

CALCUL LITTÉRAL

Cours — Première STI2D

Comment utiliser ce cours

Chaque partie commence par ce qu'il faut **savoir** (définitions, théorèmes), puis vient ce qu'il faut **savoir faire** : une méthode, avec des **exemples corrigés** faits en classe, puis des exercices « **À vous de jouer** » à chercher seul.

I — Réduire une expression littérale

Définition 1 — Réduire

Des termes **semblables** ont la même partie littérale : $4x^2$ et $-x^2$ sont semblables, $4x^2$ et $4x$ ne le sont pas.

Réduire une somme, c'est regrouper les termes semblables en additionnant leurs coefficients. **Réduire un produit**, c'est multiplier les nombres entre eux et les lettres entre elles.

Remarque

Un produit se réduit toujours : $5 \times 2x = 10x$. Une somme pas toujours : dans $5 + 2x$, un terme est un nombre, l'autre contient x ; ils ne sont pas semblables, et $5 + 2x$ reste ainsi.

Méthode 1 — Réduire une somme ou un produit

Exemples corrigés

Réduire les expressions suivantes.

a) $A = 4x - 7y + 3x^2 - 9x + 2y$

b) $B = 3x \times 5x^2 \times 2y$

a)

$$A = 4x - 7y + 3x^2 - 9x + 2y \quad \text{on recopie}$$

$$A = 3x^2 + 4x - 9x - 7y + 2y \quad \text{on rapproche les termes semblables}$$

$$A = 3x^2 - 5x - 5y \quad \text{on additionne les coefficients}$$

b)

$$B = 3x \times 5x^2 \times 2y \quad \text{on recopie}$$

$$B = 3 \times 5 \times 2 \times x \times x^2 \times y \quad \text{les nombres d'abord, puis les lettres}$$

$$B = 30x^3y \quad x \times x^2 = x^3; \text{ on n'écrit plus les } \times$$

À vous de jouer

Réduire, si possible :

$$C = 8n - 3n^2 + 5 - 2n + 6n^2 - 9 \quad D = -4x \times 3x \times 5 \quad E = -5a \times (-2a^2) \quad F = 9 + 4t$$

Réponses : $C = 3n^2 + 6n - 4$; $D = -60x^2$; $E = 10a^3$; F ne se réduit pas.

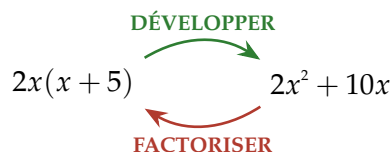
► **À faire** : fiche d'exercices du chapitre, exercices 1 à 3.

II — Développer

Définition 2 — Développer, factoriser

Développer, c'est transformer un produit en une somme.

Factoriser, c'est transformer une somme en un produit.



Propriété 1 — Distributivité

Pour tous nombres a, b, c, d et k :

$$k(a + b) = ka + kb \qquad (a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd$$

Un signe $-$ devant une parenthèse change le signe de chaque terme de la parenthèse : $-(3 - x) = -3 + x$.

Méthode 2 — Développer et réduire

Exemples corrigés

Développer et réduire les expressions suivantes.

a) $A = -4(3x - 5)$

b) $B = (3x + 2)(x - 4)$

c) $C = 3x(2 - x) - (x + 1)(2x - 5)$

a)

$$A = -4(3x - 5)$$

on recopie

$$A = (-4) \times 3x + (-4) \times (-5)$$

-4 multiplie chaque terme

$$A = -12x + 20$$

règle des signes : $(-4) \times (-5) = 20$

b)

$$B = (3x + 2)(x - 4)$$

on recopie

$$B = 3x^2 - 12x + 2x - 8$$

chaque terme par chaque terme : quatre produits

$$B = 3x^2 - 10x - 8$$

on réduit

c)

$$C = 3x(2 - x) - (x + 1)(2x - 5)$$

on recopie

$$C = 6x - 3x^2 - (2x^2 - 5x + 2x - 5)$$

on garde la parenthèse derrière le $-$

$$C = 6x - 3x^2 - (2x^2 - 3x - 5)$$

on réduit dans la parenthèse

$$C = 6x - 3x^2 - 2x^2 + 3x + 5$$

le $-$ change tous les signes

$$C = -5x^2 + 9x + 5$$

on réduit et on ordonne

À vous de jouer

Développer et réduire :

$$D = 6(2x - 3) \qquad E = -3(5 - 2x) \qquad F = 7x - 2(3x + 5)$$

$$G = (2x + 5)(x + 3) \qquad H = (3x - 2)(5 - x) \qquad I = (x + 3)(2x - 1) - x(x + 4)$$

Réponses : $D = 12x - 18$; $E = -15 + 6x$; $F = x - 10$; $G = 2x^2 + 11x + 15$; $H = -3x^2 + 17x - 10$; $I = x^2 + x - 3$.

