

FONCTIONS

Cours — Première STI2D
Version élève

Comment utiliser ce cours

Chaque partie commence par ce qu'il faut **savoir** (définitions, théorèmes), puis vient ce qu'il faut **savoir faire** : une méthode, avec des **exemples** faits en classe, puis des exercices « **À vous de jouer** » à chercher seul.

Sur cette feuille, seuls les **énoncés** des exemples figurent : la résolution, signalée par la mention *(au tableau)*, est à rédiger dans le cahier.

I — Antécédent et image

Définition 1 — Fonction, image, antécédent

Une **fonction** f associe à chaque nombre x **un seul** nombre, noté $f(x)$.



- $f(x)$ est l'**image** de x : il y en a **une seule** ;
- x est un **antécédent** de $f(x)$: un nombre peut avoir **plusieurs** antécédents, ou **aucun**.

On écrit aussi $f : x \mapsto x^2 - 4x$ pour $f(x) = x^2 - 4x$. f est la fonction, $f(x)$ est un nombre.

Méthode 1 — Calculer une image, tester un antécédent

Exemples

(au tableau)

On considère la fonction f définie par $f(x) = x^2 - 4x$.

- Calculer l'image de 2, puis celle de -1 .
- Le nombre 5 est-il un antécédent de 5 par f ?

À vous de jouer

On considère la fonction g définie par $g(x) = 4x - 9$.

- Calculer l'image de -2 , de 5, puis de $\frac{3}{4}$.
- Le nombre $\frac{1}{2}$ est-il un antécédent de -7 par g ?

► **À faire** : fiche d'exercices du chapitre, exercices 1 à 4.

II — Ensemble de définition

Définition 2 — Ensemble de définition

L'**ensemble de définition** de f , noté D_f , est l'ensemble des nombres x pour lesquels on peut calculer $f(x)$.

Propriété 1 — Deux calculs impossibles

- On ne divise pas par 0 : un **dénominateur** ne doit pas être nul.
- La **racine carrée** d'un nombre négatif n'existe pas : sous une racine, il faut un nombre positif ou nul.

Sans fraction ni racine, on peut toujours calculer $f(x) : D_f = \mathbb{R}$.

Méthode 2 — Déterminer un ensemble de définition

Exemples

(au tableau)

Déterminer l'ensemble de définition de chaque fonction.

- $f(x) = \frac{x-1}{x+4}$
- $g(x) = \frac{7}{3x-6}$
- $h(x) = \sqrt{x+3}$
- $k(x) = \sqrt{2x-8}$

À vous de jouer

Déterminer l'ensemble de définition de chaque fonction :

$$f(x) = \frac{5}{x-6} \quad g(x) = \frac{x+2}{5x+10} \quad h(x) = \sqrt{x-7} \quad k(x) = \sqrt{3x+9}$$

► **À faire** : fiche d'exercices du chapitre, exercices 5 à 8.

III — Tableau de valeurs, courbe et lecture graphique

Définition 3 — Courbe représentative

La **courbe représentative** C_f de f est formée des points $M(x; f(x))$. Autrement dit, le point $M(x; y)$ est sur C_f si et seulement si $y = f(x)$.

Méthode 3 — Tracer une courbe à partir d'un tableau de valeurs

Exemples

(au tableau)

Tracer la courbe de la fonction f définie sur $[-2; 4]$ par $f(x) = x^2 - 2x - 3$.

Méthode 4 — Lire une image, lire des antécédents

Exemples

(au tableau)

Sur la courbe de la méthode 3 :

- lire l'image de 1 ;
- lire les antécédents de 0.

À vous de jouer

Sur la même courbe, lire :

- l'image de -2 , puis celle de 2 ;
- les antécédents de -3 ;
- les antécédents de -4 , puis ceux de -5 .

► **À faire** : fiche d'exercices du chapitre, exercices 9 à 13.

