

CALCUL LITTÉRAL

Cours — Première STI2D
Version élève

Comment utiliser ce cours

Chaque partie commence par ce qu’il faut **savoir** (définitions, théorèmes), puis vient ce qu’il faut **savoir faire** : une méthode, avec des **exemples** faits en classe, puis des exercices « **À vous de jouer** » à chercher seul.
Sur cette feuille, seuls les **énoncés** des exemples figurent : la résolution, signalée par la mention *(au tableau)*, est à rédiger dans le cahier.

I — Réduire une expression littérale

Définition 1 — Réduire

Des termes **semblables** ont la même partie littérale : $4x^2$ et $-x^2$ sont semblables, $4x^2$ et $4x$ ne le sont pas.
Réduire une somme, c’est regrouper les termes semblables en additionnant leurs coefficients. **Réduire un produit**, c’est multiplier les nombres entre eux et les lettres entre elles.

Remarque

Un produit se réduit toujours : $5 \times 2x = 10x$. Une somme pas toujours : dans $5 + 2x$, un terme est un nombre, l’autre contient x ; ils ne sont pas semblables, et $5 + 2x$ reste ainsi.

Méthode 1 — Réduire une somme ou un produit

Exemples (au tableau)

Réduire les expressions suivantes.

- a) $A = 4x - 7y + 3x^2 - 9x + 2y$
b) $B = 3x \times 5x^2 \times 2y$

À vous de jouer

Réduire, si possible :

$$C = 8n - 3n^2 + 5 - 2n + 6n^2 - 9 \quad D = -4x \times 3x \times 5 \quad E = -5a \times (-2a^2) \quad F = 9 + 4t$$

► À faire : fiche d’exercices du chapitre, exercices 1 à 3.

II — Développer

Définition 2 — Développer, factoriser

Développer, c’est transformer un produit en une somme.
Factoriser, c’est transformer une somme en un produit.



Propriété 1 — Distributivité

Pour tous nombres a, b, c, d et k :

$$k(a + b) = ka + kb \quad (a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd$$

Un signe $-$ devant une parenthèse change le signe de chaque terme de la parenthèse : $-(3 - x) = -3 + x$.

Méthode 2 — Développer et réduire

Exemples

(au tableau)

Développer et réduire les expressions suivantes.

- a) $A = -4(3x - 5)$
b) $B = (3x + 2)(x - 4)$
c) $C = 3x(2 - x) - (x + 1)(2x - 5)$

À vous de jouer

Développer et réduire :

$$D = 6(2x - 3) \quad E = -3(5 - 2x) \quad F = 7x - 2(3x + 5) \\ G = (2x + 5)(x + 3) \quad H = (3x - 2)(5 - x) \quad I = (x + 3)(2x - 1) - x(x + 4)$$

► À faire : fiche d’exercices du chapitre, exercices 4 à 6.

III — Les trois identités remarquables

Propriété 2 — Identités remarquables

Pour tous nombres a et b :

- 1^{re} identité remarquable : $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$;
- 2^e identité remarquable : $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$;
- 3^e identité remarquable : $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$.

Remarque

Ce sont des raccourcis de la double distributivité. Attention : $(a + b)^2 \neq a^2 + b^2$; le **double produit** $2ab$ ne s’oublie jamais.

Méthode 3 — Développer avec une identité remarquable

Exemples

(au tableau)

Développer et réduire les expressions suivantes.

- a) $A = (x + 6)^2$
b) $B = (2x - 5)^2$
c) $C = (3x + 4)(3x - 4)$
d) $D = (x - 2)^2 - (x + 3)(3 - x)$

À vous de jouer

Développer et réduire :

$$E = (x + 7)^2 \quad F = (3x - 2)^2 \quad G = (5x + 1)(5x - 1) \quad H = (x + 4)(x - 4) - (2x - 3)^2$$

► À faire : fiche d’exercices du chapitre, exercices 7 à 10.

IV — Factoriser

Pour **factoriser**, c'est-à-dire écrire une expression comme un produit, on cherche dans l'ordre :

- un **facteur commun** à tous les termes, nombre, lettre ou parenthèse entière : $ka + kb = k(a + b)$;
- sinon, une **identité remarquable** lue de droite à gauche : $a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$, $a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$, $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$.

Méthode 4 — Factoriser

Exemples

(au tableau)

Factoriser les expressions suivantes.

