

SUITES NUMÉRIQUES

Cours — Première STI2D

Comment utiliser ce cours

Chaque partie commence par ce qu'il faut **savoir** (définitions, propriétés), puis vient ce qu'il faut **savoir faire** : une méthode, avec des **exemples corrigés** faits en classe, puis des exercices « À vous de jouer » à chercher seul.

I — Définition d'une suite

Pour commencer

Écrivons les nombres pairs à partir de 2 : 2 ; 4 ; 6 ; 8 ; 10 ; ... On leur donne un numéro, en commençant à 0 :

$$u_0 = 2 \quad u_1 = 4 \quad u_2 = 6 \quad u_3 = 8 \quad u_4 = 10 \quad \dots$$

Cette liste numérotée s'appelle une **suite**.

Définition 1 — Suite numérique

Une **suite** (u_n) associe un nombre u_n à chaque entier $n = 0, 1, 2, 3, \dots$

- Les nombres $u_0, u_1, u_2, \dots$ sont les **termes** de la suite.
- L'entier n est le **rang** du terme u_n (on lit « u indice n »).

Rang et position

Le premier terme est u_0 , le deuxième $u_1, \dots$: le 12^e terme est u_{11} . Le rang vaut toujours la position moins 1.

Méthode 1 — Lire les termes d'une suite donnée par une liste

Exemples corrigés

Chaque liste donne les premiers termes d'une suite (u_n) , numérotée à partir de u_0 . Trouver comment on passe d'un terme au suivant, puis répondre.

- 6 ; 11 ; 16 ; 21 ; ... Donner u_0, u_4 et u_7 .
- 3 ; 6 ; 12 ; 24 ; ... Donner les deux termes suivants, puis u_5 .
- 2 ; 2 ; 4 ; 6 ; 10 ; ... Donner u_3 et u_6 .

a)

On ajoute 5 : 6 ; 11 ; 16 ; 21 ; 26 ; 31 ; 36 ; 41.

$$u_0 = 6 ; u_4 = 26 ; u_7 = 41.$$

*on prolonge la liste jusqu'au rang demandé
 u_7 est le 8^e nombre de la liste*

b)

On multiplie par 2 : les deux termes suivants sont 48 et 96.

$$u_5 = 96.$$

$$u_0 = 3, \text{ donc } 96 \text{ est } u_5$$

c)

Chaque terme est la somme des deux précédents : 2 ; 2 ; 4 ; 6 ; 10 ; 16 ; 26.

$$u_3 = 6 ; u_6 = 26.$$

$$4 = 2 + 2, 6 = 2 + 4, 10 = 4 + 6, \dots$$

on compte à partir de u_0

À vous de jouer

Pour chaque suite, donner les deux termes suivants, puis u_2 et u_7 :

$$4 ; 10 ; 16 ; 22 ; \dots \quad 1 ; 4 ; 16 ; 64 ; \dots \quad 1 ; 4 ; 9 ; 16 ; 25 ; \dots$$

Réponses : 28 et 34, $u_2 = 16$, $u_7 = 46$; 256 et 1 024, $u_2 = 16$, $u_7 = 16\,384$; 36 et 49 (les carrés), $u_2 = 9$, $u_7 = 64$.

► **À faire** : fiche d'exercices du chapitre, exercices 1 à 4.

II — Suites définies explicitement

Pour commencer

Louer un vélo électrique coûte 6 €, plus 3 € par heure. Pour n heures, on paie $p_n = 6 + 3n$ euros. Pour 4 heures : $p_4 = 6 + 3 \times 4 = 18$ €.

Définition 2 — Suite définie explicitement

Une suite est définie **explicitement** quand une formule donne u_n directement à partir de n , comme une fonction : $u_n = f(n)$. On calcule alors **n'importe quel terme** en remplaçant n par son rang.