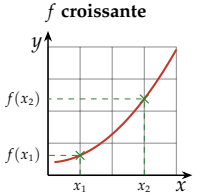
IV — Tableau de variations d’une fonction

Définition 4 — Fonction croissante, décroissante

Sur un intervalle I :

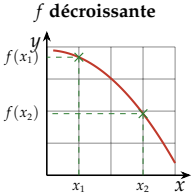
- f est **croissante** si, quand x augmente, $f(x)$ augmente : la courbe monte ; l’ordre est conservé ;
- f est **décroissante** si, quand x augmente, $f(x)$ diminue : la courbe descend ; l’ordre est renversé.

f croissante



$x_1 < x_2$ donne $f(x_1) < f(x_2)$

f décroissante



$x_1 < x_2$ donne $f(x_1) > f(x_2)$

Définition 5 — Tableau de variations, extremums

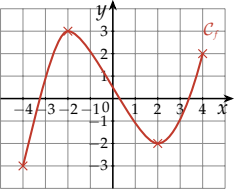
Le **tableau de variations** résume le sens de variation : une flèche qui monte quand f est croissante, une flèche qui descend quand elle est décroissante, et les valeurs de f au bout de chaque flèche.

Sur un intervalle, le **maximum** de f est la plus grande valeur de $f(x)$, le **minimum** la plus petite. On dit toujours **en quel** x il est atteint.

Méthode 5 — Dresser un tableau de variations à partir d’une courbe

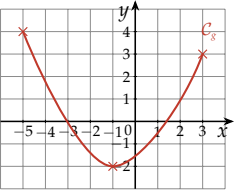
Exemples (au tableau)

La fonction f est définie sur $[-4;4]$ par sa courbe ci-dessous. Dresser son tableau de variations, puis donner son maximum et son minimum.



À vous de jouer

La fonction g est définie sur $[-5;3]$ par sa courbe ci-dessous.



1°) Dresser le tableau de variations de g .

2°) Donner le maximum et le minimum de g .

► À faire : fiche d’exercices du chapitre, exercices 14 à 19.

V — Fonctions affines — équation réduite $y = mx + p$

Définition 6 — Fonction affine

Une fonction **affine** s’écrit $f(x) = mx + p$, où m et p sont deux nombres. Elle est définie sur $\mathbb{R}$, et sa courbe est la droite d’**équation réduite** $y = mx + p$:

- m est le **coefficient directeur**, ou **pente** ;
- p est l’**ordonnée à l’origine** : $f(0) = p$, la droite coupe l’axe des ordonnées en $(0; p)$.

Si $p = 0$, $f(x) = mx$ est **linéaire** ; si $m = 0$, $f(x) = p$ est **constante**.

Propriété 2 — Sens de variation, pente

Si $m > 0$, f est croissante ; si $m < 0$, décroissante ; si $m = 0$, constante. Seul le signe de m compte.

Si $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$ sont deux points de la droite, avec $x_A \neq x_B$:

$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

Méthode 6 — Déterminer une équation réduite

Exemples (au tableau)

a) Déterminer l’équation réduite de la droite (AB) , avec $A(-1;4)$ et $B(3;-4)$.

b) Déterminer l’équation réduite de la droite de pente 3 qui passe par $C(2;1)$.

À vous de jouer

1°) Déterminer l’équation réduite de (AB) , avec $A(-2;-5)$ et $B(2;3)$.

2°) Déterminer l’équation réduite de la droite de pente $-\frac{1}{2}$ qui passe par $D(4;-1)$.

► À faire : fiche d’exercices du chapitre, exercices 20 à 23.

VI — Tracer la droite d’équation $y = mx + p$

Pour tracer une droite, deux points suffisent. Le plus rapide : on place $(0; p)$ sur l’axe des ordonnées, puis on avance de 1 et on monte de m (on descend si $m < 0$).

Méthode 7 — Tracer une droite, lire son équation

Exemples (au tableau)

a) Tracer les droites $d_1 : y = 3x - 2$ et $d_2 : y = -\frac{2}{3}x + 3$.

b) Une droite coupe l’axe des ordonnées en $(0;2)$; quand on avance de 2, elle descend de 3. Donner son équation réduite.

À vous de jouer

1°) Tracer les droites d’équations $y = 2x + 1$ et $y = -x + 3$.

2°) Une droite coupe l’axe des ordonnées en $(0;-2)$; quand on avance de 4, elle monte de 3. Donner son équation réduite.

► À faire : fiche d’exercices du chapitre, exercices 24 à 27.

VII — Équation cartésienne d’une droite

Définition 7 — Équation cartésienne
Toute droite a une **équation cartésienne** $ax + by + c = 0$, avec a et b non tous les deux nuls : le point $M(x; y)$ est sur la droite si et seulement si ses coordonnées vérifient l’égalité.

Propriété 3 — Vecteur directeur
La droite d’équation $ax + by + c = 0$ a pour **vecteur directeur** $\vec{u}(-b; a)$.

