

1^{re} STI2D — Polynômes du second degré

Fiche d'exercices du chapitre

I — Fonction polynôme du second degré

Exercice 1 : Est-ce un trinôme ?

Pour chaque fonction, dire si c'est une fonction polynôme du second degré. Si oui, donner a , b et c ; sinon, dire pourquoi.

- | | |
|---------------------------|----------------------------|
| a) $f(x) = 3x^2 - 2x + 5$ | d) $k(x) = 2x^3 + x^2 - 1$ |
| b) $g(x) = 4x + 1$ | e) $l(x) = (x+2)(x-4)$ |
| c) $h(x) = -x^2 + 6$ | f) $m(x) = x^2 - (x-1)^2$ |

Exercice 2 : Lire les coefficients

Donner a , b et c , avec leur signe.

$f(x) = 3x^2 - 4x + 2$	$l(x) = \frac{1}{3}x^2 + x - 4$
$g(x) = -x^2 + 5x$	$m(x) = 6 - 3x - x^2$
$h(x) = x^2 - 16$	$n(x) = -x^2 + 2x - 5$
$k(x) = -2x^2 + 7$	$p(x) = 5x^2$

Exercice 3 : Développer d'abord

Développer et réduire, puis donner a , b et c quand c'est un trinôme. Deux de ces expressions n'en sont pas.

$f(x) = (x+3)(x-4)$	$k(x) = 2(x+3)^2 - 1$
$g(x) = (3x-2)(x+1)$	$l(x) = (x+3)^2 - (x-3)^2$
$h(x) = (x-2)^2 + 5$	$m(x) = (3x+1)^2 - 9x^2$

Exercice 4 : Calculer des images

- $f(x) = 3x^2 - 2x + 1$: calculer $f(0)$, $f(1)$, $f(-2)$ et $f\left(\frac{1}{3}\right)$.
- $g(x) = -x^2 + 6x$: calculer $g(2)$, $g(-1)$, $g(7)$ et $g\left(\frac{1}{2}\right)$.
- Que remarque-t-on pour $g(-1)$ et $g(7)$?

II — Forme factorisée et racines

Exercice 5 : De la forme factorisée à la forme développée

Développer et réduire.

$f(x) = 3(x-2)(x+1)$	$h(x) = 2(x+1)^2$
$g(x) = -(x+3)(x-4)$	$k(x) = -3(x-1)(x-2)$

Exercice 6 : Équations produit

Résoudre dans $\mathbb{R}$:

- | | |
|------------------------|-------------------|
| a) $(x-5)(x+2) = 0$ | c) $5(x+1)^2 = 0$ |
| b) $-3(x+4)(2x-3) = 0$ | d) $x(2x-8) = 0$ |

Exercice 7 : Lire les racines

Donner les racines de chaque fonction, sans calcul.

$f(x) = (x-3)(x+4)$	$l(x) = 4(x-1)^2$
$g(x) = 2(x+2)(x-6)$	$m(x) = -(x+5)(x-5)$
$h(x) = -3(x-5)(x+1)$	$n(x) = x(x-7)$
$k(x) = (3x-1)(x+2)$	$p(x) = 2(x+1)(x+6)$

Exercice 8 : Les deux formes d'une même fonction

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3(x+1)(x-2)$.

- Développer et réduire $f(x)$.
- Calculer $f(0)$ avec chacune des deux formes.
- Donner les racines de f , puis résoudre $f(x) = 0$.
- f est-elle une fonction polynôme du second degré ? Donner a .

III — Le discriminant

Exercice 9 : Calculer un discriminant

Calculer Δ et donner son signe.

$f(x) = x^2 - 2x - 15$	$m(x) = 25x^2 - 10x + 1$
$g(x) = x^2 + 2x - 15$	$n(x) = -2x^2 + 5x - 3$
$h(x) = x^2 + 2x + 15$	$p(x) = -3x^2 + 4x - 2$
$k(x) = -x^2 + 2x - 15$	$q(x) = -2x^2 + 7x - 3$
$l(x) = 4x^2 - 12x + 9$	

Exercice 10 : Combien de racines ?

Calculer Δ , puis dire combien le polynôme a de racines.

