

# SUITES NUMÉRIQUES

Cours — Première STI2D

Version élève

## Comment utiliser ce cours

Chaque partie commence par ce qu'il faut **savoir** (définitions, propriétés), puis vient ce qu'il faut **savoir faire** : une méthode, avec des **exemples** faits en classe, puis des exercices « **À vous de jouer** » à chercher seul.

Sur cette feuille, seuls les **énoncés** des exemples figurent : la résolution, signalée par la mention *(au tableau)*, est à rédiger dans le cahier.

## I — Définition d'une suite

### Pour commencer

Écrivons les nombres pairs à partir de 2 : 2 ; 4 ; 6 ; 8 ; 10 ; ... On leur donne un numéro, en commençant à 0 :

$$u_0 = 2 \quad u_1 = 4 \quad u_2 = 6 \quad u_3 = 8 \quad u_4 = 10 \quad \dots$$

Cette liste numérotée s'appelle une **suite**.

### Définition 1 — Suite numérique

Une **suite**  $(u_n)$  associe un nombre  $u_n$  à chaque entier  $n = 0, 1, 2, 3, \dots$

- Les nombres  $u_0, u_1, u_2, \dots$  sont les **termes** de la suite.
- L'entier  $n$  est le **rang** du terme  $u_n$  (on lit «  $u$  indice  $n$  »).

### Rang et position

Le premier terme est  $u_0$ , le deuxième  $u_1, \dots$  : le 12<sup>e</sup> terme est  $u_{11}$ . Le rang vaut toujours la position moins 1.

### Méthode 1 — Lire les termes d'une suite donnée par une liste

#### Exemples

*(au tableau)*

Chaque liste donne les premiers termes d'une suite  $(u_n)$ , numérotée à partir de  $u_0$ . Trouver comment on passe d'un terme au suivant, puis répondre.

- 6 ; 11 ; 16 ; 21 ; ... Donner  $u_0, u_4$  et  $u_7$ .
- 3 ; 6 ; 12 ; 24 ; ... Donner les deux termes suivants, puis  $u_5$ .
- 2 ; 2 ; 4 ; 6 ; 10 ; ... Donner  $u_3$  et  $u_6$ .

#### À vous de jouer

Pour chaque suite, donner les deux termes suivants, puis  $u_2$  et  $u_7$  :

$$4 ; 10 ; 16 ; 22 ; \dots \quad 1 ; 4 ; 16 ; 64 ; \dots \quad 1 ; 4 ; 9 ; 16 ; 25 ; \dots$$

► **À faire** : fiche d'exercices du chapitre, exercices 1 à 4.

## II — Suites définies explicitement

### Pour commencer

Louer un vélo électrique coûte 6 €, plus 3 € par heure. Pour  $n$  heures, on paie  $p_n = 6 + 3n$  euros. Pour 4 heures :  $p_4 = 6 + 3 \times 4 = 18$  €.

### Définition 2 — Suite définie explicitement

Une suite est définie **explicitement** quand une formule donne  $u_n$  directement à partir de  $n$ , comme une fonction :  $u_n = f(n)$ . On calcule alors **n'importe quel terme** en remplaçant  $n$  par son rang.

### Méthode 2 — Calculer des termes d'une suite définie explicitement

#### Exemples

(au tableau)

a) Soit  $u_n = 4n - 3$ . Calculer les quatre premiers termes, puis  $u_{50}$ .

b) Soit  $v_n = 2n^2 + 1$ . Calculer les quatre premiers termes, puis  $v_{10}$ .

#### À vous de jouer

Pour chaque suite, calculer les termes de rang 0, 1, 2 et 10 :

$$a_n = 6n - 1 \quad b_n = n^2 - 3n \quad c_n = 50 - 2n^2$$

### Ne pas confondre $u_{n+1}$ et $u_n + 1$

$u_{n+1}$  est le terme **suivant** : on remplace  $n$  par  $n + 1$  dans la formule. Avec  $u_n = 3n$  :

$$u_{n+1} = 3(n + 1) = 3n + 3 \quad \text{alors que} \quad u_n + 1 = 3n + 1$$

► **À faire** : fiche d'exercices du chapitre, exercices 5 à 9.

## III — Suites définies par récurrence

### Pour commencer

Tom a 30 € dans sa tirelire et y ajoute 12 € chaque semaine. On note  $u_n$  la somme après  $n$  semaines :  $u_0 = 30$ , et  $u_{n+1} = u_n + 12$ .

$$u_1 = 30 + 12 = 42 \quad u_2 = 42 + 12 = 54 \quad u_3 = 54 + 12 = 66$$

Chaque semaine se calcule avec la semaine d'avant.

