À faire** : fiche d'exercices du chapitre, exercices 6 à 11.

III — Représentation graphique d'une suite**Définition 4 — Représentation graphique**

Dans un repère, une suite (u_n) se représente par les **points** de coordonnées $(n; u_n)$. On ne relie **pas** les points : n ne prend que des valeurs entières.

Méthode 3 — Représenter graphiquement une suite**Exemples**

(au tableau)

Représenter les six premiers termes de la suite définie par $u_n = \frac{n^2}{2} - 2$.

À vous de jouer

Représenter les cinq premiers termes de chaque suite :

$$1^\circ) v_n = 7 - 2n;$$

$$2^\circ) w_n = n^2 - 4.$$

► **À faire** : fiche d'exercices du chapitre, exercices 12 à 15.

IV — Suites arithmétiques : définition

Pour commencer

On part de 2 et on ajoute 6 à chaque étape : 2 ; 8 ; 14 ; 20 ; ... C'est la suite définie par $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = u_n + 6$.

On part de 10 et on retire 3 : 10 ; 7 ; 4 ; 1 ; ... C'est la suite définie par $v_0 = 10$ et $v_{n+1} = v_n - 3$.

Définition 5 — Suite arithmétique

Une suite (u_n) est **arithmétique** quand on passe d'un terme au suivant en **ajoutant toujours le même nombre** r : pour tout n ,

$$u_{n+1} = u_n + r$$

Le nombre r s'appelle la **raison** de la suite.

Propriété 1 — Reconnaître une suite arithmétique

Une suite est arithmétique quand la **différence** entre deux termes consécutifs est toujours la même : $u_{n+1} - u_n = r$. Dans un énoncé : une grandeur augmente (ou diminue) **de la même quantité** à chaque étape.

Méthode 4 — Reconnaître et modéliser une suite arithmétique

Exemples

(au tableau)

- En 2020, une commune compte 800 arbres en ville et en plante 150 de plus chaque année. On note u_n le nombre d'arbres en 2020 + n . Calculer u_1 et u_2 , exprimer u_{n+1} en fonction de u_n , puis donner la nature de la suite.
- Le 1^{er} mars, une station de ski a 120 cm de neige ; la hauteur baisse de 4 cm par jour. On note h_n la hauteur, en cm, n jours après le 1^{er} mars. Modéliser par une suite.
- Les listes 7 ; 11 ; 15 ; 19 et 2 ; 5 ; 9 ; 14 sont-elles les premiers termes de suites arithmétiques ?

À vous de jouer

- En 2024, une association compte 65 bénévoles et en accueille 9 de plus chaque année. On note b_n le nombre de bénévoles en 2024 + n . Exprimer b_{n+1} en fonction de b_n et donner la nature de la suite.
- Les listes 30 ; 26 ; 22 ; 18 et 2 ; 4 ; 8 ; 16 sont-elles les premiers termes de suites arithmétiques ?

► **À faire** : fiche d'exercices du chapitre, exercices 16 à 19.

V — Suites arithmétiques : expression en fonction de n

Propriété 2 — Terme de rang n

Si (u_n) est arithmétique de raison r , alors, pour tout entier n :

$$u_n = u_0 + n \times r$$

En effet, pour aller de u_0 à u_n , on ajoute n fois la raison : $u_1 = u_0 + r$; $u_2 = u_0 + 2r$; $u_3 = u_0 + 3r$...

Méthode 5 — Exprimer une suite arithmétique en fonction de n

Exemples

(au tableau)

- a) Soit $u_0 = 12$ et $u_{n+1} = u_n - 5$. Exprimer u_n en fonction de n , puis calculer u_{30} .
- b) Soit $u_1 = 8$ et $u_{n+1} = u_n + 3$. Exprimer u_n en fonction de n .
- c) Arbres de la méthode 4 : exprimer u_n en fonction de n , puis calculer le nombre d'arbres en 2035.

À vous de jouer

- 1°) Soit $v_0 = -3$ et $v_{n+1} = v_n + 7$. Exprimer v_n en fonction de n et calculer v_{20} .
- 2°) Soit $w_1 = 40$ et $w_{n+1} = w_n - 1,5$. Exprimer w_n en fonction de n .
- 3°) Bénévoles de la méthode 4 : combien seront-ils en 2034 ?

► À faire : fiche d'exercices du chapitre, exercices 20 à 24.

VI — Suites arithmétiques : problème de seuil

Problème de seuil

« À partir de quel rang u_n dépasse-t-il telle valeur ? » Pour une suite arithmétique, on résout une **inéquation du premier degré** (vue en seconde). Comme n est entier, on garde le **premier entier** qui convient.