► **À faire** : fiche d'exercices du chapitre, exercices 4 à 6.

III — Les trois identités remarquables

Propriété 2 — Identités remarquables

Pour tous nombres a et b :

- 1^{re} identité remarquable : $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$;
- 2^e identité remarquable : $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$;
- 3^e identité remarquable : $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$.

Remarque

Ce sont des raccourcis de la double distributivité. Attention : $(a + b)^2 \neq a^2 + b^2$; le **double produit** $2ab$ ne s'oublie jamais.

Méthode 3 — Développer avec une identité remarquable

Exemples corrigés

Développer et réduire les expressions suivantes.

- a) $A = (x + 6)^2$
 b) $B = (2x - 5)^2$
 c) $C = (3x + 4)(3x - 4)$
 d) $D = (x - 2)^2 - (x + 3)(3 - x)$

a)

$$\begin{aligned} A &= (x + 6)^2 && (a + b)^2, \text{ avec } a = x \text{ et } b = 6 \\ A &= x^2 + 2 \times x \times 6 + 6^2 && a^2 + 2ab + b^2 \\ A &= x^2 + 12x + 36 \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} B &= (2x - 5)^2 && (a - b)^2, \text{ avec } a = 2x \text{ et } b = 5 \\ B &= (2x)^2 - 2 \times 2x \times 5 + 5^2 && a^2 - 2ab + b^2; (2x)^2 = 4x^2 \\ B &= 4x^2 - 20x + 25 \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned} C &= (3x + 4)(3x - 4) && (a + b)(a - b), \text{ avec } a = 3x \text{ et } b = 4 \\ C &= (3x)^2 - 4^2 && a^2 - b^2 \\ C &= 9x^2 - 16 \end{aligned}$$

d)

$$\begin{aligned} D &= (x - 2)^2 - (x + 3)(3 - x) && (x + 3)(3 - x) = (3 + x)(3 - x) : \text{on réordonne} \\ D &= x^2 - 4x + 4 - (9 - x^2) && \text{deux identités; parenthèse gardée} \\ D &= x^2 - 4x + 4 - 9 + x^2 && \text{le } - \text{ change les signes} \\ D &= 2x^2 - 4x - 5 && \text{on réduit} \end{aligned}$$

À vous de jouer

Développer et réduire :

$$E = (x + 7)^2 \quad F = (3x - 2)^2 \quad G = (5x + 1)(5x - 1) \quad H = (x + 4)(x - 4) - (2x - 3)^2$$

Réponses : $E = x^2 + 14x + 49$; $F = 9x^2 - 12x + 4$; $G = 25x^2 - 1$; $H = x^2 - 16 - (4x^2 - 12x + 9) = -3x^2 + 12x - 25$.

► **À faire** : fiche d'exercices du chapitre, exercices 7 à 10.

IV — Factoriser

Pour **factoriser**, c'est-à-dire écrire une expression comme un produit, on cherche dans l'ordre :

- un **facteur commun** à tous les termes, nombre, lettre ou parenthèse entière : $ka + kb = k(a + b)$;
- sinon, une **identité remarquable** lue de droite à gauche : $a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$, $a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$, $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$.

Méthode 4 — Factoriser

Exemples corrigés

Factoriser les expressions suivantes.