Méthode 2 — Calculer des termes d'une suite définie explicitement

Exemples corrigés

- a) Soit $u_n = 4n - 3$. Calculer les quatre premiers termes, puis u_{50} .
 b) Soit $v_n = 2n^2 + 1$. Calculer les quatre premiers termes, puis v_{10} .

a)

$$u_0 = 4 \times 0 - 3 \quad \text{on remplace } n \text{ par } 0$$

$$u_0 = -3$$

$$u_1 = 4 \times 1 - 3 = 1$$

$$u_2 = 4 \times 2 - 3 = 5$$

$$u_3 = 4 \times 3 - 3 = 9$$

$$u_{50} = 4 \times 50 - 3 = 197 \quad \text{directement, sans les termes d'avant}$$

b)

$$v_0 = 2 \times 0^2 + 1 = 1 \quad \text{la puissance d'abord}$$

$$v_1 = 2 \times 1^2 + 1 = 3$$

$$v_2 = 2 \times 2^2 + 1 = 9 \quad 2 \times 4 + 1$$

$$v_3 = 2 \times 3^2 + 1 = 19$$

$$v_{10} = 2 \times 10^2 + 1 = 201$$

À vous de jouer

Pour chaque suite, calculer les termes de rang 0, 1, 2 et 10 :

$$a_n = 6n - 1 \quad b_n = n^2 - 3n \quad c_n = 50 - 2n^2$$

Réponses : a : -1; 5; 11; $a_{10} = 59$; b : 0; -2; -2; $b_{10} = 70$; c : 50; 48; 42; $c_{10} = -150$.

Ne pas confondre u_{n+1} et $u_n + 1$

u_{n+1} est le terme **suivant** : on remplace n par $n + 1$ dans la formule. Avec $u_n = 3n$:

$$u_{n+1} = 3(n + 1) = 3n + 3 \quad \text{alors que} \quad u_n + 1 = 3n + 1$$

► **À faire** : fiche d'exercices du chapitre, exercices 5 à 9.

III — Suites définies par récurrence

Pour commencer

Tom a 30 € dans sa tirelire et y ajoute 12 € chaque semaine. On note u_n la somme après n semaines : $u_0 = 30$, et $u_{n+1} = u_n + 12$.

$$u_1 = 30 + 12 = 42 \quad u_2 = 42 + 12 = 54 \quad u_3 = 54 + 12 = 66$$

Chaque semaine se calcule avec la semaine d'avant.

Définition 3 — Suite définie par récurrence

Une suite est définie **par récurrence** quand on connaît :

- son **premier terme** u_0 ;
- une **relation** qui donne chaque terme à partir du **précédent** : u_{n+1} en fonction de u_n .

Méthode 3 — Calculer des termes d'une suite définie par récurrence

Exemples corrigés

a) Soit $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = 4u_n$. Calculer u_1 , u_2 et u_3 .

b) Soit $v_0 = 4$ et $v_{n+1} = 3v_n - 5$. Calculer v_1 , v_2 et v_3 .

a)

$$u_1 = 4 \times u_0 \quad \text{on remplace } n \text{ par } 0 \text{ dans la relation}$$

$$u_1 = 4 \times 2 = 8 \quad \text{on remplace } u_0 \text{ par sa valeur}$$

$$u_2 = 4 \times 8 = 32 \quad u_2 = 4 \times u_1$$

$$u_3 = 4 \times 32 = 128 \quad u_3 = 4 \times u_2$$

b)

$$v_1 = 3 \times 4 - 5 = 7 \quad v_1 = 3v_0 - 5$$

$$v_2 = 3 \times 7 - 5 = 16 \quad v_2 = 3v_1 - 5 : \text{ toujours le terme d'avant}$$

$$v_3 = 3 \times 16 - 5 = 43 \quad v_3 = 3v_2 - 5$$

À vous de jouer

Calculer les trois termes qui suivent le premier :

$$w_0 = 3 \text{ et } w_{n+1} = 2w_n \quad t_0 = 5 \text{ et } t_{n+1} = 2t_n - 4$$

Réponses : $w_1 = 6$, $w_2 = 12$, $w_3 = 24$; $t_1 = 6$, $t_2 = 8$, $t_3 = 12$.

Remarque

Pour u_{15} , il faut d'abord u_{14} , donc $u_{13} \dots$: pour un rang élevé, on confie les calculs à un programme (partie suivante).

► **À faire** : fiche d'exercices du chapitre, exercices 10 à 15.

IV — Programmer une suite définie par récurrence

Le programme type

Pour une suite donnée par u_0 et une relation $u_{n+1} = \dots$, la fonction `suite(n)` renvoie u_n :

- la variable `u` reçoit le premier terme ;
- la boucle `for` refait n fois le calcul du terme suivant ;
- à la sortie de la boucle, `u` vaut u_n : `return u` le renvoie.