Méthode 6 — Résoudre un problème de seuil (croissance linéaire)

Exemples

(au tableau)

Une cycliste parcourt 20 km le jour 0, puis 4 km de plus chaque jour. On note u_n la distance parcourue le jour n . À partir de quel jour parcourra-t-elle plus de 75 km ?

À vous de jouer

- 1°) Arbres de la méthode 4 ($u_n = 800 + 150n$) : à partir de quelle année la commune comptera-t-elle au moins 2750 arbres ?
- 2°) Neige de la méthode 4 ($h_n = 120 - 4n$) : à partir de quel jour de mars y aura-t-il moins de 50 cm de neige ?

► À faire : fiche d'exercices du chapitre, exercices 25 à 28.

VII — Suites arithmétiques : variations et représentation graphique

Propriété 3 — Sens de variation

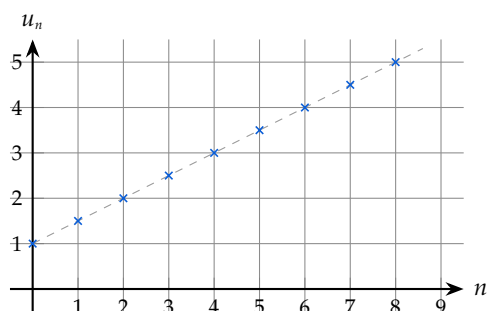
Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r .

- Si $r > 0$, la suite est **croissante** : chaque terme est plus grand que le précédent (les points montent).
- Si $r = 0$, la suite est **constante**.
- Si $r < 0$, la suite est **décroissante** : chaque terme est plus petit que le précédent (les points descendent).

Démonstration. $u_{n+1} = u_n + r$: on ajoute r à chaque terme ; si $r > 0$, le terme suivant est plus grand.

Propriété 4 — Représentation graphique

Les points d'une suite arithmétique sont **alignés**, sur la droite d'équation $y = u_0 + rx$: on parle de **croissance linéaire**. La raison r joue le rôle du coefficient directeur.



Suite arithmétique de premier terme $u_0 = 1$ et de raison $r = 0,5$: $u_n = 1 + 0,5n$.

Les points sont alignés : à chaque pas de 1 vers la droite, on monte de 0,5. Comme $r > 0$, la suite est croissante.

Méthode 7 — Sens de variation d'une suite arithmétique

Exemples

(au tableau)

Donner le sens de variation de chaque suite.

- $u_n = 7 - 2n$
- $v_0 = 10$ et $v_{n+1} = v_n + 0,3$
- La suite représentée ci-dessus : lire aussi son premier terme et sa raison.

À vous de jouer

Donner le sens de variation de chaque suite arithmétique :

$$u_n = -5 + 0,5n$$

$$v_0 = 3 \text{ et } v_{n+1} = v_n - 1,5$$

$$w_n = 4n - 9$$

► **À faire** : fiche d'exercices du chapitre, exercices 29 à 31.

VIII — Suites géométriques : définition

Pour commencer

On part de 3 et on multiplie par 2 à chaque étape :

$$3 \xrightarrow{\times 2} 6 \xrightarrow{\times 2} 12 \xrightarrow{\times 2} 24 \xrightarrow{\times 2} \dots$$

C'est une suite **géométrique**, de premier terme $u_0 = 3$ et de raison $q = 2$: $u_{n+1} = 2 u_n$.

Définition 6 — Suite géométrique

Une suite (u_n) est **géométrique** quand on passe d'un terme au suivant en **multipliant toujours par le même nombre** $q > 0$: pour tout n ,

$$u_{n+1} = q \times u_n$$

Le nombre q s'appelle la **raison** de la suite.

Exemple

La suite géométrique de premier terme $u_0 = 3$ et de raison $q = 5$:

$$u_0 = 3 \quad u_1 = 5 \times 3 = 15 \quad u_2 = 5 \times 15 = 75 \quad u_3 = 5 \times 75 = 375$$

Rappel de seconde — Coefficient multiplicateur

- Augmenter de $t\%$, c'est multiplier par $1 + \frac{t}{100}$: $+3\%$ donne $\times 1,03$.
- Diminuer de $t\%$, c'est multiplier par $1 - \frac{t}{100}$: -15% donne $\times 0,85$.
- Lien avec la raison : une grandeur qui évolue **du même pourcentage** à chaque étape forme une suite géométrique ; sa raison q est le **coefficient multiplicateur**.