$f(x) = x^2 + 5x + 4$	$k(x) = 9x^2 + 6x + 1$
$g(x) = x^2 + 4x + 5$	$l(x) = 2x^2 + 5x + 3$
$h(x) = x^2 - 8x + 7$	$m(x) = -3x^2 - x - 2$

Exercice 11 : Quand b ou c est nul

Même consigne. Attention aux termes absents et aux signes.

$f(x) = x^2 - 25$	$k(x) = -x^2 + 6x$
$g(x) = -3x^2 + 12$	$l(x) = -2x^2 - 5$
$h(x) = 2x^2 - 7x$	$m(x) = 4x^2 + 1$

IV — Racines et équations du second degré

Exercice 12 : Deux racines

Résoudre dans $\mathbb{R}$. Le discriminant est à chaque fois un carré parfait.

- | | |
|------------------------|-------------------------|
| a) $x^2 - 2x - 15 = 0$ | c) $3x^2 - 8x + 5 = 0$ |
| b) $2x^2 + 3x - 2 = 0$ | d) $-x^2 + 7x - 12 = 0$ |

Exercice 13 : Les trois cas

Résoudre dans $\mathbb{R}$, en précisant à chaque fois le cas.

- | | |
|--------------------------|-------------------------|
| a) $4x^2 - 20x + 25 = 0$ | d) $x^2 + 8x + 16 = 0$ |
| b) $x^2 + 2x + 4 = 0$ | e) $6x^2 + x - 2 = 0$ |
| c) $-3x^2 + 2x - 5 = 0$ | f) $-2x^2 + 5x - 2 = 0$ |

Exercice 14 : Sans discriminant

Résoudre dans $\mathbb{R}$ sans calculer de discriminant.

- | | |
|--------------------|---------------------|
| a) $x^2 - 7 = 0$ | d) $9x^2 - 4 = 0$ |
| b) $2x^2 - 9x = 0$ | e) $3x^2 + 12x = 0$ |
| c) $x^2 - 64 = 0$ | f) $x^2 + 9 = 0$ |

Exercice 15 : Tout ramener d'un côté

Résoudre dans $\mathbb{R}$:

- | | |
|-------------------------------|-----------------------|
| a) $3x^2 + 2x - 1 = 2x^2 + 7$ | c) $x^2 - 3x + 7 = 5$ |
| b) $x(x+3) = -(2x+6)$ | d) $(x+2)(x-3) = 6$ |

Exercice 16 : Racines d'une fonction

Déterminer les racines de chaque fonction, si elle en a.

- | | |
|-----------------------------|---------------------------|
| a) $f(x) = x^2 - 9x + 20$ | c) $h(x) = x^2 + 4x + 7$ |
| b) $g(x) = -3x^2 + 3x + 18$ | d) $k(x) = 9x^2 - 6x + 1$ |

V — Factoriser un trinôme

Exercice 17 : Les racines sont données

Écrire la forme factorisée. Ne pas oublier le coefficient a .

- $x^2 + x - 6$, de racines -3 et 2
- $3x^2 + 3x - 18$, de racines -3 et 2
- $-x^2 + 5x - 4$, de racines 1 et 4
- $2x^2 - 12x + 18$, de racine double 3

Exercice 18 : Factoriser

Calculer Δ , puis factoriser.

$f(x) = x^2 - 2x - 8$	$h(x) = -x^2 - 2x + 3$
$g(x) = 2x^2 - x - 1$	$k(x) = 3x^2 - 7x + 2$

Exercice 19 : Factoriser si c'est possible

Factoriser quand c'est possible; sinon, justifier.

$f(x) = x^2 + 4x + 4$	$k(x) = 6x^2 + x - 2$
$g(x) = x^2 + 9$	$l(x) = 3x^2 + x + 2$
$h(x) = x^2 - 9$	$m(x) = -3x^2 + 6x - 3$

Exercice 20 : Racine évidente

Pour chaque trinôme f, g, h , vérifier que le nombre indiqué est une racine, puis factoriser.