- a) $A = 15x^2 - 20x$
 b) $B = (x + 4)(2x - 3) + (x + 4)(x + 5)$
 c) $C = (2x + 3)^2 - (2x + 3)(x - 1)$
 d) $D = 4x^2 + 28x + 49$
 e) $E = 25x^2 - 36$
 f) $F = 16 - (x + 3)^2$

a)

$$\begin{aligned} A &= 15x^2 - 20x && \text{on recopie} \\ A &= 5x \times 3x - 5x \times 4 && 5x \text{ est dans les deux termes} \\ A &= 5x(3x - 4) \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} B &= (x + 4)(2x - 3) + (x + 4)(x + 5) && \text{facteur commun : la parenthèse } (x + 4) \\ B &= (x + 4)[(2x - 3) + (x + 5)] && \text{on écrit ce qui reste dans un crochet} \\ B &= (x + 4)(3x + 2) && \text{on réduit le crochet} \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned} C &= (2x + 3)^2 - (2x + 3)(x - 1) && (2x + 3)^2 = (2x + 3)(2x + 3) \\ C &= (2x + 3)[(2x + 3) - (x - 1)] && \text{facteur commun } (2x + 3) \\ C &= (2x + 3)(2x + 3 - x + 1) && \text{le } - \text{ change les signes de } x - 1 \\ C &= (2x + 3)(x + 4) \end{aligned}$$

d)

$$\begin{aligned} D &= 4x^2 + 28x + 49 && \text{pas de facteur commun : identité remarquable ?} \\ D &= (2x)^2 + 2 \times 2x \times 7 + 7^2 && a = 2x, b = 7 ; \text{ le double produit vaut bien } 28x \\ D &= (2x + 7)^2 \end{aligned}$$

e)

$$\begin{aligned} E &= 25x^2 - 36 && \text{différence de deux carrés} \\ E &= (5x)^2 - 6^2 && a^2 - b^2, \text{ avec } a = 5x \text{ et } b = 6 \\ E &= (5x - 6)(5x + 6) \end{aligned}$$

f)

$$\begin{aligned} F &= 16 - (x + 3)^2 && a^2 - b^2, \text{ avec } a = 4 \text{ et } b = x + 3 \\ F &= [4 - (x + 3)][4 + (x + 3)] && \text{crochets : } b \text{ est une parenthèse} \\ F &= (1 - x)(7 + x) && \text{on réduit chaque crochet} \end{aligned}$$

À vous de jouer

Factoriser :

$$G = 14x^2 - 21x \quad H = (x - 2)(4x + 1) - (x - 2)(x - 6) \quad I = x^2 - 10x + 25$$

$$J = 9x^2 + 6x + 1 \quad K = 49x^2 - 4 \quad L = (x - 3)^2 - 36$$

Réponses : $G = 7x(2x - 3)$; $H = (x - 2)(3x + 7)$; $I = (x - 5)^2$; $J = (3x + 1)^2$; $K = (7x - 2)(7x + 2)$; $L = (x - 9)(x + 3)$.

► **À faire** : fiche d'exercices du chapitre, exercices 11 à 14.

V — Résoudre des équations**Définition 3 — Solutions d'une équation**

Résoudre une équation d'inconnue x , c'est trouver toutes les valeurs de x qui rendent l'égalité vraie : ce sont les **solutions**. On note S l'ensemble des solutions.

Propriété 3 — Produit nul

Un produit est nul si et seulement si l'un au moins de ses facteurs est nul : si $A \times B = 0$, alors $A = 0$ ou $B = 0$.

Propriété 4 — Équation $x^2 = k$

- Si $k > 0$, l'équation $x^2 = k$ a deux solutions : $-\sqrt{k}$ et $\sqrt{k}$.
- Si $k = 0$, elle a une seule solution : 0.
- Si $k < 0$, elle n'a pas de solution : un carré n'est jamais négatif.

Méthode 5 — Résoudre une équation**Exemples corrigés**

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes.

a) $6x - 5 = 2x + 7$

b) $2(x - 3) = -(x + 4) + 5$

c) $(2x + 8)(5 - 3x) = 0$

d) $(2x - 1)(x + 4) - (2x - 1)(3x - 2) = 0$

e) $2x^2 - 7x = 0$

f) $x^2 = 25$; $x^2 = -3$

a)

$$6x - 5 = 2x + 7 \quad \text{on recopie}$$

$$6x - 2x = 7 + 5 \quad \text{les } x \text{ à gauche, les nombres à droite}$$

$$4x = 12$$

$$x = 3 \quad \text{on divise par 4}$$

$$S = \{3\}.$$

on conclut par l'ensemble des solutions

b)