### Définition 3 — Suite définie par récurrence

Une suite est définie **par récurrence** quand on connaît :

- son **premier terme**  $u_0$  ;
- une **relation** qui donne chaque terme à partir du **précédent** :  $u_{n+1}$  en fonction de  $u_n$ .

### Méthode 3 — Calculer des termes d'une suite définie par récurrence

#### Exemples

(au tableau)

a) Soit  $u_0 = 2$  et  $u_{n+1} = 4u_n$ . Calculer  $u_1$ ,  $u_2$  et  $u_3$ .

b) Soit  $v_0 = 4$  et  $v_{n+1} = 3v_n - 5$ . Calculer  $v_1$ ,  $v_2$  et  $v_3$ .

**À vous de jouer**

Calculer les trois termes qui suivent le premier :

$$w_0 = 3 \text{ et } w_{n+1} = 2w_n \quad t_0 = 5 \text{ et } t_{n+1} = 2t_n - 4$$

**Remarque**

Pour  $u_{15}$ , il faut d'abord  $u_{14}$ , donc  $u_{13} \dots$  : pour un rang élevé, on confie les calculs à un programme (partie suivante).

► **À faire** : fiche d'exercices du chapitre, exercices 10 à 15.

**IV — Programmer une suite définie par récurrence****Le programme type**

Pour une suite donnée par  $u_0$  et une relation  $u_{n+1} = \dots$ , la fonction `suite(n)` renvoie  $u_n$  :

- la variable `u` reçoit le premier terme ;
- la boucle `for` refait  $n$  fois le calcul du terme suivant ;
- à la sortie de la boucle, `u` vaut  $u_n$  : `return u` le renvoie.

**Méthode 4 — Calculer un terme de rang élevé avec Python****Exemples**

(au tableau)

- Soit  $u_0 = 4$  et  $u_{n+1} = 3u_n - 5$ . Écrire le programme, puis calculer  $u_{12}$ .
- Une cuve contient 800 L d'eau. Chaque jour, on en utilise 20 %, puis on ajoute 100 L. Combien d'eau contient-elle au bout de 10 jours ?

**À vous de jouer**

Écrire le programme de la suite définie par  $u_0 = 3$  et  $u_{n+1} = 2u_n - 1$ , puis donner  $u_{10}$ .

**Quand la relation contient  $n$** 

Dans la boucle, `i` joue le rôle de  $n$  :  $t_{n+1} = -t_n + 3 + n$  s'écrit `u = -u + 3 + i`.

► **À faire** : fiche d'exercices du chapitre, exercices 16 à 19.

**V — Représentation graphique d'une suite****Définition 4 — Représentation graphique**

On représente une suite  $(u_n)$  par les points de coordonnées  $(n ; u_n)$  : le rang en abscisse, le terme en ordonnée. Les points **ne se relient pas** : il n'y a pas de terme entre deux rangs (pas de rang 2,5).

**Méthode 5 — Représenter graphiquement une suite****Exemples**

(au tableau)

Dresser le tableau des six premiers termes, puis les représenter.

- $u_n = n^2 - 5n + 4$
- $w_0 = 2$  et  $w_{n+1} = -w_n + 1$

**À vous de jouer**

Représenter les termes  $a_0$  à  $a_5$  de la suite  $a_n = 6 - n$ , puis les termes  $b_0$  à  $b_4$  de la suite définie par  $b_0 = 16$  et

$$b_{n+1} = \frac{b_n}{2}.$$

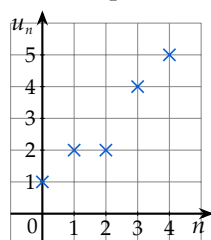
► **À faire** : fiche d'exercices du chapitre, exercices 20 à 23.

## VI — Sens de variation d'une suite

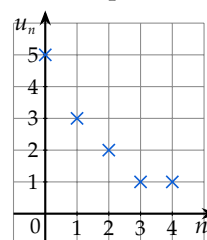
### Définition 5 — Suite croissante, décroissante

- $(u_n)$  est **croissante** si chaque terme est supérieur ou égal au précédent :  $u_{n+1} \geq u_n$  pour tout  $n$ .
- $(u_n)$  est **décroissante** si chaque terme est inférieur ou égal au précédent :  $u_{n+1} \leq u_n$  pour tout  $n$ .
- $(u_n)$  est **constante** si  $u_{n+1} = u_n$  pour tout  $n$ .