- $f(x) = x^2 - 6x + 5$, avec 1
- $g(x) = 2x^2 + 5x - 7$, avec 1
- $h(x) = -2x^2 - 5x - 3$, avec -1

VI — Représentation graphique

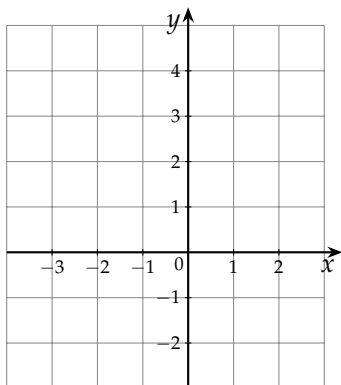
Exercice 21 : Tableau de valeurs et tracé

Soit f la fonction définie sur $[-3; 2]$ par $f(x) = x^2 + x - 2$.

- Quel est le signe de a ? La parabole est-elle un creux ou une bosse?
- Calculer les racines de f .
- Recopier et compléter le tableau de valeurs :

x	-3	-2	-1	0	1	2
$f(x)$						

- Placer les points et tracer la courbe dans le repère ci-dessous.



Exercice 22 : Un deuxième tracé

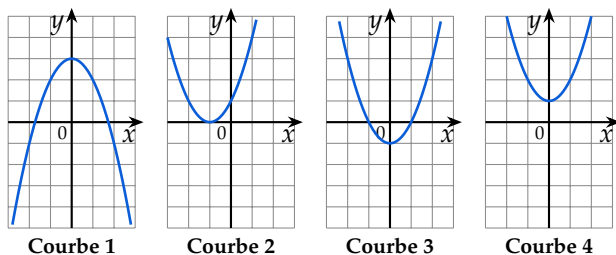
Même travail avec la fonction g définie sur $[0; 4]$ par $g(x) = -x^2 + 4x - 3$: signe de a , racines, tableau de valeurs *par pas de 1*, puis tracé dans un repère orthonormé.

Exercice 23 : Associer une courbe à une fonction

On donne quatre fonctions :

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2 - 1 & g(x) &= -x^2 + 3 \\ h(x) &= x^2 + 1 & k(x) &= (x + 1)^2 \end{aligned}$$

- Pour chacune, donner le signe de a et le nombre de racines.
- Associer chaque fonction à sa courbe.



Exercice 24 : Sans tracer

Dire, en une ligne de calcul, en combien de points la parabole coupe l'axe des abscisses.

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2 - 8x + 16 & k(x) &= 2x^2 - 18 \\ g(x) &= 3x^2 + x + 4 & l(x) &= -9x^2 + 6x - 1 \\ h(x) &= -x^2 + 2x + 8 & m(x) &= x^2 + 4x + 6 \end{aligned}$$

VII — Sommet et variations

Exercice 25 : Coordonnées du sommet

Calculer α et β , puis donner les coordonnées du sommet S .

- $f(x) = x^2 - 6x + 2$
- $g(x) = -x^2 + 4x + 3$
- $h(x) = 2x^2 + 8x + 5$
- $k(x) = -2x^2 + 12x - 7$

Exercice 26 : Tableau de variations

Dresser le tableau de variations sur $\mathbb{R}$, puis dire si la fonction a un minimum ou un maximum, et donner sa valeur.

- $f(x) = x^2 - 4x + 3$
- $g(x) = -3x^2 + 6x + 9$
- $h(x) = 2x^2 + 8x$
- $k(x) = -x^2 - 6x - 5$

Exercice 27 : Le sommet à partir des racines

Soit $f(x) = x^2 - 6x + 8$ et $g(x) = -2x^2 + 8x + 10$.

- Déterminer les racines de f , puis celles de g .
- En déduire α pour chacune, sans la formule $-\frac{b}{2a}$. (Le sommet est à mi-chemin des racines.)
- Calculer β , puis dresser les deux tableaux de variations.

Exercice 28 : Maximum ou minimum?

Lesquelles de ces fonctions ont un maximum? un minimum? Donner sa valeur et le x où il est atteint.

- $f_1(x) = 4x^2 - 8x + 1$
- $f_2(x) = -x^2 + 4x + 2$
- $f_3(x) = -3x^2 + 6x$
- $f_4(x) = x^2 + 8x + 12$

VIII — Synthèse : étudier et tracer une parabole

Rappel. Étude complète : sens de la parabole (signe de a); sommet; racines; tableau de variations; tableau de valeurs; tracé.