Méthode 4 — Calculer un terme de rang élevé avec Python

Exemples corrigés

- a) Soit $u_0 = 4$ et $u_{n+1} = 3u_n - 5$. Écrire le programme, puis calculer u_{12} .
 b) Une cuve contient 800 L d'eau. Chaque jour, on en utilise 20 %, puis on ajoute 100 L. Combien d'eau contient-elle au bout de 10 jours ?

a)

```
def suite(n):
    u = 4
    for i in range(n):
        u = 3*u - 5
    return u
```

la ligne `u = 4` donne u_0 ; dans la boucle, le nouveau `u` est u_{n+1} , l'ancien est u_n

Dans la console, `suite(12)` affiche 797164 : $u_{12} = 797\,164$.

contrôle : `suite(1)` affiche 7, comme $3 \times 4 - 5$

b)

$u_0 = 800$ et $u_{n+1} = 0,8u_n + 100$.

utiliser 20 %, c'est en garder 80 % : on multiplie par 0,8

```
def cuve(n):
    u = 800
    for i in range(n):
        u = 0.8*u + 100
    return u
```

`cuve(10)` affiche 532.21... : il reste environ 532 L.

on arrondit au litre

À vous de jouer

Écrire le programme de la suite définie par $u_0 = 3$ et $u_{n+1} = 2u_n - 1$, puis donner u_{10} .

Réponses : Ligne de la boucle : `u = 2*u - 1` ; `suite(10)` affiche 2049.

Quand la relation contient n

Dans la boucle, `i` joue le rôle de n : $t_{n+1} = -t_n + 3 + n$ s'écrit `u = -u + 3 + i`.

► **À faire** : fiche d'exercices du chapitre, exercices 16 à 19.

V — Représentation graphique d'une suite

Définition 4 — Représentation graphique

On représente une suite (u_n) par les points de coordonnées $(n ; u_n)$: le rang en abscisse, le terme en ordonnée. Les points **ne se relient pas** : il n'y a pas de terme entre deux rangs (pas de rang 2,5).

Méthode 5 — Représenter graphiquement une suite

Exemples corrigés

Dresser le tableau des six premiers termes, puis les représenter.

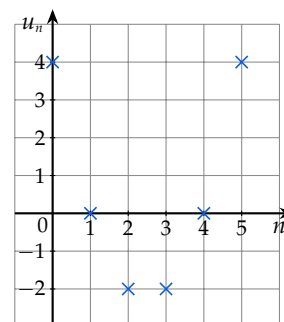
a) $u_n = n^2 - 5n + 4$

b) $w_0 = 2$ et $w_{n+1} = -w_n + 1$

a)

n	0	1	2	3	4	5
u_n	4	0	-2	-2	0	4

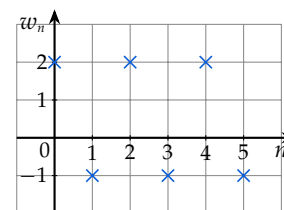
Par exemple $u_2 = 2^2 - 5 \times 2 + 4 = -2$: on place une croix en $(2; -2)$. Les croix ne sont pas reliées.



b)

n	0	1	2	3	4	5
w_n	2	-1	2	-1	2	-1

$w_1 = -2 + 1 = -1$, puis $w_2 = 1 + 1 = 2$: les termes alternent entre 2 et -1.



À vous de jouer

Représenter les termes a_0 à a_5 de la suite $a_n = 6 - n$, puis les termes b_0 à b_4 de la suite définie par $b_0 = 16$ et $b_{n+1} = \frac{b_n}{2}$.

Réponses : a : 6; 5; 4; 3; 2; 1 (points alignés); b : 16; 8; 4; 2; 1 (les points descendent de moins en moins vite).

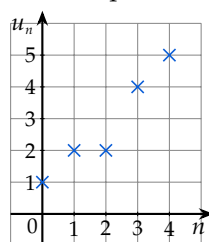
► **À faire** : fiche d'exercices du chapitre, exercices 20 à 23.

VI — Sens de variation d'une suite

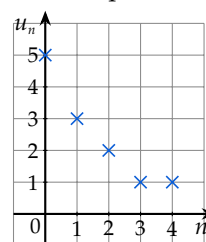
Définition 5 — Suite croissante, décroissante

- (u_n) est **croissante** si chaque terme est supérieur ou égal au précédent : $u_{n+1} \geq u_n$ pour tout n .
- (u_n) est **décroissante** si chaque terme est inférieur ou égal au précédent : $u_{n+1} \leq u_n$ pour tout n .
- (u_n) est **constante** si $u_{n+1} = u_n$ pour tout n .