Remarque
Une droite a une infinité d’équations cartésiennes : $3x - y + 2 = 0$ et $6x - 2y + 4 = 0$ (tout multiplié par 2) décrivent la même droite. Son équation réduite, elle, est unique, mais une droite verticale n’en a pas.

Méthode 8 — Trouver une équation cartésienne

Exemples (au tableau)
a) Déterminer une équation cartésienne de la droite d qui passe par $A(1; 4)$ et de vecteur directeur $\vec{u}(3; 2)$.
b) Déterminer une équation cartésienne de la droite (BC) , avec $B(-2; 1)$ et $C(3; -3)$.

À vous de jouer
1°) Déterminer une équation cartésienne de la droite qui passe par $A(2; -1)$ et de vecteur directeur $\vec{u}(1; 4)$.
2°) Déterminer une équation cartésienne de (EF) , avec $E(1; 2)$ et $F(3; 8)$.

► À faire : fiche d’exercices du chapitre, exercices 28 à 30.

VIII — Tracer une droite d’équation $ax + by + c = 0$

Pour tracer une droite d’équation cartésienne, on cherche deux de ses points : on choisit une valeur de x (souvent $x = 0$), on calcule y , puis on recommence. Si $b = 0$, la droite est **verticale** ($x = \text{nombre}$); si $a = 0$, elle est **horizontale** ($y = \text{nombre}$).

Méthode 9 — Tracer une droite d’équation cartésienne

Exemples (au tableau)
Tracer dans un même repère les droites $d_1 : x + 2y - 4 = 0$, $d_2 : 3x - y - 2 = 0$ et $d_3 : 2x + 6 = 0$.
À vous de jouer
Tracer dans un même repère les droites d’équations $x - y + 1 = 0$; $2x + y - 4 = 0$ et $y - 3 = 0$.

► À faire : fiche d’exercices du chapitre, exercices 31 à 33.

IX — Passer d’une forme à l’autre

Propriété 4 — Équation réduite et équation cartésienne
• De la réduite à la cartésienne : on met tout dans un membre, $y = mx + p$ devient $mx - y + p = 0$.
• De la cartésienne à la réduite : on isole y , comme dans une équation ; c’est possible seulement si $b \neq 0$.

Méthode 10 — Passer d’une forme à l’autre

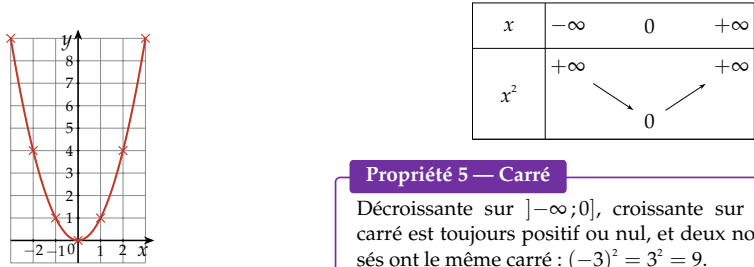
Exemples (au tableau)
a) Donner une équation cartésienne de la droite d’équation $y = \frac{2}{3}x - 1$.
b) Donner l’équation réduite de la droite d’équation $4x + 2y - 6 = 0$, sa pente et son ordonnée à l’origine.
c) La droite d’équation $3x + 9 = 0$ a-t-elle une équation réduite?

À vous de jouer
1°) Donner une équation cartésienne de la droite $y = -3x + 4$.
2°) Donner l’équation réduite de la droite $2x - 5y + 10 = 0$, puis sa pente.
3°) La droite d’équation $2x - 10 = 0$ a-t-elle une équation réduite?

► À faire : fiche d’exercices du chapitre, exercices 34 à 37.

X — Fonction carré

Définition 8 — Fonction carré
La **fonction carré** est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$. Sa courbe est une **parabole** de sommet l’origine O .



Propriété 5 — Carré
Décroissante sur $]-\infty; 0]$, croissante sur $[0; +\infty[$. Un carré est toujours positif ou nul, et deux nombres opposés ont le même carré : $(-3)^2 = 3^2 = 9$.

Propriété 6 — Équation $x^2 = k$
Si $k > 0$: deux solutions, $-\sqrt{k}$ et $\sqrt{k}$. Si $k = 0$: une solution, 0. Si $k < 0$: aucune solution.

