

FONCTIONS

Cours — Première STI2D

Comment utiliser ce cours

Chaque partie commence par ce qu'il faut **savoir** (définitions, théorèmes), puis vient ce qu'il faut **savoir faire** : une méthode, avec des **exemples corrigés** faits en classe, puis des exercices « **À vous de jouer** » à chercher seul.

I — Antécédent et image

Définition 1 — Fonction, image, antécédent

Une **fonction** f associe à chaque nombre x **un seul** nombre, noté $f(x)$.



- $f(x)$ est l'**image** de x : il y en a **une seule** ;
- x est un **antécédent** de $f(x)$: un nombre peut avoir **plusieurs** antécédents, ou **aucun**.

On écrit aussi $f : x \mapsto x^2 - 4x$ pour $f(x) = x^2 - 4x$. f est la fonction, $f(x)$ est un nombre.

Méthode 1 — Calculer une image, tester un antécédent

Exemples corrigés

On considère la fonction f définie par $f(x) = x^2 - 4x$.

- Calculer l'image de 2, puis celle de -1 .
- Le nombre 5 est-il un antécédent de 5 par f ?

a)

$$f(2) = 2^2 - 4 \times 2 \quad \text{on remplace } x \text{ par } 2$$

$$f(2) = -4$$

$$f(-1) = (-1)^2 - 4 \times (-1) \quad \text{un nombre négatif se met entre parenthèses}$$

$$f(-1) = 1 + 4 \quad (-1)^2 = 1, \text{ alors que } -1^2 = -1$$

$$f(-1) = 5$$

b)

$$f(5) = 5^2 - 4 \times 5 \quad \text{« 5 est un antécédent de 5 » veut dire } f(5) = 5 : \text{ on calcule}$$

$$f(5) = 5$$

Oui : $f(5) = 5$, donc 5 est un antécédent de 5.

d'après a), -1 en est un autre : un nombre peut avoir plusieurs antécédents

À vous de jouer

On considère la fonction g définie par $g(x) = 4x - 9$.

1°) Calculer l'image de -2 , de 5, puis de $\frac{3}{4}$.

2°) Le nombre $\frac{1}{2}$ est-il un antécédent de -7 par g ?

Réponses : 1°) $g(-2) = -17$; $g(5) = 11$; $g\left(\frac{3}{4}\right) = -6$; 2°) $g\left(\frac{1}{2}\right) = 2 - 9 = -7$: oui.

► **À faire** : fiche d'exercices du chapitre, exercices 1 à 4.

II — Ensemble de définition

Définition 2 — Ensemble de définition

L'ensemble de définition de f , noté D_f , est l'ensemble des nombres x pour lesquels on peut calculer $f(x)$.

Propriété 1 — Deux calculs impossibles

- On ne divise pas par 0 : un **dénominateur** ne doit pas être nul.
- La **racine carrée** d'un nombre négatif n'existe pas : sous une racine, il faut un nombre positif ou nul.

Sans fraction ni racine, on peut toujours calculer $f(x)$: $D_f = \mathbb{R}$.

Méthode 2 — Déterminer un ensemble de définition

Exemples corrigés

Déterminer l'ensemble de définition de chaque fonction.

a) $f(x) = \frac{x-1}{x+4}$

b) $g(x) = \frac{7}{3x-6}$

c) $h(x) = \sqrt{x+3}$

d) $k(x) = \sqrt{2x-8}$

a)

$$x+4=0 \text{ pour } x=-4 : D_f = \mathbb{R} \setminus \{-4\}.$$

on cherche la valeur qui annule le dénominateur ; « $\mathbb{R}$ privé de -4 »

b)

$$3x-6=0$$

$$3x=6 \quad \text{valeur qui annule le dénominateur}$$

$$x=2$$

$$D_g = \mathbb{R} \setminus \{2\}.$$

c)

$$x+3 \geq 0$$

$$x \geq -3 \quad \text{sous la racine : positif ou nul}$$

$$D_h = [-3; +\infty[.$$

-3 compris : $\sqrt{0} = 0$ existe

d)

$$2x-8 \geq 0$$

$$2x \geq 8$$

$$x \geq 4$$

$$D_k = [4; +\infty[.$$

contrôle : $k(6) = \sqrt{4} = 2$ existe, $k(0) = \sqrt{-8}$ n'existe pas

À vous de jouer

Déterminer l'ensemble de définition de chaque fonction :

$$f(x) = \frac{5}{x-6} \quad g(x) = \frac{x+2}{5x+10} \quad h(x) = \sqrt{x-7} \quad k(x) = \sqrt{3x+9}$$