Croissante : les points montent



Décroissante : les points descendent



Remarque

Une suite peut n'être **ni croissante, ni décroissante** : la suite (w_n) de la méthode 5, qui alterne entre 2 et -1 , en est un exemple. Les premiers termes ou le graphique donnent une idée du sens de variation, sans le **prouver**.

Méthode 6 — Étudier le sens de variation avec $u_{n+1} - u_n$ **Exemples corrigés**

Étudier le sens de variation de chaque suite.

- a) $u_{n+1} = u_n - 4$
- b) $w_n = 7 - 2n$
- c) $v_n = n^2 + 4n$
- d) $t_0 = 1$ et $t_{n+1} = t_n + n^2 + 2$

a)

$$u_{n+1} - u_n = -4 \quad \text{on lit la différence dans la relation}$$

$u_{n+1} - u_n < 0$: la suite (u_n) est décroissante.

différence négative : chaque terme est plus petit que le précédent

b)

$$w_{n+1} = 7 - 2(n+1) \quad \text{on remplace } n \text{ par } n+1$$

$$w_{n+1} = 5 - 2n$$

$$w_{n+1} - w_n = 5 - 2n - (7 - 2n) \quad \text{parenthèses autour de } w_n$$

$$w_{n+1} - w_n = -2$$

$w_{n+1} - w_n < 0$: la suite (w_n) est décroissante.

c)

$$v_{n+1} = (n+1)^2 + 4(n+1) \quad \text{on remplace } n \text{ par } n+1$$

$$v_{n+1} = n^2 + 2n + 1 + 4n + 4 \quad \text{identité remarquable}$$

$$v_{n+1} = n^2 + 6n + 5$$

$$v_{n+1} - v_n = n^2 + 6n + 5 - (n^2 + 4n)$$

$$v_{n+1} - v_n = 2n + 5$$

Comme $n \geq 0$, on a $2n + 5 \geq 5$.

le signe de la différence dépend de n

Donc $v_{n+1} - v_n > 0$: la suite (v_n) est croissante.

d)

$$t_{n+1} - t_n = n^2 + 2 \quad \text{les } t_n \text{ se simplifient}$$

Un carré est positif, donc $n^2 + 2 \geq 2$: la suite (t_n) est croissante.

À vous de jouer

Étudier le sens de variation de chaque suite :

$$a_n = 3n + 5 \quad b_{n+1} = b_n - n - 1 \quad c_n = n^2 + 3 \quad d_n = 8 - 2n^2$$

Réponses : $a_{n+1} - a_n = 3 > 0$: croissante ; $b_{n+1} - b_n = -n - 1 < 0$: décroissante ; $c_{n+1} - c_n = 2n + 1 > 0$: croissante ; $d_{n+1} - d_n = -4n - 2 < 0$: décroissante.

► **À faire** : fiche d'exercices du chapitre, exercices 24 à 27.

VII — Suites arithmétiques

Pour commencer

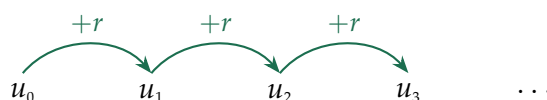
- On part de 2 et on ajoute 6 à chaque étape : 2 ; 8 ; 14 ; 20 ; ... Donc $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = u_n + 6$.
- On part de 10 et on enlève 3 à chaque étape : 10 ; 7 ; 4 ; 1 ; ... Donc $v_0 = 10$ et $v_{n+1} = v_n - 3$.

Définition 6 — Suite arithmétique

Une suite (u_n) est **arithmétique** quand on passe d'un terme au suivant en **ajoutant toujours le même nombre r** :

$$u_{n+1} = u_n + r \quad \text{pour tout entier } n$$

Ce nombre r est la **raison** de la suite ; il est négatif quand on enlève.