Exercice 29 : Étude complète

Faire l'étude complète de la fonction f définie sur $[-2; 4]$ par $f(x) = x^2 - 2x - 3$, puis tracer sa courbe dans un repère orthonormé.

Exercice 30 : Étude complète

Même travail avec la fonction g définie sur $[-3; 2]$ par $g(x) = -x^2 - x + 2$.

Exercice 31 : Étude complète

Même travail avec la fonction h définie sur $[-2; 1]$ par $h(x) = 2x^2 + 2x - 4$. Vérifier que la courbe passe par les points d'ordonnée 0 calculés.

IX — Signe d'un trinôme

Exercice 32 : À partir de la forme factorisée

Dresser le tableau de signes de chaque polynôme.

$$\begin{aligned} f(x) &= 3(x + 2)(x - 5) & h(x) &= 4(x + 4)(3x - 1) \\ g(x) &= -2(x - 1)(x + 6) & k(x) &= -3(2x - 5)(4x + 1) \end{aligned}$$

Exercice 33 : À partir de la forme développée

Calculer Δ , les racines, puis dresser le tableau de signes.

- $f(x) = 2x^2 + 5x - 12$
- $g(x) = -x^2 + 2x + 8$
- $h(x) = 2x^2 - 7x + 3$
- $k(x) = -3x^2 - x + 2$

Exercice 34 : Les trois cas

Étudier le signe de chaque polynôme.

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2 + 4x + 4 & k(x) &= -x^2 + 2x - 4 \\ g(x) &= x^2 - 4 & l(x) &= -9x^2 + 6x - 1 \\ h(x) &= x^2 + 4 & m(x) &= 2x^2 - 5x + 3 \end{aligned}$$

Exercice 35 : Sans tableau de signes

Pour chaque trinôme, dire s'il est *toujours positif*, *toujours négatif*, ou s'il *change de signe*, en s'appuyant sur le signe de a et celui de Δ .

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2 + 2x + 3 & k(x) &= -x^2 + 4x - 4 \\ g(x) &= -2x^2 - 3 & l(x) &= 4x^2 + x + 1 \\ h(x) &= 3x^2 - 12 & m(x) &= -3x^2 + 2x - 1 \end{aligned}$$

X — Inéquations du second degré

Exercice 36 : Inéquations

Résoudre dans $\mathbb{R}$, en donnant les solutions sous forme d'intervalles.

- a) $x^2 + 4x + 4 > 0$ c) $x^2 - 2x - 15 \geq 0$
 b) $-2x^2 + 5x - 3 \leq 0$ d) $x^2 + 3x - 10 < 0$

Exercice 37 : Tout ramener d'un côté

Résoudre dans $\mathbb{R}$:

- a) $-2x^2 + 7x \leq 3$ c) $x(x - 4) \geq x - 6$
 b) $2x^2 \geq 3x - 4$ d) $x^2 + 8 < 6x$

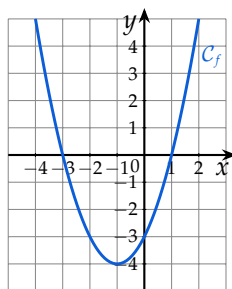
Exercice 38 : Cas particuliers

Résoudre dans $\mathbb{R}$:

- a) $x^2 \geq 25$ d) $3x^2 + 6 \leq 0$ f) $x^2 - x + 4 > 0$
 b) $x^2 < 9$ e) $(x + 2)^2 > 0$
 c) $-x^2 + 1 > 0$

Exercice 39 : Lecture graphique

Voici la courbe de la fonction f définie par $f(x) = x^2 + 2x - 3$.



Résoudre graphiquement, puis par le calcul :

- a) $f(x) = 0$ c) $f(x) \leq 0$
 b) $f(x) > 0$ d) $f(x) = -3$

XI — Intersection d'une parabole et d'une droite

Exercice 40 : Points d'intersection

Trouver les points d'intersection de $\mathcal{P}$ et $\mathcal{D}$, s'il y en a.