Réponses : $D_f = \mathbb{R} \setminus \{6\}$; $D_g = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$; $D_h = [7; +\infty[$; $D_k = [-3; +\infty[$.

► **À faire** : fiche d'exercices du chapitre, exercices 5 à 8.

III — Tableau de valeurs, courbe et lecture graphique

Définition 3 — Courbe représentative

La **courbe représentative** $\mathcal{C}_f$ de f est formée des points $M(x; f(x))$. Autrement dit, le point $M(x; y)$ est sur $\mathcal{C}_f$ si et seulement si $y = f(x)$.

Méthode 3 — Tracer une courbe à partir d'un tableau de valeurs

Exemples corrigés

Tracer la courbe de la fonction f définie sur $[-2; 4]$ par $f(x) = x^2 - 2x - 3$.

Résolution

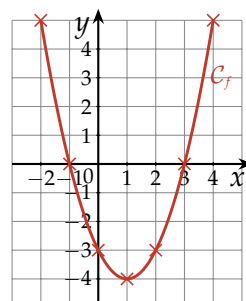
On calcule des images :

un tableau de valeurs

x	-2	-1	0	1	2	3	4
$f(x)$	5	0	-3	-4	-3	0	5

On place les points $(x; f(x))$, puis on les relie par une courbe régulière, sans règle.

par exemple (1; -4), le point le plus bas



Méthode 4 — Lire une image, lire des antécédents

Exemples corrigés

Sur la courbe de la méthode 3 :

- lire l'image de 1;
- lire les antécédents de 0.

a)

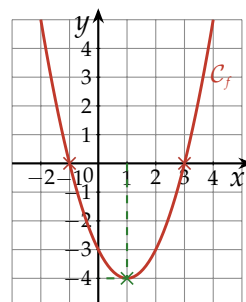
$$f(1) = -4.$$

de 1 sur l'axe des abscisses, on va verticalement jusqu'à la courbe, puis on lit l'ordonnée (en vert)

b)

Les antécédents de 0 sont -1 et 3.

on trace l'horizontale $y = 0$ et on lit les abscisses de tous les points de la courbe qui sont dessus (en rouge)



À vous de jouer

Sur la même courbe, lire :

- l'image de -2, puis celle de 2;
- les antécédents de -3;
- les antécédents de -4, puis ceux de -5.

Réponses : 1°) $f(-2) = 5$ et $f(2) = -3$; 2°) 0 et 2; 3°) un seul antécédent de -4 : 1; aucun pour -5, la courbe ne descend pas jusque-là.

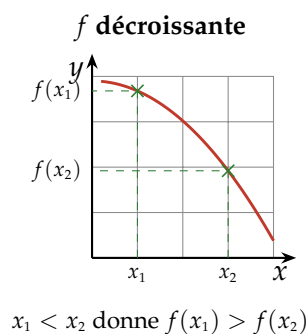
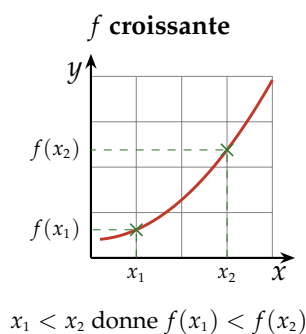
► **À faire** : fiche d'exercices du chapitre, exercices 9 à 13.

IV — Tableau de variations d'une fonction

Définition 4 — Fonction croissante, décroissante

Sur un intervalle I :

- f est **croissante** si, quand x augmente, $f(x)$ augmente : la courbe monte ; l'ordre est conservé ;
- f est **décroissante** si, quand x augmente, $f(x)$ diminue : la courbe descend ; l'ordre est renversé.