Méthode 7 — Traduire une situation par une suite arithmétique

Exemples corrigés

- (u_n) est arithmétique, de premier terme $u_0 = -5$ et de raison 4. Écrire la relation de récurrence, puis calculer u_1 , u_2 et u_3 .
- Louer une nacelle élévatrice coûte 40 € de forfait, puis 15 € par heure. On note p_n le prix pour n heures. Donner p_0 , la relation entre p_{n+1} et p_n , puis p_3 .

a)

$$u_{n+1} = u_n + 4.$$

on ajoute la raison

$$u_1 = -5 + 4 = -1$$

$$u_2 = -1 + 4 = 3$$

$$u_3 = 3 + 4 = 7$$

b)

$$p_0 = 40 \text{ et } p_{n+1} = p_n + 15.$$

départ : le forfait ; chaque heure ajoute 15 €

$$(p_n) \text{ est arithmétique de raison } 15 : p_1 = 55, p_2 = 70, p_3 = 85.$$

À vous de jouer

- (b_n) est arithmétique, avec $b_0 = 12$ et $r = -1,5$. Calculer b_1 , b_2 et b_3 .
- Le réservoir d'un groupe électrogène contient 30 L ; le groupe consomme 2,5 L par heure. On note h_n le volume restant après n heures. Donner h_0 , la relation entre h_{n+1} et h_n , puis h_4 .

Réponses : a) 10,5 ; 9 ; 7,5 ; b) $h_0 = 30$, $h_{n+1} = h_n - 2,5$ (raison $-2,5$), $h_4 = 20$ L.

► **À faire** : fiche d'exercices du chapitre, exercices 28 à 31.

VIII — Reconnaître une suite arithmétique

Propriété 1 — Le test de la différence

La suite (u_n) est arithmétique quand la différence entre un terme et le précédent est **toujours la même** :

$$u_{n+1} - u_n = r \quad (\text{un nombre, sans } n)$$

Méthode 8 — Montrer qu'une suite est arithmétique, ou ne l'est pas

Exemples corrigés

- a) Les nombres 5 ; 9 ; 13 ; 17 peuvent-ils être les premiers termes d'une suite arithmétique ? Et 3 ; 6 ; 12 ; 24 ?
 b) Soit $u_n = 4n - 1$. Montrer que (u_n) est arithmétique.
 c) Soit $v_n = n^2 + 2$. La suite (v_n) est-elle arithmétique ?

a)

$9 - 5 = 4$; $13 - 9 = 4$; $17 - 13 = 4$: oui, de raison 4.

on calcule toutes les différences

$6 - 3 = 3$ mais $12 - 6 = 6$: non.

deux différences distinctes suffisent pour dire non

b)

$$u_{n+1} = 4(n+1) - 1 \quad \text{on remplace } n \text{ par } n+1$$

$$u_{n+1} = 4n + 3$$

$$u_{n+1} - u_n = 4n + 3 - (4n - 1)$$

$$u_{n+1} - u_n = 4 \quad \text{un nombre, sans } n$$

(u_n) est arithmétique, de raison $r = 4$ et de premier terme

$$u_0 = -1.$$

c)

$v_0 = 2$, $v_1 = 3$, $v_2 = 6$; or $v_1 - v_0 = 1$ et $v_2 - v_1 = 3$.

les premiers termes suffisent pour dire non

Les différences ne sont pas égales : (v_n) n'est pas arithmétique.

À vous de jouer

Pour chaque suite, dire si elle est arithmétique ; si oui, donner sa raison et son premier terme :

$$a_n = 9 - 3n \quad b_n = 3n^2 \quad c_n = \frac{n+3}{2}$$

Réponses : $a_{n+1} - a_n = -3$: oui, $r = -3$, $a_0 = 9$; b : 0 ; 3 ; 12, différences 3 et 9 : non ; $c_{n+1} - c_n = \frac{1}{2}$: oui, $r = \frac{1}{2}$, $c_0 = \frac{3}{2}$.

► **À faire** : fiche d'exercices du chapitre, exercices 32 à 34.

IX — Terme général et variations d'une suite arithmétique

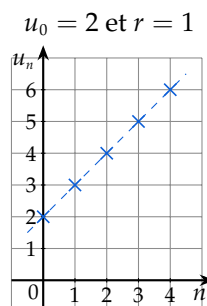
Propriété 2 — Terme général

Si (u_n) est arithmétique, de premier terme u_0 et de raison r , alors pour tout entier n :

$$u_n = u_0 + n \times r$$

De u_0 à u_n , on ajoute n fois la raison.

Les points du graphique sont **alignés**, sur la droite d'équation $y = u_0 + rx$: c'est une **croissance linéaire**.



Si la suite commence à u_1

De u_1 à u_n , on ajoute $(n - 1)$ fois la raison : $u_n = u_1 + (n - 1) \times r$.