Méthode 11 — Résoudre une équation en isolant x^2

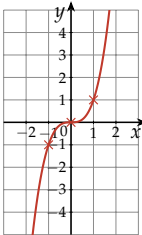
Exemples (au tableau)
Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes.
a) $x^2 = 16$
b) $5x^2 + 1 = 2x^2 + 16$
c) $3x^2 + 8 = 5$

À vous de jouer
Résoudre dans $\mathbb{R}$:
 $x^2 = 64$ $4x^2 - 5 = 2x^2 + 9$ $3x^2 + 1 = 13$ $2x^2 + 9 = 1$

► À faire : fiche d’exercices du chapitre, exercices 38 à 41.

XI — Fonction cube

Définition 9 — Fonction cube
La **fonction cube** est définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x^3$. Sa courbe a pour centre de symétrie l'origine O .



x	$-\infty$	$+\infty$				
x^3	$-\infty$					$+\infty$

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
x^3	-27	-8	-1	0	1	8	27

Propriété 7 — Cube
La fonction cube est croissante sur $\mathbb{R}$. Un cube a le signe du nombre : $(-2)^3 = -8$ et $2^3 = 8$.
Pour tout nombre k , l'équation $x^3 = k$ a **une seule** solution, la **racine cubique** de k , notée $\sqrt[3]{k}$ (touche de la calculatrice).

Méthode 12 — Résoudre une équation en isolant x^3 (au tableau)

Exemples
Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes.

a) $x^3 = -27$
b) $4x^3 - 5 = x^3 + 19$
c) $2x^3 + 9 = 5x^3 - 6$

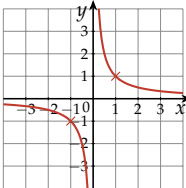
À vous de jouer
Résoudre dans $\mathbb{R}$:

$x^3 = 125$ $3x^3 = -3$ $5x^3 + 2 = 2x^3 - 22$ $7x^3 - 4 = x^3 + 14$

► **À faire** : fiche d'exercices du chapitre, exercices 42 à 45.

XII — Fonction inverse

Définition 10 — Fonction inverse
La **fonction inverse** est définie pour tout $x \neq 0$ par $f(x) = \frac{1}{x} : D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Sa courbe est une **hyperbole**, de centre de symétrie O .



x	$-\infty$	0	$+\infty$
$\frac{1}{x}$	0	$-\infty$	0

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$\frac{1}{x}$	-		+

Propriété 8 — Inverse
La fonction inverse est décroissante sur $]-\infty; 0[$ et décroissante sur $]0; +\infty[$; $\frac{1}{x}$ a le signe de x .
Elle n'est pas décroissante sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ tout entier : $-1 < 1$ et $\frac{1}{-1} < \frac{1}{1}$. On sépare toujours les deux intervalles.

Méthode 13 — Équations et inéquations avec un inverse (au tableau)

Exemples
Résoudre dans $\mathbb{R}$:

a) $\frac{1}{x} = 4$
b) $\frac{6}{2x-4} = 3$
c) $\frac{1}{x} \leq 3$

À vous de jouer
Résoudre dans $\mathbb{R}$:

$\frac{1}{x} = -5$ $\frac{4}{-2x+6} = 2$ $\frac{1}{x} > 2$

► **À faire** : fiche d'exercices du chapitre, exercices 46 à 50.

XIII — Fonction racine carrée

Définition 11 — Fonction racine carrée
La **fonction racine carrée** est définie pour tout $x \geq 0$ par $f(x) = \sqrt{x} : D_f = [0; +\infty[$.



Propriété 9 — Racine carrée
La fonction racine carrée est croissante sur $[0; +\infty[$, et toujours positive ou nulle. Pour des nombres positifs, elle conserve l'ordre : si $a \leq b$, alors $\sqrt{a} \leq \sqrt{b}$, et réciproquement.

Méthode 14 — Équations et inéquations avec une racine carrée (au tableau)

Exemples
Résoudre :

a) $\sqrt{x} = 5$
b) $\sqrt{x} = -4$
c) $\sqrt{x} \leq 3$
d) $\sqrt{x} > 4$
e) $\frac{18}{\sqrt{x}} = 6$

À vous de jouer

Résoudre :

$\sqrt{x} = 7$

$\sqrt{x} = -9$

$\sqrt{x} \leq 5$

$\sqrt{x} \geq 2$

$\frac{10}{\sqrt{x}} = 2$

► **À faire** : fiche d'exercices du chapitre, exercices 51 à 55.