- a) $\mathcal{P} : y = x^2 - 4x + 2$ et $\mathcal{D} : y = -x + 2$
 b) $\mathcal{P} : y = x^2 + 2x + 4$ et $\mathcal{D} : y = 4x + 3$
 c) $\mathcal{P} : y = x^2 - x + 3$ et $\mathcal{D} : y = x + 1$

Exercice 41 : Deux paraboles

Trouver les points d'intersection de $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$, s'il y en a.

- a) $\mathcal{P} : y = x^2 + x - 3$ et $\mathcal{P}' : y = -x^2 + 3x + 1$
 b) $\mathcal{P} : y = x^2 - 2x + 4$ et $\mathcal{P}' : y = -x^2 + 2x + 2$
 c) $\mathcal{P} : y = 3x^2 - 2x + 1$ et $\mathcal{P}' : y = 3x^2 + 4x - 5$ (que remarque-t-on?)

Exercice 42 : Combien de points ?

$\mathcal{P}$ est la parabole d'équation $y = x^2$. Pour chaque droite, dire sans calculer les points combien elle a de points communs avec $\mathcal{P}$:

$$\mathcal{D}_1 : y = 4x - 4 \quad \mathcal{D}_2 : y = 4x - 5 \quad \mathcal{D}_3 : y = 4x + 1$$

Exercice 43 : Avec un paramètre

$\mathcal{P}$ est la parabole d'équation $y = x^2 + x$ et $\mathcal{D}_m$ la droite d'équation $y = 3x + m$, où m est un nombre réel.

- Montrer que les abscisses des points communs sont les solutions de $x^2 - 2x - m = 0$.
- Calculer Δ en fonction de m .
- Pour quelles valeurs de m la droite coupe-t-elle $\mathcal{P}$ en deux points ? en un seul ? en aucun ?

XII — Position relative de deux courbes

Exercice 44 : Une parabole et une droite

Soit $f(x) = x^2 + x - 2$ et $g(x) = 3x - 2$.

- Calculer et réduire $d(x) = f(x) - g(x)$.
- Étudier le signe de $d(x)$.
- En déduire la position relative de $\mathcal{C}_f$ et de la droite $\mathcal{C}_g$.

Exercice 45 : Trois situations

Étudier la position relative de $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$.

- a) $f(x) = x^2 - 4x + 5$ et $g(x) = x + 1$
 b) $f(x) = -x^2 + 3x + 1$ et $g(x) = x + 1$
 c) $f(x) = x^2 + 3x + 1$ et $g(x) = 5x$

Exercice 46 : Deux paraboles

Étudier la position relative de $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$.

- a) $f(x) = x^2 + x + 1$ et $g(x) = -x^2 + 4x + 3$
 b) $f(x) = 3x^2 + x - 2$ et $g(x) = 3x^2 - 5x + 4$
 c) $f(x) = 2x^2 + 3x - 1$ et $g(x) = x^2 + 5x + 2$

XIII — Problèmes du second degré

Exercice 47 : Une aire imposée

Un rectangle a pour périmètre 14 cm. On note x sa longueur, en cm.

- Entre quelles valeurs x varie-t-il ?
- Exprimer la largeur, puis l'aire, en fonction de x .
- On veut une aire supérieure à 10 cm². Écrire l'inéquation, la résoudre, et conclure.

Exercice 48 : Une trajectoire

Un projectile est lancé depuis le toit d'un bâtiment. Sa hauteur, en mètres, au bout de t secondes est

$$h(t) = -5t^2 + 30t + 35 \quad (t \geq 0).$$

- De quelle hauteur part le projectile ?
- Quelle hauteur maximale atteint-il, et à quel instant ?
- À quel instant touche-t-il le sol ?
- Pendant combien de temps est-il plus haut que son point de départ ?

Exercice 49 : Un atelier

Un atelier fabrique x pièces par jour, avec $0 \leq x \leq 50$. Le coût de production, en euros, est $C(x) = x^2 - 8x + 400$, et la recette $R(x) = 42x$.

- Montrer que le bénéfice est $B(x) = -x^2 + 50x - 400$.
- Pour quelles productions l'atelier fait-il un bénéfice ?
- Quelle production rend le bénéfice maximal ? Combien vaut-il ?