Croissante : les points montent



Décroissante : les points descendent



### Remarque

Une suite peut n'être **ni croissante, ni décroissante** : la suite  $(w_n)$  de la méthode 5, qui alterne entre 2 et  $-1$ , en est un exemple. Les premiers termes ou le graphique donnent une idée du sens de variation, sans le prouver.

### Méthode 6 — Étudier le sens de variation avec $u_{n+1} - u_n$

#### Exemples

Étudier le sens de variation de chaque suite.

- $u_{n+1} = u_n - 4$
- $w_n = 7 - 2n$
- $v_n = n^2 + 4n$
- $t_0 = 1$  et  $t_{n+1} = t_n + n^2 + 2$

#### À vous de jouer

Étudier le sens de variation de chaque suite :

$$a_n = 3n + 5 \quad b_{n+1} = b_n - n - 1 \quad c_n = n^2 + 3 \quad d_n = 8 - 2n^2$$

(au tableau)

► **À faire** : fiche d'exercices du chapitre, exercices 24 à 27.

## VII — Suites arithmétiques

### Pour commencer

- On part de 2 et on ajoute 6 à chaque étape : 2 ; 8 ; 14 ; 20 ; ... Donc  $u_0 = 2$  et  $u_{n+1} = u_n + 6$ .
- On part de 10 et on enlève 3 à chaque étape : 10 ; 7 ; 4 ; 1 ; ... Donc  $v_0 = 10$  et  $v_{n+1} = v_n - 3$ .

**Définition 6 — Suite arithmétique**

Une suite  $(u_n)$  est **arithmétique** quand on passe d'un terme au suivant en **ajoutant toujours le même nombre**  $r$  :

$$u_{n+1} = u_n + r \quad \text{pour tout entier } n$$

Ce nombre  $r$  est la **raison** de la suite ; il est négatif quand on enlève.

**Méthode 7 — Traduire une situation par une suite arithmétique****Exemples***(au tableau)*

- $(u_n)$  est arithmétique, de premier terme  $u_0 = -5$  et de raison 4. Écrire la relation de récurrence, puis calculer  $u_1$ ,  $u_2$  et  $u_3$ .
- Louer une nacelle élévatrice coûte 40 € de forfait, puis 15 € par heure. On note  $p_n$  le prix pour  $n$  heures. Donner  $p_0$ , la relation entre  $p_{n+1}$  et  $p_n$ , puis  $p_3$ .

**À vous de jouer**

- $(b_n)$  est arithmétique, avec  $b_0 = 12$  et  $r = -1,5$ . Calculer  $b_1$ ,  $b_2$  et  $b_3$ .
- Le réservoir d'un groupe électrogène contient 30 L ; le groupe consomme 2,5 L par heure. On note  $h_n$  le volume restant après  $n$  heures. Donner  $h_0$ , la relation entre  $h_{n+1}$  et  $h_n$ , puis  $h_4$ .

► **À faire** : fiche d'exercices du chapitre, exercices 28 à 31.

**VIII — Reconnaître une suite arithmétique****Propriété 1 — Le test de la différence**

La suite  $(u_n)$  est arithmétique quand la différence entre un terme et le précédent est **toujours la même** :

$$u_{n+1} - u_n = r \quad (\text{un nombre, sans } n)$$

**Méthode 8 — Montrer qu'une suite est arithmétique, ou ne l'est pas****Exemples***(au tableau)*

- Les nombres 5 ; 9 ; 13 ; 17 peuvent-ils être les premiers termes d'une suite arithmétique ? Et 3 ; 6 ; 12 ; 24 ?
- Soit  $u_n = 4n - 1$ . Montrer que  $(u_n)$  est arithmétique.
- Soit  $v_n = n^2 + 2$ . La suite  $(v_n)$  est-elle arithmétique ?

**À vous de jouer**

Pour chaque suite, dire si elle est arithmétique ; si oui, donner sa raison et son premier terme :

$$a_n = 9 - 3n \quad b_n = 3n^2 \quad c_n = \frac{n+3}{2}$$

► **À faire** : fiche d'exercices du chapitre, exercices 32 à 34.