$$2(x - 3) = -(x + 4) + 5 \quad \text{on recopie}$$

$$2x - 6 = -x - 4 + 5 \quad \text{on développe d'abord}$$

$$2x + x = 1 + 6$$

$$3x = 7$$

$$x = \frac{7}{3}$$

on garde la fraction : $7 \div 3$ ne tombe pas juste

$$S = \left\{ \frac{7}{3} \right\}.$$

c)

$$(2x + 8)(5 - 3x) = 0 \quad \text{on recopie}$$

$$2x + 8 = 0 \quad \text{ou} \quad 5 - 3x = 0 \quad \text{produit nul : un des facteurs est nul}$$

$$x = -4 \quad \text{ou} \quad x = \frac{5}{3} \quad -3x = -5, \text{ donc } x = \frac{-5}{-3}$$

$$S = \left\{ -4; \frac{5}{3} \right\}.$$

solutions rangées dans l'ordre croissant

d)

$$(2x - 1)(x + 4) - (2x - 1)(3x - 2) = 0 \quad \text{on recopie}$$

$$(2x - 1)[(x + 4) - (3x - 2)] = 0 \quad \text{on factorise par } (2x - 1)$$

$$(2x - 1)(-2x + 6) = 0 \quad x + 4 - 3x + 2 = -2x + 6$$

$$2x - 1 = 0 \quad \text{ou} \quad -2x + 6 = 0 \quad \text{produit nul}$$

$$x = \frac{1}{2} \quad \text{ou} \quad x = 3$$

$$S = \left\{ \frac{1}{2}; 3 \right\}.$$

e)

$$2x^2 - 7x = 0 \quad \text{on recopie}$$

$$x(2x - 7) = 0 \quad \text{facteur commun } x$$

$$x = 0 \quad \text{ou} \quad 2x - 7 = 0 \quad \text{produit nul}$$

$$x = 0 \quad \text{ou} \quad x = \frac{7}{2}$$

$$S = \left\{ 0; \frac{7}{2} \right\}.$$

on ne divise jamais par x : on perdrait la solution 0**f)**

$$x^2 = 25 : S = \{-5; 5\}. \quad x^2 = -3 : S = \emptyset.$$

propriété 4 : $25 > 0$, deux solutions ; $-3 < 0$, aucune**À vous de jouer**Résoudre dans $\mathbb{R}$:

$$5x - 8 = 2x + 7 \quad 3(x + 2) = 4(x - 1) + 1 \quad (3x - 6)(x + 5) = 0$$

$$(x + 3)(2x - 1) + (x + 3)(x - 8) = 0 \quad 5x^2 + 2x = 0 \quad x^2 = 81$$

$$\text{Réponses : } S = \{5\}; S = \{9\}; S = \{-5; 2\}; (x + 3)(3x - 9) = 0, S = \{-3; 3\}; x(5x + 2) = 0, S = \left\{ -\frac{2}{5}; 0 \right\}; S = \{-9; 9\}.$$

► **À faire** : fiche d'exercices du chapitre, exercices 15 à 18.

VI — Mise en équation

Méthode 6 — Mettre un problème en équation

Exemples corrigés

Un fablab imprime un lot de 150 pièces avec deux imprimantes 3D. L'imprimante A consomme 12 Wh par pièce, l'imprimante B 18 Wh. Le lot a consommé 2 220 Wh en tout. Combien de pièces chaque imprimante a-t-elle produites ?

Résolution

Soit x le nombre de pièces produites par l'imprimante A ; *inconnue : on écrit ce que représente x*
l'imprimante B en a produit $150 - x$.

$$12x + 18(150 - x) = 2\,220 \quad \text{équation : on traduit la consommation}$$

$$12x + 2\,700 - 18x = 2\,220 \quad \text{on résout}$$

$$-6x = -480$$

$$x = 80$$

A : $80 \times 12 = 960$; B : $70 \times 18 = 1\,260$; en tout 2 220 Wh.

vérification : la solution convient-elle à l'énoncé ?

L'imprimante A a produit 80 pièces et l'imprimante B 70 pièces.

conclusion : une phrase qui répond à la question

À vous de jouer

1°) Une entreprise a livré 540 colis en deux jours ; le second jour, elle en a livré 60 de plus que le premier. Combien de colis a-t-elle livrés chaque jour ?

2°) Une plaque rectangulaire a pour longueur $x + 5$ et pour largeur $x - 2$ (en cm). Son périmètre mesure 34 cm. Trouver x , puis les dimensions de la plaque.