Propriété 3 — Sens de variation

Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r .

- Si $r > 0$, la suite est **croissante**.
- Si $r = 0$, la suite est **constante**.
- Si $r < 0$, la suite est **décroissante**.

Démonstration. $u_{n+1} - u_n = r$: la différence a le signe de r (méthode 6).

Méthode 9 — Utiliser le terme général d'une suite arithmétique**Exemples corrigés**

- (u_n) est arithmétique, avec $u_0 = 9$ et $r = -3$. Exprimer u_n en fonction de n , calculer u_{40} , puis donner le sens de variation.
- Soit $V_n = -4n + 10$. Montrer que (V_n) est arithmétique, calculer V_{100} , puis donner le sens de variation.
- Un atelier produit 4 800 pièces en janvier, puis 120 pièces de plus chaque mois. On note $u_1 = 4 800$ la production de janvier. Combien de pièces produit-il en décembre ?

a)

$$u_n = 9 + n \times (-3) \quad u_n = u_0 + n \times r$$

$$u_n = 9 - 3n$$

$$u_{40} = 9 - 3 \times 40 \quad \text{on remplace } n \text{ par } 40$$

$$u_{40} = -111$$

$r = -3 < 0$: la suite (u_n) est décroissante.

signe de la raison

b)

$V_n = 10 + n \times (-4)$: arithmétique, de premier terme $V_0 = 10$ et de raison $r = -4$. *on reconnaît la forme $u_0 + n \times r$*

$$V_{100} = -4 \times 100 + 10$$

$$V_{100} = -390$$

$r = -4 < 0$: la suite (V_n) est décroissante.

c)

On ajoute 120 chaque mois : (u_n) est arithmétique, de raison 120. Décembre correspond à $n = 12$. *janvier, c'est u_1*

$$u_n = 4 800 + (n - 1) \times 120 \quad \text{la suite commence à } u_1$$

$$u_{12} = 4 800 + 11 \times 120$$

$$u_{12} = 6 120$$

En décembre, l'atelier produit 6 120 pièces.

une phrase pour conclure

À vous de jouer

- (a_n) est arithmétique, avec $a_0 = -8$ et $r = 5$. Exprimer a_n , calculer a_{20} , puis donner le sens de variation.
- Le groupe électrogène de la méthode 7 : $h_0 = 30$ et $r = -2,5$. Exprimer h_n , puis calculer le volume restant au bout de 8 heures.

Réponses : a) $a_n = -8 + 5n$, $a_{20} = 92$, croissante ($r > 0$); b) $h_n = 30 - 2,5n$; $h_8 = 10$: il reste 10 L.

X — Suites géométriques

Pour commencer

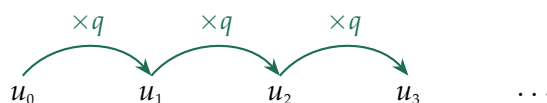
- On part de 3 et on multiplie par 2 à chaque étape : 3 ; 6 ; 12 ; 24 ; ... Donc $u_0 = 3$ et $u_{n+1} = 2 \times u_n$.
- On part de 40 et on multiplie par 0,5 (on divise par 2) : 40 ; 20 ; 10 ; 5 ; ... Donc $v_0 = 40$ et $v_{n+1} = 0,5 \times v_n$.

Définition 7 — Suite géométrique

Une suite (u_n) est **géométrique** quand on passe d'un terme au suivant en **multipliant toujours par le même nombre** q , strictement positif :

$$u_{n+1} = q \times u_n \quad \text{pour tout entier } n$$

Ce nombre q est la **raison** de la suite.



Propriété 4 — Évolution en pourcentage

- Augmenter de $t\%$, c'est multiplier par $1 + \frac{t}{100}$.
- Diminuer de $t\%$, c'est multiplier par $1 - \frac{t}{100}$.

Une quantité qui varie chaque année du **même pourcentage** forme donc une suite géométrique, dont la raison est ce coefficient multiplicateur.