Définition 5 — Tableau de variations, extremums

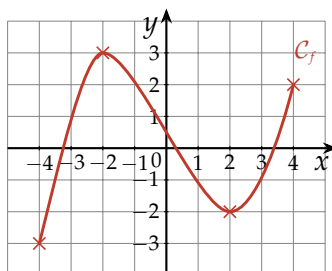
Le **tableau de variations** résume le sens de variation : une flèche qui monte quand f est croissante, une flèche qui descend quand elle est décroissante, et les valeurs de f au bout de chaque flèche.

Sur un intervalle, le **maximum** de f est la plus grande valeur de $f(x)$, le **minimum** la plus petite. On dit toujours **en quel** x il est atteint.

Méthode 5 — Dresser un tableau de variations à partir d'une courbe

Exemples corrigés

La fonction f est définie sur $[-4; 4]$ par sa courbe ci-dessous. Dresser son tableau de variations, puis donner son maximum et son minimum.



Résolution

La courbe monte de $x = -4$ à $x = -2$, descend jusqu'à $x = 2$, puis remonte jusqu'à $x = 4$.

$$f(-4) = -3; f(-2) = 3; f(2) = -2; f(4) = 2.$$

on repère où la courbe change de sens

on lit les valeurs aux bornes et aux changements de sens

x	-4	-2	2	4
f	-3	3	-2	2

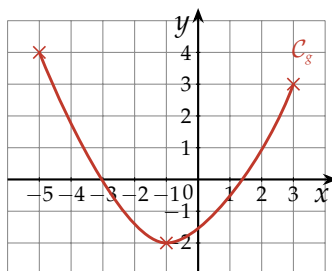
Maximum : 3, atteint en $x = -2$.

Minimum : -3, atteint en $x = -4$.

on compare toutes les valeurs du bas des flèches ; le minimum peut être à une borne

À vous de jouer

La fonction g est définie sur $[-5; 3]$ par sa courbe ci-dessous.



1°) Dresser le tableau de variations de g .

2°) Donner le maximum et le minimum de g .

Réponses : 1°) flèche qui descend de 4 à -2, puis qui monte jusqu'à 3; 2°) maximum 4 en $x = -5$; minimum -2 en $x = -1$.

► **À faire** : fiche d'exercices du chapitre, exercices 14 à 19.

V — Fonctions affines — équation réduite $y = mx + p$

Définition 6 — Fonction affine

Une fonction **affine** s'écrit $f(x) = mx + p$, où m et p sont deux nombres. Elle est définie sur $\mathbb{R}$, et sa courbe est la droite d'**équation réduite** $y = mx + p$:

- m est le **coefficient directeur**, ou **pente** ;
- p est l'**ordonnée à l'origine** : $f(0) = p$, la droite coupe l'axe des ordonnées en $(0; p)$.

Si $p = 0$, $f(x) = mx$ est **linéaire** ; si $m = 0$, $f(x) = p$ est **constante**.

Propriété 2 — Sens de variation, pente

Si $m > 0$, f est croissante ; si $m < 0$, décroissante ; si $m = 0$, constante. Seul le signe de m compte.

Si $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$ sont deux points de la droite, avec $x_A \neq x_B$:

$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

Méthode 6 — Déterminer une équation réduite

Exemples corrigés

a) Déterminer l'équation réduite de la droite (AB) , avec $A(-1; 4)$ et $B(3; -4)$.

b) Déterminer l'équation réduite de la droite de pente 3 qui passe par $C(2; 1)$.

a)

$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} \quad \text{formule de la pente : } B \text{ en premier, en haut et en bas}$$

$$m = \frac{-4 - 4}{3 - (-1)}$$

$$m = -2 \quad \frac{-8}{4} = -2$$

$$y_A = m x_A + p$$

$$4 = -2 \times (-1) + p \quad A \text{ est sur la droite : ses coordonnées vérifient } y = mx + p$$

$$4 = 2 + p$$

$$p = 2$$

(AB) a pour équation réduite $y = -2x + 2$.

contrôle avec B : $-2 \times 3 + 2 = -4$

b)

$$1 = 3 \times 2 + p$$

$$p = -5 \quad m = 3; C \text{ est sur la droite}$$

L'équation réduite est $y = 3x - 5$.