Réponses : 1°) $x + (x + 60) = 540$ donne $x = 240$: 240 colis, puis 300 ; 2°) $2[(x + 5) + (x - 2)] = 34$ donne $x = 7$: 12 cm sur 5 cm.

► **À faire** : fiche d'exercices du chapitre, exercices 19 à 21.

VII — Résoudre des inéquations

Définition 4 — Inéquation

Une **inéquation** est une inégalité ($<$, $\leq$, $>$ ou $\geq$) qui contient une inconnue x . La **résoudre**, c'est trouver toutes les valeurs de x qui la vérifient ; ces solutions forment en général un **intervalle**.

Propriété 5 — Changer le sens

On résout une inéquation comme une équation, avec une règle de plus :

multiplier ou diviser les deux membres par un nombre strictement négatif change le sens de l'inégalité.

Par exemple, en divisant $-3x < 6$ par -3 : $x > -2$.

Méthode 7 — Résoudre une inéquation du premier degré

Exemples corrigés

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes, puis représenter les solutions sur une droite graduée.

a) $3x + 2 < 7 - 2x$

b) $3(x - 2) \leq 5x - 1$

a)

$$3x + 2 < 7 - 2x \quad \text{on recopie}$$

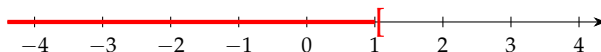
$$3x + 2x < 7 - 2 \quad \text{comme pour une équation}$$

$$5x < 5$$

$$x < 1 \quad \text{on divise par } 5 > 0 : \text{le sens ne change pas}$$

$$S =]-\infty; 1[.$$

1 est exclu : inégalité stricte



b)

$$3(x - 2) \leq 5x - 1 \quad \text{on recopie}$$

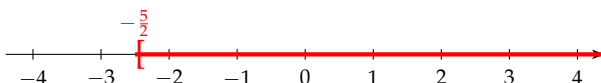
$$3x - 6 \leq 5x - 1 \quad \text{on développe}$$

$$3x - 5x \leq -1 + 6$$

$$-2x \leq 5$$

$$x \geq -\frac{5}{2} \quad \text{on divise par } -2 < 0 : \text{le sens change}$$

$$S = [-\frac{5}{2}; +\infty[.$$

 $-\frac{5}{2}$ est compris : inégalité large**À vous de jouer**Résoudre dans $\mathbb{R}$ et donner les solutions sous forme d'intervalle :

$$2x - 7 > 5 \quad -3x + 4 \geq 10 \quad 2x - 3 < 6x + 5$$

Réponses : $S =]6; +\infty[$; $-3x \geq 6$, le sens change : $S =]-\infty; -2]$; $-4x < 8$, le sens change : $S =]-2; +\infty[$.► **À faire** : fiche d'exercices du chapitre, exercices 22 à 24.**VIII — Tableaux de signes****Propriété 6 — Signe de $ax + b$ (avec $a \neq 0$)** $ax + b$ s'annule pour $x = -\frac{b}{a}$; **après** cette valeur, il a le signe de a , **avant**, le signe contraire. $a > 0$: on commence par –

x	$-\infty$	$-\frac{b}{a}$	$+\infty$
$ax + b$	–	0	+

 $a < 0$: on commence par +

x	$-\infty$	$-\frac{b}{a}$	$+\infty$
$ax + b$	+	0	–

Exemple — signe de $5x - 10$ et de $-2x + 8$ $5x - 10$ s'annule en 2 et $a = 5 > 0$: négatif avant 2, positif après. $-2x + 8$ s'annule en 4 et $a = -2 < 0$: positif avant 4, négatif après.

Méthode 8 — Signe d'un produit $(ax + b)(cx + d)$ **Exemples corrigés**

Dresser le tableau de signes de $P(x) = (2x - 6)(1 - 4x)$.