## IX — Terme général et variations d'une suite arithmétique

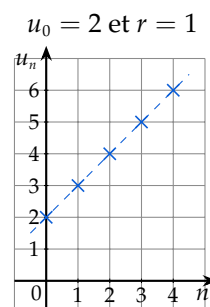
## Propriété 2 — Terme général

Si  $(u_n)$  est arithmétique, de premier terme  $u_0$  et de raison  $r$ , alors pour tout entier  $n$  :

$$u_n = u_0 + n \times r$$

De  $u_0$  à  $u_n$ , on ajoute  $n$  fois la raison.

Les points du graphique sont **alignés**, sur la droite d'équation  $y = u_0 + rx$  : c'est une **croissance linéaire**.

Si la suite commence à  $u_1$ 

De  $u_1$  à  $u_n$ , on ajoute  $(n - 1)$  fois la raison :  $u_n = u_1 + (n - 1) \times r$ .

## Propriété 3 — Sens de variation

Soit  $(u_n)$  une suite arithmétique de raison  $r$ .

- Si  $r > 0$ , la suite est **croissante**.
- Si  $r = 0$ , la suite est **constante**.
- Si  $r < 0$ , la suite est **décroissante**.

**Démonstration.**  $u_{n+1} - u_n = r$  : la différence a le signe de  $r$  (méthode 6).

## Méthode 9 — Utiliser le terme général d'une suite arithmétique

## Exemples

(au tableau)

- $(u_n)$  est arithmétique, avec  $u_0 = 9$  et  $r = -3$ . Exprimer  $u_n$  en fonction de  $n$ , calculer  $u_{40}$ , puis donner le sens de variation.
- Soit  $V_n = -4n + 10$ . Montrer que  $(V_n)$  est arithmétique, calculer  $V_{100}$ , puis donner le sens de variation.
- Un atelier produit 4 800 pièces en janvier, puis 120 pièces de plus chaque mois. On note  $u_1 = 4 800$  la production de janvier. Combien de pièces produit-il en décembre ?

## À vous de jouer

- $(a_n)$  est arithmétique, avec  $a_0 = -8$  et  $r = 5$ . Exprimer  $a_n$ , calculer  $a_{20}$ , puis donner le sens de variation.
- Le groupe électrogène de la méthode 7 :  $h_0 = 30$  et  $r = -2,5$ . Exprimer  $h_n$ , puis calculer le volume restant au bout de 8 heures.

► **À faire** : fiche d'exercices du chapitre, exercices 35 à 39.

## X — Suites géométriques

## Pour commencer

- On part de 3 et on multiplie par 2 à chaque étape : 3 ; 6 ; 12 ; 24 ; ... Donc  $u_0 = 3$  et  $u_{n+1} = 2 \times u_n$ .
- On part de 40 et on multiplie par 0,5 (on divise par 2) : 40 ; 20 ; 10 ; 5 ; ... Donc  $v_0 = 40$  et  $v_{n+1} = 0,5 \times v_n$ .

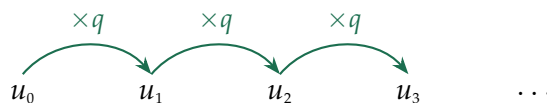
## Définition 7 — Suite géométrique

Une suite  $(u_n)$  est **géométrique** quand on passe d'un terme au suivant en **multipliant toujours par le même**

nombre  $q$ , strictement positif :

$$u_{n+1} = q \times u_n \quad \text{pour tout entier } n$$

Ce nombre  $q$  est la **raison** de la suite.



#### Propriété 4 — Évolution en pourcentage

- Augmenter de  $t\%$ , c'est multiplier par  $1 + \frac{t}{100}$ .
- Diminuer de  $t\%$ , c'est multiplier par  $1 - \frac{t}{100}$ .

Une quantité qui varie chaque année du **même pourcentage** forme donc une suite géométrique, dont la raison est ce coefficient multiplicateur.

#### Méthode 10 — Traduire une évolution en pourcentage par une suite géométrique

##### Exemples

(au tableau)

- Donner le coefficient multiplicateur de chaque évolution :  $+3\%$  ;  $-8\%$  ;  $+25\%$  ;  $-40\%$ .
- On place 800 € à  $3\%$  par an ;  $u_n$  est le capital après  $n$  années. Donner  $u_0$  et la relation de récurrence, puis calculer  $u_1$  et  $u_2$ .
- Un village de 2 000 habitants perd  $4\%$  de sa population chaque année ;  $P_n$  est la population après  $n$  années. Calculer  $P_1$  et  $P_2$ .