À vous de jouer

1°) Déterminer l'équation réduite de (AB), avec $A(-2; -5)$ et $B(2; 3)$.

2°) Déterminer l'équation réduite de la droite de pente $-\frac{1}{2}$ qui passe par $D(4; -1)$.

Réponses : 1°) $m = \frac{8}{4} = 2$, puis $p = -1 : y = 2x - 1$; 2°) $-1 = -2 + p$, donc $p = 1 : y = -\frac{1}{2}x + 1$.

► **À faire** : fiche d'exercices du chapitre, exercices 20 à 23.

VI — Tracer la droite d'équation $y = mx + p$

Pour tracer une droite, deux points suffisent. Le plus rapide : on place $(0; p)$ sur l'axe des ordonnées, puis on avance de 1 et on monte de m (on descend si $m < 0$).

Méthode 7 — Tracer une droite, lire son équation

Exemples corrigés

a) Tracer les droites $d_1 : y = 3x - 2$ et $d_2 : y = -\frac{2}{3}x + 3$.

b) Une droite coupe l'axe des ordonnées en $(0; 2)$; quand on avance de 2, elle descend de 3. Donner son équation réduite.

a)

d_1 : on part de $(0; -2)$; on avance de 1, on monte de 3 : point $(1; 1)$.

$$p = -2 \text{ et } m = 3$$

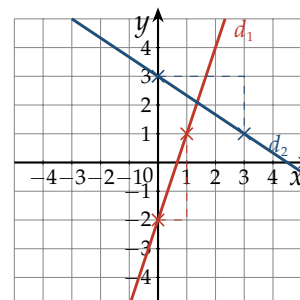
d_2 : on part de $(0; 3)$; on avance de 3, on descend de 2 : point $(3; 1)$.

$m = -\frac{2}{3}$: avancer de 3 fait tomber sur un nœud du quadrillage

b)

$$p = 2 \text{ et } m = -\frac{3}{2} : y = -\frac{3}{2}x + 2.$$

$$m = \frac{\text{déplacement vertical}}{\text{déplacement horizontal}}$$



À vous de jouer

1°) Tracer les droites d'équations $y = 2x + 1$ et $y = -x + 3$.

2°) Une droite coupe l'axe des ordonnées en $(0; -2)$; quand on avance de 4, elle monte de 3. Donner son équation réduite.

Réponses : 1°) points $(0; 1)$ et $(1; 3)$; points $(0; 3)$ et $(3; 0)$; 2°) $y = \frac{3}{4}x - 2$.

► **À faire** : fiche d'exercices du chapitre, exercices 24 à 27.

VII — Équation cartésienne d'une droite

Définition 7 — Équation cartésienne

Toute droite a une **équation cartésienne** $ax + by + c = 0$, avec a et b non tous les deux nuls : le point $M(x; y)$ est sur la droite si et seulement si ses coordonnées vérifient l'égalité.

Propriété 3 — Vecteur directeur

La droite d'équation $ax + by + c = 0$ a pour **vecteur directeur** $\vec{u}(-b; a)$.

Remarque

Une droite a une infinité d'équations cartésiennes : $3x - y + 2 = 0$ et $6x - 2y + 4 = 0$ (tout multiplié par 2) décrivent la même droite. Son équation réduite, elle, est unique, mais une droite verticale n'en a pas.

Méthode 8 — Trouver une équation cartésienne

Exemples corrigés

- a) Déterminer une équation cartésienne de la droite d qui passe par $A(1; 4)$ et de vecteur directeur $\vec{u}(3; 2)$.
 b) Déterminer une équation cartésienne de la droite (BC) , avec $B(-2; 1)$ et $C(3; -3)$.