- a) $A = 15x^2 - 20x$
- b) $B = (x + 4)(2x - 3) + (x + 4)(x + 5)$
- c) $C = (2x + 3)^2 - (2x + 3)(x - 1)$
- d) $D = 4x^2 + 28x + 49$
- e) $E = 25x^2 - 36$
- f) $F = 16 - (x + 3)^2$

À vous de jouer

Factoriser :

$$G = 14x^2 - 21x \quad H = (x - 2)(4x + 1) - (x - 2)(x - 6) \quad I = x^2 - 10x + 25$$

$$J = 9x^2 + 6x + 1 \quad K = 49x^2 - 4 \quad L = (x - 3)^2 - 36$$

► À faire : fiche d'exercices du chapitre, exercices 11 à 14.

V — Résoudre des équations

Définition 3 — Solutions d'une équation

Résoudre une équation d'inconnue x , c'est trouver toutes les valeurs de x qui rendent l'égalité vraie : ce sont les **solutions**. On note S l'ensemble des solutions.

Propriété 3 — Produit nul

Un produit est nul si et seulement si l'un au moins de ses facteurs est nul : si $A \times B = 0$, alors $A = 0$ ou $B = 0$.

Propriété 4 — Équation $x^2 = k$

- Si $k > 0$, l'équation $x^2 = k$ a deux solutions : $-\sqrt{k}$ et $\sqrt{k}$.
- Si $k = 0$, elle a une seule solution : 0.
- Si $k < 0$, elle n'a pas de solution : un carré n'est jamais négatif.

Méthode 5 — Résoudre une équation

Exemples

(au tableau)

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes.

- a) $6x - 5 = 2x + 7$
- b) $2(x - 3) = -(x + 4) + 5$
- c) $(2x + 8)(5 - 3x) = 0$
- d) $(2x - 1)(x + 4) - (2x - 1)(3x - 2) = 0$

e) $2x^2 - 7x = 0$

f) $x^2 = 25$; $x^2 = -3$

À vous de jouer

Résoudre dans $\mathbb{R}$:

$$5x - 8 = 2x + 7 \quad 3(x + 2) = 4(x - 1) + 1 \quad (3x - 6)(x + 5) = 0$$

$$(x + 3)(2x - 1) + (x + 3)(x - 8) = 0 \quad 5x^2 + 2x = 0 \quad x^2 = 81$$

► À faire : fiche d'exercices du chapitre, exercices 15 à 18.

VI — Mise en équation

Méthode 6 — Mettre un problème en équation

Exemples

(au tableau)

Un fablab imprime un lot de 150 pièces avec deux imprimantes 3D. L'imprimante A consomme 12 Wh par pièce, l'imprimante B 18 Wh. Le lot a consommé 2 220 Wh en tout. Combien de pièces chaque imprimante a-t-elle produites ?

À vous de jouer

- 1°) Une entreprise a livré 540 colis en deux jours ; le second jour, elle en a livré 60 de plus que le premier. Combien de colis a-t-elle livrés chaque jour ?
- 2°) Une plaque rectangulaire a pour longueur $x + 5$ et pour largeur $x - 2$ (en cm). Son périmètre mesure 34 cm. Trouver x , puis les dimensions de la plaque.

► À faire : fiche d'exercices du chapitre, exercices 19 à 21.

VII — Résoudre des inéquations

Définition 4 — Inéquation

Une **inéquation** est une inégalité ($<$, $\leq$, $>$ ou $\geq$) qui contient une inconnue x . La **résoudre**, c'est trouver toutes les valeurs de x qui la vérifient ; ces solutions forment en général un **intervalle**.

Propriété 5 — Changer le sens

On résout une inéquation comme une équation, avec une règle de plus :

multiplier ou diviser les deux membres par un nombre strictement négatif change le sens de l'inégalité.

Par exemple, en divisant $-3x < 6$ par -3 : $x > -2$.

Méthode 7 — Résoudre une inéquation du premier degré

Exemples

(au tableau)

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes, puis représenter les solutions sur une droite graduée.

- a) $3x + 2 < 7 - 2x$
- b) $3(x - 2) \leq 5x - 1$

À vous de jouer

Résoudre dans $\mathbb{R}$ et donner les solutions sous forme d'intervalle :

$2x - 7 > 5 \qquad -3x + 4 \geqslant 10 \qquad 2x - 3 < 6x + 5$

► À faire : fiche d'exercices du chapitre, exercices 22 à 24.