Résolution

$$2x - 6 = 0 \text{ pour } x = 3; \quad 1 - 4x = 0 \text{ pour } x = \frac{1}{4}.$$

$$2x - 6 : a = 2 > 0, \text{ donc } - \text{ puis } +.$$

$$1 - 4x : a = -4 < 0, \text{ donc } + \text{ puis } -.$$

valeurs qui annulent chaque facteur, rangées dans l'ordre croissant en tête du tableau
une ligne par facteur (propriété 6)

x	$-\infty$	$\frac{1}{4}$	3	$+\infty$	
$2x - 6$	$-$	$-$	0	$+$	
$1 - 4x$	$+$	0	$-$	$-$	
$(2x - 6)(1 - 4x)$	$-$	0	$+$	0	$-$

$P(x)$ est négatif sur $] -\infty; \frac{1}{4}[$ et sur $]3; +\infty[$, positif sur $] \frac{1}{4}; 3[$.

dernière ligne : règle des signes, colonne par colonne

À vous de jouer

Dresser le tableau de signes de $Q(x) = (3x + 9)(2 - x)$, puis dire où $Q(x)$ est positif.

Réponses : facteurs nuls en -3 et 2 ; $Q(x)$ est négatif, puis positif sur $] -3; 2[$, puis négatif.

► **À faire** : fiche d'exercices du chapitre, exercices 25 à 27.

IX — Inéquations produit

Pour résoudre une inéquation $A(x) \times B(x) > 0$ (ou $\geq 0, < 0, \leq 0$), on ne peut pas isoler x : on dresse le **tableau de signes** du produit, puis on lit les solutions sur la dernière ligne. Si l'expression n'est pas un produit, on la **factorise d'abord**.

Méthode 9 — Résoudre une inéquation produit**Exemples corrigés**

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes.

a) $(2x + 5)(3 - x) \geq 0$

b) $x^2 - 25 < 0$

c) $(x + 2)(x - 1)(4 - x) \geq 0$

a)

$$2x + 5 = 0 \text{ pour } x = -\frac{5}{2}; \quad 3 - x = 0 \text{ pour } x = 3.$$

valeurs qui annulent les facteurs

x	$-\infty$	$-\frac{5}{2}$	3	$+\infty$
$2x + 5$	$-$	0	$+$	$+$
$3 - x$	$+$		$+$	0
$(2x + 5)(3 - x)$	$-$	0	$+$	0

$$S = \left[-\frac{5}{2}; 3\right].$$

on lit les + et les 0 : inégalité large, bornes comprises

b)

$$x^2 - 25 < 0 \quad \text{on recopie}$$

$$(x - 5)(x + 5) < 0 \quad \text{on factorise : } a^2 - b^2$$

x	$-\infty$	-5	5	$+\infty$	
$x - 5$	$-$	$-$	0	$+$	
$x + 5$	$-$	0	$+$	$+$	
$(x - 5)(x + 5)$	$+$	0	$-$	0	$+$

$$S =]-5; 5[.$$

inégalité stricte : bornes exclues

c)

Les facteurs s'annulent en -2 , 1 et 4 .

trois facteurs : trois lignes, puis celle du produit

x	$-\infty$	-2	1	4	$+\infty$
$x + 2$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$x - 1$	$-$	$-$	0	$+$	$+$
$4 - x$	$+$	$+$	$+$	0	$-$
$(x + 2)(x - 1)(4 - x)$	$+$	0	$-$	0	$-$

$$S =]-\infty; -2] \cup [1; 4[.$$

les solutions forment deux intervalles, réunis par $\cup$

À vous de jouer

Résoudre dans $\mathbb{R}$:

$$(x - 4)(x + 6) < 0 \quad (3x + 1)(5 - x) \geq 0 \quad x^2 - 7x \leq 0 \quad (x + 3)(x - 2)(5 - x) > 0$$

Réponses : $S =]-6; 4[$; $S = \left[-\frac{1}{3}; 5\right]$; $x(x - 7) \leq 0$, $S = [0; 7]$; $S =]-\infty; -3[\cup]2; 5[$.

► **À faire** : fiche d'exercices du chapitre, exercices 28 à 30.

X — Inéquations quotient

Définition 5 — Valeur interdite

On ne divise pas par 0 : une valeur qui annule le dénominateur d'un quotient est une **valeur interdite**. Elle n'est jamais solution ; dans le tableau de signes, on la marque d'une **double barre**.

Remarque

Un quotient suit la même règle des signes qu'un produit. On ne « fait pas passer » le dénominateur de l'autre

côté : son signe est inconnu, on ne saurait pas s'il faut changer le sens.