a)

$$\vec{u}(3; 2) = \vec{u}(-b; a) : b = -3 \text{ et } a = 2.$$

on identifie les coordonnées de $\vec{u}$ à $(-b; a)$

$$d : 2x - 3y + c = 0.$$

$$2 \times 1 - 3 \times 4 + c = 0$$

$$-10 + c = 0 \quad A \text{ est sur } d : \text{on remplace } x \text{ et } y$$

$$c = 10$$

$$d : 2x - 3y + 10 = 0.$$

b)

$$\vec{BC}(x_C - x_B; y_C - y_B) = \vec{BC}(3 - (-2); -3 - 1) \quad \text{vecteur directeur : « arrivée moins départ »}$$

$$\vec{BC}(x_C - x_B; y_C - y_B) = \vec{BC}(5; -4)$$

$$b = -5 \text{ et } a = -4 : -4x - 5y + c = 0.$$

$$(5; -4) = (-b; a)$$

$$-4 \times (-2) - 5 \times 1 + c = 0$$

$$3 + c = 0 \quad B \text{ est sur la droite}$$

$$c = -3$$

$$(BC) : -4x - 5y - 3 = 0, \text{ ou encore } 4x + 5y + 3 = 0.$$

$$\text{contrôle avec } C : 12 - 15 + 3 = 0$$

À vous de jouer

- 1°) Déterminer une équation cartésienne de la droite qui passe par $A(2; -1)$ et de vecteur directeur $\vec{u}(1; 4)$.
 2°) Déterminer une équation cartésienne de (EF) , avec $E(1; 2)$ et $F(3; 8)$.

Réponses : 1°) $4x - y + c = 0$ avec $c = -9 : 4x - y - 9 = 0$; 2°) $\vec{EF}(2; 6) : 6x - 2y + c = 0$ avec $c = -2$, soit $6x - 2y - 2 = 0$ ou $3x - y - 1 = 0$.

► **À faire** : fiche d'exercices du chapitre, exercices 28 à 30.

VIII — Tracer une droite d'équation $ax + by + c = 0$

Pour tracer une droite d'équation cartésienne, on cherche deux de ses points : on choisit une valeur de x (souvent $x = 0$), on calcule y , puis on recommence. Si $b = 0$, la droite est **verticale** ($x = \text{nombre}$); si $a = 0$, elle est **horizontale** ($y = \text{nombre}$).

Méthode 9 — Tracer une droite d'équation cartésienne

Exemples corrigés

Tracer dans un même repère les droites $d_1 : x + 2y - 4 = 0$, $d_2 : 3x - y - 2 = 0$ et $d_3 : 2x + 6 = 0$.

Résolution

d_1 : pour $x = 0$ on a $2y - 4 = 0$,
donc $y = 2$; pour $y = 0$, $x = 4$.
Points $(0; 2)$ et $(4; 0)$.

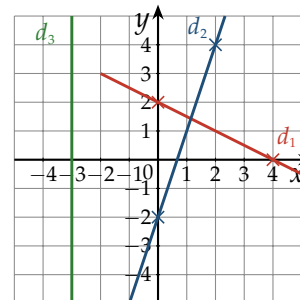
*on remplace x (ou y) par 0 :
les points sur les axes*

d_2 : pour $x = 0$, $y = -2$; pour
 $x = 2$, $6 - y - 2 = 0$, donc $y = 4$.
Points $(0; -2)$ et $(2; 4)$.

*pour $y = 0$, $x = \frac{2}{3}$ tombe
mal : on choisit une autre
valeur de x*

$d_3 : 2x + 6 = 0$ donne $x = -3$.

pas de y : droite verticale



À vous de jouer

Tracer dans un même repère les droites d'équations $x - y + 1 = 0$; $2x + y - 4 = 0$ et $y - 3 = 0$.

Réponses : points $(0; 1)$ et $(-1; 0)$; points $(0; 4)$ et $(2; 0)$; droite horizontale $y = 3$.

► À faire : fiche d'exercices du chapitre, exercices 31 à 33.

IX — Passer d'une forme à l'autre

Propriété 4 — Équation réduite et équation cartésienne

- De la réduite à la cartésienne : on met tout dans un membre, $y = mx + p$ devient $mx - y + p = 0$.
- De la cartésienne à la réduite : on isole y , comme dans une équation; c'est possible seulement si $b \neq 0$.