Méthode 8 — Calculer les premiers termes d'une suite géométrique

Exemples

(au tableau)

- La suite (u_n) est géométrique, de premier terme $u_0 = 2$ et de raison $q = 3$. Calculer u_1 , u_2 et u_3 .
- On place 1 000 € sur un livret à 3 % par an, intérêts compris dans le capital. On note u_n le capital, en €, au bout de n années. Calculer u_1 et u_2 , puis exprimer u_{n+1} en fonction de u_n .
- En 2022, un lac contient 400 kg de déchets plastiques ; grâce au nettoyage, cette masse baisse de 20 % par an. On note v_n la masse, en kg, en 2022 + n . Calculer v_1 et v_2 , puis exprimer v_{n+1} en fonction de v_n .

À vous de jouer

- La suite (w_n) est géométrique, de premier terme $w_0 = 4$ et de raison $q = 5$. Calculer w_1 , w_2 et w_3 .
- En 2025, une ville compte 30 000 habitants ; sa population augmente de 2 % par an. On note p_n la population en 2025 + n . Calculer p_1 et p_2 , puis exprimer p_{n+1} en fonction de p_n .
- Un téléphone acheté 800 € perd 25 % de sa valeur chaque année. On note t_n sa valeur, en €, au bout de n années. Calculer t_1 et t_2 , puis exprimer t_{n+1} en fonction de t_n .

► À faire : fiche d'exercices du chapitre, exercices 32 à 35.

Propriété 5 — Reconnaître une suite géométrique

Une suite à termes strictement positifs est géométrique quand le **quotient** de deux termes consécutifs est toujours le même : $\frac{u_{n+1}}{u_n} = q$. Dans un énoncé : une grandeur évolue **du même pourcentage** à chaque étape.

Méthode 9 — Reconnaître une suite géométrique

Exemples

(au tableau)

- Les listes 5 ; 15 ; 45 ; 135 et 5 ; 10 ; 15 ; 20 sont-elles les premiers termes de suites géométriques ?
- Chaque mois, le nombre d'abonnés d'une chaîne vidéo augmente de 10 %. Le nombre d'abonnés forme-t-il une suite géométrique ? Si oui, donner sa raison.

À vous de jouer

- Les listes 81 ; 27 ; 9 ; 3 et 2 ; 4 ; 8 ; 14 sont-elles les premiers termes de suites géométriques ?
- Chaque année, la consommation d'eau d'un immeuble baisse de 5 %. Forme-t-elle une suite géométrique ? Si oui, donner sa raison.

► À faire : fiche d'exercices du chapitre, exercice 36.

IX — Suites géométriques : expression en fonction de n Propriété 6 — Terme de rang n

Si (u_n) est géométrique de raison q , alors, pour tout entier n :

$$u_n = u_0 \times q^n$$

En effet, pour aller de u_0 à u_n , on multiplie n fois par la raison : $u_1 = u_0 \times q$; $u_2 = u_0 \times q^2$; $u_3 = u_0 \times q^3 \dots$

Méthode 10 — Exprimer une suite géométrique en fonction de n

Exemples

(au tableau)

- Soit $u_0 = 5$ et $u_{n+1} = 3u_n$. Exprimer u_n en fonction de n , puis calculer u_4 .

b) Soit $u_1 = 12$ et $u_{n+1} = 4u_n$. Exprimer u_n en fonction de n .

c) Livret à 3 % (partie VIII) : exprimer u_n en fonction de n , puis donner le capital au bout de 10 ans. On donne $1,03^{10} \simeq 1,34$.

À vous de jouer

1°) Soit $v_0 = 500$ et $v_{n+1} = 0,8 v_n$. Exprimer v_n en fonction de n et calculer v_2 .

2°) Soit $w_1 = 10$ et $w_{n+1} = 2w_n$. Exprimer w_n en fonction de n et calculer w_5 .

3°) On place 3 000 € à 2 % par an. Quel est le capital au bout de 10 ans ? On donne $1,02^{10} \simeq 1,22$.

► **À faire** : fiche d'exercices du chapitre, exercices 37 à 41.

X — Suites géométriques : variations et représentation graphique

Propriété 7 — Sens de variation

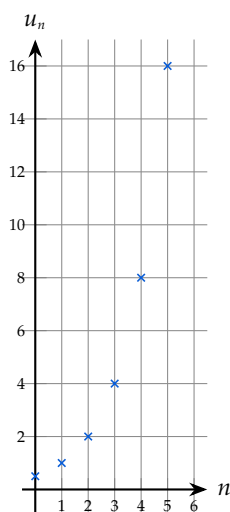
Soit (u_n) une suite géométrique de raison $q > 0$ et de premier terme $u_0 > 0$.