Méthode 10 — Résoudre une inéquation quotient

Exemples corrigés

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes.

a) $\frac{3-9x}{2x-4} \leq 0$

b) $\frac{3x+2}{x+1} \leq 2$

a)

Valeur interdite : $2x - 4 = 0$ pour $x = 2$.

le dénominateur d'abord

Numérateur : $3 - 9x = 0$ pour $x = \frac{1}{3}$.

x	$-\infty$	$\frac{1}{3}$	2	$+\infty$
$3 - 9x$	+	0	-	-
$2x - 4$	-	-	0	+
$\frac{3-9x}{2x-4}$	-	0	+	-

$S =]-\infty; \frac{1}{3}] \cup]2; +\infty[.$

$\frac{1}{3}$ compris (le quotient s'y annule); 2 exclu (interdit)

b)

Valeur interdite : -1 .

$\frac{3x+2}{x+1} \leq 2$ *on recopie*

$\frac{3x+2}{x+1} - 2 \leq 0$ *tout dans le membre de gauche*

$\frac{3x+2-2(x+1)}{x+1} \leq 0$ *même dénominateur : $2 = \frac{2(x+1)}{x+1}$*

$\frac{x}{x+1} \leq 0$ *on réduit le numérateur*

x	$-\infty$	-1	0	$+\infty$
x	-	-	0	+
$x + 1$	-	0	+	+
$\frac{x}{x+1}$	+	-	0	+

$S =]-1; 0].$

-1 exclu (interdit); 0 compris

À vous de jouer

Résoudre dans $\mathbb{R}$, après avoir donné la valeur interdite :

$$\frac{4-x}{x+2} > 0 \quad \frac{x+3}{3x-6} \leq 0 \quad \frac{x+5}{x-1} \geq 3$$

Réponses : $x \neq -2$, $S =]-2; 4[$; $x \neq 2$, $S = [-3; 2[$; $x \neq 1$, $\frac{-2x+8}{x-1} \geq 0$, $S =]1; 4]$.

► **À faire** : fiche d'exercices du chapitre, exercices 31 à 33.

XI — Problèmes avec des inéquations

Méthode 11 — Résoudre un problème par une inéquation

Exemples corrigés

Un atelier de découpe laser fabrique x pièces par jour, avec $0 < x \leq 300$. Le coût de production est $C(x) = 6x + 840$ et la recette $R(x) = 18x$, en euros.

- a) À partir de combien de pièces par jour l'atelier fait-il un bénéfice ?
 b) Le coût moyen d'une pièce est $\frac{C(x)}{x}$. Combien de pièces faut-il produire pour que ce coût moyen ne dépasse pas 10 € ?

a)
 L'atelier fait un bénéfice lorsque $R(x) > C(x)$. *on traduit l'énoncé par une inéquation*

$$18x > 6x + 840$$

$$12x > 840$$

$$x > 70 \quad \text{on divise par } 12 > 0$$

$R(71) = 1\,278$ et $C(71) = 1\,266$: bénéfice de 12 €.

L'atelier fait un bénéfice à partir de 71 pièces par jour.

*vérification pour le premier entier qui convient
 x est un nombre entier de pièces*

b)

$$\frac{6x + 840}{x} \leq 10 \quad \text{on traduit l'énoncé}$$

$$\frac{6x + 840 - 10x}{x} \leq 0 \quad \text{tout à gauche, même dénominateur}$$

$$\frac{840 - 4x}{x} \leq 0$$

$$840 - 4x \leq 0 \quad x > 0 : \text{le quotient a le signe du numérateur}$$

$$-4x \leq -840$$

$$x \geq 210 \quad \text{on divise par } -4 < 0 : \text{le sens change}$$

Il faut produire au moins 210 pièces par jour.

conclusion dans le contexte

À vous de jouer

Un atelier d'impression 3D fabrique x pièces par jour, avec $0 < x \leq 400$. Le coût de production est $C(x) = 4x + 600$ et la recette $R(x) = 10x$, en euros.

- 1°) À partir de combien de pièces par jour l'atelier fait-il un bénéfice ?
 2°) Combien de pièces faut-il produire pour que le coût moyen $\frac{C(x)}{x}$ ne dépasse pas 7 € ?

Réponses : 1°) $10x > 4x + 600$ donne $x > 100$: à partir de 101 pièces ; 2°) $\frac{600 - 3x}{x} \leq 0$ donne $x \geq 200$: au moins 200 pièces.

► **À faire** : fiche d'exercices du chapitre, exercices 34 à 36.