Méthode 10 — Passer d'une forme à l'autre

Exemples corrigés

- Donner une équation cartésienne de la droite d'équation $y = \frac{2}{3}x - 1$.
- Donner l'équation réduite de la droite d'équation $4x + 2y - 6 = 0$, sa pente et son ordonnée à l'origine.
- La droite d'équation $3x + 9 = 0$ a-t-elle une équation réduite?

a)

$$y = \frac{2}{3}x - 1$$

$$\frac{2}{3}x - y - 1 = 0$$

tout dans le membre de gauche

$$2x - 3y - 3 = 0$$

on multiplie par 3 pour ôter la fraction

b)

$$4x + 2y - 6 = 0$$

$$2y = -4x + 6 \quad \text{on isole } 2y$$

$$y = -2x + 3 \quad \text{on divise les deux termes par 2}$$

Pente $m = -2$, ordonnée à l'origine $p = 3$.

c)

$3x + 9 = 0$ donne $x = -3$: droite verticale, pas d'équation réduite.

$b = 0$: on ne peut pas isoler y ; ce n'est pas la courbe d'une fonction

À vous de jouer

1°) Donner une équation cartésienne de la droite $y = -3x + 4$.

2°) Donner l'équation réduite de la droite $2x - 5y + 10 = 0$, puis sa pente.

3°) La droite d'équation $2x - 10 = 0$ a-t-elle une équation réduite ?

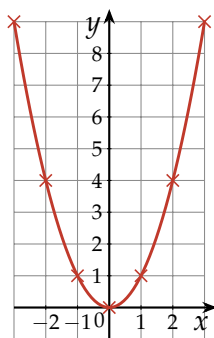
Réponses : 1°) $3x + y - 4 = 0$; 2°) $y = \frac{2}{5}x + 2$, pente $\frac{2}{5}$; 3°) non : $x = 5$, droite verticale.

► **À faire** : fiche d'exercices du chapitre, exercices 34 à 37.

X — Fonction carré

Définition 8 — Fonction carré

La **fonction carré** est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$. Sa courbe est une **parabole** de sommet l'origine O .



x	$-\infty$	0	$+\infty$
x^2	$+\infty$	0	$+\infty$

Propriété 5 — Carré

Décroissante sur $]-\infty; 0]$, croissante sur $[0; +\infty[$. Un carré est toujours positif ou nul, et deux nombres opposés ont le même carré : $(-3)^2 = 3^2 = 9$.

Propriété 6 — Équation $x^2 = k$

Si $k > 0$: deux solutions, $-\sqrt{k}$ et $\sqrt{k}$. Si $k = 0$: une solution, 0. Si $k < 0$: aucune solution.

Méthode 11 — Résoudre une équation en isolant x^2

Exemples corrigés

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes.

a) $x^2 = 16$

b) $5x^2 + 1 = 2x^2 + 16$

c) $3x^2 + 8 = 5$

a)

$S = \{-4; 4\}$.

$16 > 0$: deux solutions ; on n'oublie pas -4 , car $(-4)^2 = 16$

b)

$$5x^2 + 1 = 2x^2 + 16$$

$$5x^2 - 2x^2 = 16 - 1 \quad \text{on isole } x^2 \text{ comme on isole } x$$

$$3x^2 = 15$$

$$x^2 = 5$$

$S = \{-\sqrt{5}; \sqrt{5}\}$.

$5 > 0$: deux solutions

c)

$$3x^2 + 8 = 5$$

$$3x^2 = -3$$

$$x^2 = -1$$

$$S = \emptyset.$$

un carré n'est jamais négatif

À vous de jouer

Résoudre dans $\mathbb{R}$:

$$x^2 = 64 \quad 4x^2 - 5 = 2x^2 + 9 \quad 3x^2 + 1 = 13 \quad 2x^2 + 9 = 1$$

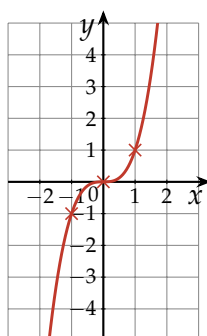
Réponses : $S = \{-8; 8\}$; $x^2 = 7$, $S = \{-\sqrt{7}; \sqrt{7}\}$; $x^2 = 4$, $S = \{-2; 2\}$; $x^2 = -4$, $S = \emptyset$.