Méthode 10 — Traduire une évolution en pourcentage par une suite géométrique

Exemples corrigés

- Donner le coefficient multiplicateur de chaque évolution : $+3\%$; -8% ; $+25\%$; -40% .
- On place 800 € à 3% par an ; u_n est le capital après n années. Donner u_0 et la relation de récurrence, puis calculer u_1 et u_2 .
- Un village de 2 000 habitants perd 4% de sa population chaque année ; P_n est la population après n années. Calculer P_1 et P_2 .

a)

$$1 + 0,03 = 1,03 ; 1 - 0,08 = 0,92 ; 1 + 0,25 = 1,25 ; 1 - 0,4 = 0,6.$$

$$t\% = \frac{t}{100} : 3\% = 0,03$$

b)

$$u_0 = 800 \text{ et } u_{n+1} = 1,03 \times u_n : \text{géométrique, de raison } 1,03.$$

$+3\%$: on multiplie par 1,03

$$u_1 = 1,03 \times 800 = 824$$

$$u_2 = 1,03 \times 824 = 848,72 \quad \text{les intérêts portent aussi sur les intérêts}$$

c)

$$P_0 = 2\,000 \text{ et } P_{n+1} = 0,96 \times P_n : \text{géométrique, de raison } 0,96.$$

-4% : on multiplie par 0,96

$$P_1 = 0,96 \times 2\,000 = 1\,920$$

$$P_2 = 0,96 \times 1\,920 = 1\,843,2 \quad \text{soit environ } 1\,843 \text{ habitants}$$

À vous de jouer

- a) Donner le coefficient multiplicateur : $+12\%$; -6% ; $+50\%$.
- b) Un vélo électrique acheté 1 500 € perd 20% de sa valeur chaque année; v_n est sa valeur après n années. Donner v_0 , la relation entre v_{n+1} et v_n , puis v_1 et v_2 .

Réponses : a) 1,12; 0,94; 1,5; b) $v_0 = 1\,500$, $v_{n+1} = 0,8 \times v_n$, $v_1 = 1\,200$ €, $v_2 = 960$ €.

► **À faire** : fiche d'exercices du chapitre, exercices 40 à 43.

XI — Reconnaître une suite géométrique

Propriété 5 — Le test du quotient

La suite (u_n) , dont aucun terme n'est nul, est géométrique quand le quotient d'un terme par le précédent est **toujours le même** :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = q \quad (\text{un nombre, sans } n)$$

Méthode 11 — Montrer qu'une suite est géométrique, ou ne l'est pas

Exemples corrigés

- a) Les nombres 2; 6; 18; 54 peuvent-ils être les premiers termes d'une suite géométrique? Et 4; 8; 16; 30?
- b) Soit $u_n = 3 \times 5^n$. Montrer que (u_n) est géométrique.
- c) Soit $v_n = 3n + 2$. La suite (v_n) est-elle géométrique?

a)

$$\frac{6}{2} = 3; \frac{18}{6} = 3; \frac{54}{18} = 3 : \text{oui, de raison } 3.$$

on calcule **tous** les quotients

$$\frac{8}{4} = 2; \frac{16}{8} = 2; \text{mais } \frac{30}{16} \neq 2 : \text{non.}$$

$$16 \times 2 = 32, \text{ pas } 30$$

b)

$$u_{n+1} = 3 \times 5^{n+1} \quad \text{on remplace } n \text{ par } n+1$$

$$u_{n+1} = 3 \times 5^n \times 5 \quad 5^{n+1} = 5^n \times 5$$

$$u_{n+1} = 5 \times u_n \quad \text{on reconnaît } u_n = 3 \times 5^n$$

(u_n) est géométrique, de raison $q = 5$ et de premier terme $5^0 = 1$
 $u_0 = 3 \times 5^0 = 3$.

c)

$$v_0 = 2, v_1 = 5, v_2 = 8; \text{ or } \frac{v_1}{v_0} = \frac{5}{2} \text{ et } \frac{v_2}{v_1} = \frac{8}{5}.$$

les premiers termes suffisent pour dire non

Les quotients ne sont pas égaux : (v_n) n'est pas géométrique. elle est arithmétique, de raison 3

À vous de jouer

Pour chaque suite, dire si elle est géométrique; si oui, donner sa raison :

$$64; 16; 4; 1 \quad a_n = 6 \times 0,5^n \quad b_n = n^2 + 1$$

Réponses : Quotients tous égaux à $\frac{1}{4}$: oui, $q = \frac{1}{4}$; $a_{n+1} = 0,5 \times a_n$: oui, $q = 0,5$ et $a_0 = 6$; $b : 1; 2; 5$, quotients 2 et 2,5 : non.

► **À faire** : fiche d'exercices du chapitre, exercices 44 à 47.