- Si $q > 1$, la suite est **croissante**.
- Si $q = 1$, la suite est **constante**.
- Si $0 < q < 1$, la suite est **décroissante**.

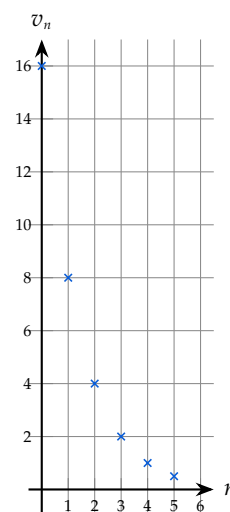
Propriété 8 — Représentation graphique

Les points d'une suite géométrique **ne sont pas alignés**. Quand $q > 1$, l'écart entre deux termes consécutifs grandit de plus en plus : on parle de **croissance exponentielle** (de **décroissance exponentielle** quand $0 < q < 1$).

$$u_n = 0,5 \times 2^n : q = 2 > 1$$



$$v_n = 16 \times 0,5^n : q = 0,5 < 1$$



Méthode 11 — Sens de variation d'une suite géométrique

Exemples

Donner le sens de variation de chaque suite.

a) $u_n = 7 \times 1,5^n$

b) $v_0 = 40$ et $v_{n+1} = 0,25 v_n$

c) La masse de déchets du lac (méthode 8 : -20 % par an)

(au tableau)

À vous de jouer

Donner le sens de variation de chaque suite géométrique :

$u_n = 50 \times 0,9^n$

$v_0 = 3$ et $v_{n+1} = 1,1 v_n$

une population qui augmente de 2 % par an

► À faire : fiche d'exercices du chapitre, exercices 42 à 44.

XI — Suites géométriques : problème de seuil

Seuil et croissance exponentielle

Cette année, l'inéquation $u_0 \times q^n > \dots$ ne se résout pas par le calcul. L'énoncé donne un **tableau de valeurs** de q^n (comme à l'épreuve).

Méthode 12 — Résoudre un problème de seuil avec un tableau de valeurs

Exemples

(au tableau)

Déchets du lac (méthode 8) : $v_n = 400 \times 0,8^n$. En quelle année restera-t-il au plus 100 kg de déchets ? On donne :

n	5	6	7	8
$0,8^n$ (arrondi)	0,33	0,26	0,21	0,17

À vous de jouer

Une voiture achetée 20 000 € perd 15 % de sa valeur chaque année. On note a_n sa valeur, en euros, après n années.

- 1°) Exprimer a_n en fonction de n .
- 2°) Au bout de combien d'années vaudra-t-elle moins de 10 000 € ? On donne $0,85^3 \simeq 0,61$; $0,85^4 \simeq 0,52$; $0,85^5 \simeq 0,44$.

► À faire : fiche d'exercices du chapitre, exercices 45 à 47.

XII — Comparer deux évolutions

	Suite arithmétique	Suite géométrique
D'un terme au suivant	on ajoute r	on multiplie par q
Relation de récurrence	$u_{n+1} = u_n + r$	$u_{n+1} = q \times u_n$
Terme de rang n	$u_n = u_0 + nr$	$u_n = u_0 \times q^n$
Croissante quand	$r > 0$	$q > 1$
Décroissante quand	$r < 0$	$0 < q < 1$
Graphique	points alignés	points non alignés
Dans un énoncé	même quantité ajoutée	même pourcentage d'évolution
Croissance	linéaire	exponentielle

Méthode 13 — Comparer une croissance linéaire et une croissance exponentielle

Exemples

(au tableau)

Au 1^{er} janvier, deux chaînes vidéo ont chacune 5 000 abonnés. La chaîne A en gagne 300 par mois ; celle de la chaîne B augmente de 5 % par mois. On note u_n et v_n les nombres d'abonnés de A et de B après n mois. À partir de quel mois la chaîne B a-t-elle plus d'abonnés que la chaîne A ? On donne :

n	7	8	9	10
v_n (arrondi)	7 036	7 387	7 757	8 144

À vous de jouer

En 2025, la ville A compte 12 000 habitants et en gagne 400 par an ; la ville B compte 10 000 habitants, avec une hausse de 4 % par an.

- 1°) Exprimer la population de chaque ville en fonction de n (année 2025 + n).
- 2°) À partir de quelle année la ville B sera-t-elle la plus peuplée ? On donne, pour la ville B : 16 651 habitants en 2038, 17 317 en 2039 et 18 009 en 2040 (valeurs arrondies).

► **À faire :** fiche d'exercices du chapitre, exercices 48 à 50, puis les exercices de type épreuve 51 à 53.