► **À faire** : fiche d'exercices du chapitre, exercices 38 à 41.

XI — Fonction cube

Définition 9 — Fonction cube

La **fonction cube** est définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x^3$. Sa courbe a pour centre de symétrie l'origine O .



x	$-\infty$	$+\infty$
x^3	$-\infty$	$+\infty$

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
x^3	-27	-8	-1	0	1	8	27

Propriété 7 — Cube

La fonction cube est croissante sur $\mathbb{R}$. Un cube a le signe du nombre : $(-2)^3 = -8$ et $2^3 = 8$.

Pour tout nombre k , l'équation $x^3 = k$ a **une seule** solution, la **racine cubique** de k , notée $\sqrt[3]{k}$ (touche de la calculatrice).

Méthode 12 — Résoudre une équation en isolant x^3

Exemples corrigés

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes.

a) $x^3 = -27$

b) $4x^3 - 5 = x^3 + 19$

c) $2x^3 + 9 = 5x^3 - 6$

a)

$$S = \{-3\}.$$

$(-3)^3 = -27$; une seule solution, même pour un nombre négatif

b)

$$4x^3 - 5 = x^3 + 19$$

$$3x^3 = 24 \quad \text{on isole } x^3$$

$$x^3 = 8$$

$$S = \{2\}.$$

$$2^3 = 8$$

c)

$$2x^3 + 9 = 5x^3 - 6$$

$$-3x^3 = -15$$

$$x^3 = 5$$

$$S = \{\sqrt[3]{5}\}.$$

$$\sqrt[3]{5} \simeq 1,71 \text{ à la calculatrice}$$

À vous de jouer

Résoudre dans $\mathbb{R}$:

$$x^3 = 125 \quad 3x^3 = -3 \quad 5x^3 + 2 = 2x^3 - 22 \quad 7x^3 - 4 = x^3 + 14$$

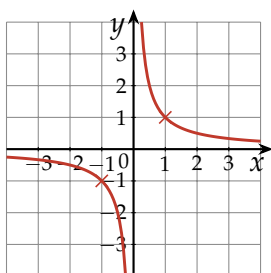
Réponses : $S = \{5\}$; $x^3 = -1$, $S = \{-1\}$; $x^3 = -8$, $S = \{-2\}$; $x^3 = 3$, $S = \{\sqrt[3]{3}\}$.

► **À faire** : fiche d'exercices du chapitre, exercices 42 à 45.

XII — Fonction inverse

Définition 10 — Fonction inverse

La **fonction inverse** est définie pour tout $x \neq 0$ par $f(x) = \frac{1}{x}$: $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Sa courbe est une **hyperbole**, de centre de symétrie O .



x	$-\infty$	0	$+\infty$
$\frac{1}{x}$	0	$+\infty$	0
x	$-\infty$	0	$+\infty$
$\frac{1}{x}$	$-$		$+$

Propriété 8 — Inverse

La fonction inverse est décroissante sur $] -\infty ; 0[$ et décroissante sur $] 0 ; +\infty[$; $\frac{1}{x}$ a le signe de x .

Elle n'est pas décroissante sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ tout entier : $-1 < 1$ et $\frac{1}{-1} < \frac{1}{1}$. On sépare toujours les deux intervalles.

Méthode 13 — Équations et inéquations avec un inverse

Exemples corrigés

Résoudre dans $\mathbb{R}$:

a) $\frac{1}{x} = 4$

$$b) \frac{6}{2x-4} = 3$$

$$c) \frac{1}{x} \leq 3$$

a)

$$\frac{1}{x} = 4$$

$$1 = 4x \quad x \neq 0 : \text{on multiplie les deux membres par } x$$

$$x = \frac{1}{4}$$

$$S = \left\{ \frac{1}{4} \right\}.$$

b)

Valeur interdite : $2x - 4 = 0$ pour $x = 2$.