XII — Terme général et variations d'une suite géométrique

Propriété 6 — Terme général

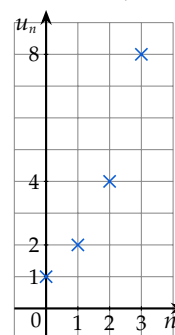
Si (u_n) est géométrique, de premier terme u_0 et de raison q , alors pour tout entier n :

$$u_n = u_0 \times q^n$$

De u_0 à u_n , on multiplie n fois par q .

Les points ne sont pas alignés : pour $q > 1$, ils montent de plus en plus vite. C'est une **croissance exponentielle**.

$u_0 = 1$ et $q = 2$

Si la suite commence à u_1

On multiplie $(n - 1)$ fois par q : $u_n = u_1 \times q^{n-1}$.

Propriété 7 — Sens de variation

Soit (u_n) une suite géométrique de raison $q > 0$ et de premier terme $u_0 > 0$.

- Si $q > 1$, la suite est **croissante**.
- Si $q = 1$, la suite est **constante**.
- Si $0 < q < 1$, la suite est **décroissante**, et ses termes se rapprochent de 0.

Démonstration. $u_{n+1} - u_n = q \times u_n - u_n = u_n \times (q - 1)$; les termes u_n sont positifs, donc la différence a le signe de $q - 1$.

Méthode 12 — Utiliser le terme général d'une suite géométrique

Exemples corrigés

- Le placement de la méthode 10 : $u_0 = 800$ et $q = 1,03$. Exprimer u_n en fonction de n , calculer u_{10} , puis donner le sens de variation.
- Le village de la méthode 10 : $P_0 = 2\,000$ et $q = 0,96$. Quelle sera sa population dans 10 ans ?
- Au bout de combien d'années le capital du a) aura-t-il doublé ?

a)

$$\begin{aligned} u_n &= 800 \times 1,03^n & u_n &= u_0 \times q^n \\ u_{10} &= 800 \times 1,03^{10} & & \text{à la calculatrice} \\ u_{10} &\simeq 1\,075,13 \end{aligned}$$

Après 10 ans, le capital vaut environ 1 075,13 €.

$q = 1,03 > 1$: la suite est croissante.

arrondi au centime

on compare q à 1

b)

$$\begin{aligned} P_n &= 2\,000 \times 0,96^n \\ P_{10} &= 2\,000 \times 0,96^{10} \\ P_{10} &\simeq 1\,329,7 \end{aligned}$$

Environ 1 330 habitants ; $0 < q < 1$: la population diminue.

on arrondit à l'unité : des habitants

c)

On cherche le premier n tel que $u_n \geq 1\,600$, dans le tableau de valeurs de $800 \times 1,03^n$.

doubler : atteindre 2×800

$u_{23} \simeq 1\,578,87 < 1\,600$ et $u_{24} \simeq 1\,626,24 \geq 1\,600$.

on lit les deux lignes autour du seuil

Le capital aura doublé au bout de 24 ans.

À vous de jouer

- a) (a_n) est géométrique, avec $a_0 = 5$ et $q = 2$. Exprimer a_n , calculer a_6 , puis donner le sens de variation.
- b) (b_n) est géométrique, avec $b_0 = 729$ et $q = \frac{1}{3}$. Calculer b_5 et donner le sens de variation.
- c) Le vélo de la méthode 10 : $v_n = 1\,500 \times 0,8^n$. Au bout de combien d'années vaut-il moins de 500 € ?

Réponses : a) $a_n = 5 \times 2^n$, $a_6 = 320$, croissante ; b) $b_5 = 3$, décroissante ; c) $v_4 = 614,40$ et $v_5 \simeq 491,52$: au bout de 5 ans.

► À faire : fiche d'exercices du chapitre, exercices 48 à 52.

Bilan : arithmétique ou géométrique ?

	Arithmétique (raison r)	Géométrique (raison $q > 0$)
D'un terme au suivant	on ajoute r : $u_{n+1} = u_n + r$	on multiplie par q : $u_{n+1} = q \times u_n$
Terme général	$u_n = u_0 + n \times r$	$u_n = u_0 \times q^n$
Croissante si	$r > 0$	$q > 1$ (avec $u_0 > 0$)
Décroissante si	$r < 0$	$0 < q < 1$ (avec $u_0 > 0$)
Graphique	points alignés : croissance linéaire	croissance exponentielle (si $q > 1$)