VIII — Tableaux de signes

Propriété 6 — Signe de $ax + b$ (avec $a \neq 0$)

$ax + b$ s'annule pour $x = -\frac{b}{a}$; après cette valeur, il a le signe de a , avant, le signe contraire.

$a > 0$: on commence par –

x	$-\infty$	$-\frac{b}{a}$	$+\infty$
$ax + b$		0	
	–		+

$a < 0$: on commence par +

x	$-\infty$	$-\frac{b}{a}$	$+\infty$
$ax + b$		0	
	+		–

Exemple — signe de $5x - 10$ et de $-2x + 8$

$5x - 10$ s'annule en 2 et $a = 5 > 0$: négatif avant 2, positif après.

$-2x + 8$ s'annule en 4 et $a = -2 < 0$: positif avant 4, négatif après.

Méthode 8 — Signe d'un produit $(ax + b)(cx + d)$

Exemples

(au tableau)

Dresser le tableau de signes de $P(x) = (2x - 6)(1 - 4x)$.

À vous de jouer

Dresser le tableau de signes de $Q(x) = (3x + 9)(2 - x)$, puis dire où $Q(x)$ est positif.

► À faire : fiche d'exercices du chapitre, exercices 25 à 27.

IX — Inéquations produit

Pour résoudre une inéquation $A(x) \times B(x) > 0$ (ou $\geqslant 0, < 0, \leqslant 0$), on ne peut pas isoler x : on dresse le **tableau de signes** du produit, puis on lit les solutions sur la dernière ligne. Si l'expression n'est pas un produit, on la **factorise d'abord**.

Méthode 9 — Résoudre une inéquation produit

Exemples

(au tableau)

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes.

a) $(2x + 5)(3 - x) \geqslant 0$

b) $x^2 - 25 < 0$

c) $(x + 2)(x - 1)(4 - x) \geqslant 0$

À vous de jouer

Résoudre dans $\mathbb{R}$:

$(x - 4)(x + 6) < 0 \qquad (3x + 1)(5 - x) \geqslant 0 \qquad x^2 - 7x \leqslant 0 \qquad (x + 3)(x - 2)(5 - x) > 0$

► À faire : fiche d'exercices du chapitre, exercices 28 à 30.

X — Inéquations quotient

Définition 5 — Valeur interdite

On ne divise pas par 0 : une valeur qui annule le dénominateur d'un quotient est une **valeur interdite**. Elle n'est jamais solution ; dans le tableau de signes, on la marque d'une **double barre**.

Remarque

Un quotient suit la même règle des signes qu'un produit. On ne « fait pas passer » le dénominateur de l'autre côté : son signe est inconnu, on ne saurait pas s'il faut changer le sens.

Méthode 10 — Résoudre une inéquation quotient

Exemples

(au tableau)

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes.

a) $\frac{3 - 9x}{2x - 4} \leqslant 0$

b) $\frac{3x + 2}{x + 1} \leqslant 2$

À vous de jouer

Résoudre dans $\mathbb{R}$, après avoir donné la valeur interdite :

$\frac{4 - x}{x + 2} > 0 \qquad \frac{x + 3}{3x - 6} \leqslant 0 \qquad \frac{x + 5}{x - 1} \geqslant 3$

► À faire : fiche d'exercices du chapitre, exercices 31 à 33.

XI — Problèmes avec des inéquations

Méthode 11 — Résoudre un problème par une inéquation

Exemples

(au tableau)

Un atelier de découpe laser fabrique x pièces par jour, avec $0 < x \leqslant 300$. Le coût de production est $C(x) = 6x + 840$ et la recette $R(x) = 18x$, en euros.

a) À partir de combien de pièces par jour l'atelier fait-il un bénéfice ?

b) Le coût moyen d'une pièce est $\frac{C(x)}{x}$. Combien de pièces faut-il produire pour que ce coût moyen ne dépasse pas 10 € ?

À vous de jouer

Un atelier d'impression 3D fabrique x pièces par jour, avec $0 < x \leqslant 400$. Le coût de production est $C(x) = 4x + 600$ et la recette $R(x) = 10x$, en euros.

1°) À partir de combien de pièces par jour l'atelier fait-il un bénéfice ?

2°) Combien de pièces faut-il produire pour que le coût moyen $\frac{C(x)}{x}$ ne dépasse pas 7 € ?

► À faire : fiche d'exercices du chapitre, exercices 34 à 36.