on la cherche d'abord

$$\frac{6}{2x-4} = 3$$

$$6 = 3(2x - 4) \quad \text{pour } x \neq 2, \text{ on multiplie par } 2x - 4$$

$$6 = 6x - 12$$

$$x = 3$$

$$S = \{3\}.$$

3 n'est pas la valeur interdite

c)

$$\frac{1}{x} \leq 3$$

$$\frac{1}{x} - 3 \leq 0 \quad \text{on ne multiplie pas par } x : \text{son signe est inconnu}$$

$$\frac{1-3x}{x} \leq 0 \quad \text{un seul quotient (chapitre 1)}$$

x	$-\infty$	0	$\frac{1}{3}$	$+\infty$
$1 - 3x$	+	0	+	-
x	-	0	+	+
$\frac{1-3x}{x}$	-	0	+	-

$$S =]-\infty; 0[\cup \left[\frac{1}{3}; +\infty[.$$

0 exclu (interdit); $\frac{1}{3}$ compris

À vous de jouer

Résoudre dans $\mathbb{R}$:

$$\frac{1}{x} = -5 \quad \frac{4}{-2x+6} = 2 \quad \frac{1}{x} > 2$$

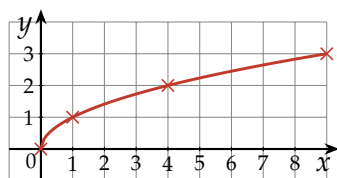
Réponses : $S = \left\{ -\frac{1}{5} \right\}$; valeur interdite 3, $4 = -4x + 12$ donne $S = \{2\}$; $\frac{1-2x}{x} > 0$, $S = \left] 0; \frac{1}{2} \right[.$

► **À faire** : fiche d'exercices du chapitre, exercices 46 à 50.

XIII — Fonction racine carrée

Définition 11 — Fonction racine carrée

La **fonction racine carrée** est définie pour tout $x \geq 0$ par $f(x) = \sqrt{x} : D_f = [0; +\infty[$.



x	0	$+\infty$
$\sqrt{x}$	0	$+\infty$

x	0	1	4	9	16
$\sqrt{x}$	0	1	2	3	4

Propriété 9 — Racine carrée

La fonction racine carrée est croissante sur $[0; +\infty[$, et toujours positive ou nulle. Pour des nombres positifs, elle conserve l'ordre : si $a \leq b$, alors $\sqrt{a} \leq \sqrt{b}$, et réciproquement.

Méthode 14 — Équations et inéquations avec une racine carrée

Exemples corrigés

Résoudre :

- a) $\sqrt{x} = 5$
- b) $\sqrt{x} = -4$
- c) $\sqrt{x} \leq 3$
- d) $\sqrt{x} > 4$
- e) $\frac{18}{\sqrt{x}} = 6$

a)

$$\begin{aligned}\sqrt{x} &= 5 \\ x &= 25 \\ S &= \{25\}.\end{aligned}$$

b)

$$S = \emptyset.$$

c)

$$\begin{aligned}\sqrt{x} &\leq 3 \\ 0 &\leq x \leq 9 \\ S &= [0; 9].\end{aligned}$$

d)

$$\begin{aligned}\sqrt{x} &> 4 \\ x &> 16 \\ S &=]16; +\infty[.\end{aligned}$$

e)

$$\frac{18}{\sqrt{x}} = 6$$

$$18 = 6\sqrt{x} \quad x > 0 : \text{le dénominateur n'est pas nul}$$

$$\sqrt{x} = 3$$

$$x = 9$$

$$S = \{9\}.$$

$x \geq 0$ toujours ; les deux membres sont positifs, on élève au carré

une racine carrée n'est jamais négative (élever au carré donnerait 16, qui ne convient pas)

la racine conserve l'ordre ; on n'oublie pas $x \geq 0$

on élève au carré : l'ordre est conservé

À vous de jouer

Résoudre :

$$\sqrt{x} = 7 \quad \sqrt{x} = -9 \quad \sqrt{x} \leq 5 \quad \sqrt{x} \geq 2 \quad \frac{10}{\sqrt{x}} = 2$$

Réponses : $S = \{49\}$; $S = \emptyset$; $S = [0; 25]$; $S = [4; +\infty[$; $\sqrt{x} = 5, S = \{25\}$.

► **À faire** : fiche d'exercices du chapitre, exercices 51 à 55.