##### À vous de jouer

- Donner le coefficient multiplicateur :  $+12\%$  ;  $-6\%$  ;  $+50\%$ .
- Un vélo électrique acheté 1 500 € perd  $20\%$  de sa valeur chaque année ;  $v_n$  est sa valeur après  $n$  années. Donner  $v_0$ , la relation entre  $v_{n+1}$  et  $v_n$ , puis  $v_1$  et  $v_2$ .

► **À faire** : fiche d'exercices du chapitre, exercices 40 à 43.

## XI — Reconnaître une suite géométrique

#### Propriété 5 — Le test du quotient

La suite  $(u_n)$ , dont aucun terme n'est nul, est géométrique quand le quotient d'un terme par le précédent est **toujours le même** :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = q \quad (\text{un nombre, sans } n)$$

#### Méthode 11 — Montrer qu'une suite est géométrique, ou ne l'est pas

##### Exemples

(au tableau)

- Les nombres 2 ; 6 ; 18 ; 54 peuvent-ils être les premiers termes d'une suite géométrique ? Et 4 ; 8 ; 16 ; 30 ?
- Soit  $u_n = 3 \times 5^n$ . Montrer que  $(u_n)$  est géométrique.
- Soit  $v_n = 3n + 2$ . La suite  $(v_n)$  est-elle géométrique ?

##### À vous de jouer

Pour chaque suite, dire si elle est géométrique ; si oui, donner sa raison :

$$64 ; 16 ; 4 ; 1 \quad a_n = 6 \times 0,5^n \quad b_n = n^2 + 1$$

► **À faire** : fiche d'exercices du chapitre, exercices 44 à 47.

## XII — Terme général et variations d'une suite géométrique

### Propriété 6 — Terme général

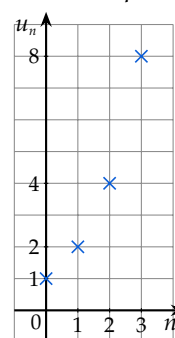
Si  $(u_n)$  est géométrique, de premier terme  $u_0$  et de raison  $q$ , alors pour tout entier  $n$  :

$$u_n = u_0 \times q^n$$

De  $u_0$  à  $u_n$ , on multiplie  $n$  fois par  $q$ .

Les points ne sont pas alignés : pour  $q > 1$ , ils montent de plus en plus vite. C'est une **croissance exponentielle**.

$u_0 = 1$  et  $q = 2$



### Si la suite commence à $u_1$

On multiplie  $(n - 1)$  fois par  $q$  :  $u_n = u_1 \times q^{n-1}$ .

### Propriété 7 — Sens de variation

Soit  $(u_n)$  une suite géométrique de raison  $q > 0$  et de premier terme  $u_0 > 0$ .

- Si  $q > 1$ , la suite est **croissante**.
- Si  $q = 1$ , la suite est **constante**.
- Si  $0 < q < 1$ , la suite est **décroissante**, et ses termes se rapprochent de 0.

**Démonstration.**  $u_{n+1} - u_n = q \times u_n - u_n = u_n \times (q - 1)$  ; les termes  $u_n$  sont positifs, donc la différence a le signe de  $q - 1$ .

### Méthode 12 — Utiliser le terme général d'une suite géométrique

#### Exemples

(au tableau)

- Le placement de la méthode 10 :  $u_0 = 800$  et  $q = 1,03$ . Exprimer  $u_n$  en fonction de  $n$ , calculer  $u_{10}$ , puis donner le sens de variation.
- Le village de la méthode 10 :  $P_0 = 2\,000$  et  $q = 0,96$ . Quelle sera sa population dans 10 ans ?
- Au bout de combien d'années le capital du a) aura-t-il doublé ?

#### À vous de jouer

- $(a_n)$  est géométrique, avec  $a_0 = 5$  et  $q = 2$ . Exprimer  $a_n$ , calculer  $a_6$ , puis donner le sens de variation.
- $(b_n)$  est géométrique, avec  $b_0 = 729$  et  $q = \frac{1}{3}$ . Calculer  $b_5$  et donner le sens de variation.
- Le vélo de la méthode 10 :  $v_n = 1\,500 \times 0,8^n$ . Au bout de combien d'années vaut-il moins de 500 € ?

► **À faire** : fiche d'exercices du chapitre, exercices 48 à 52.

### Bilan : arithmétique ou géométrie ?

|                       | <b>Arithmétique</b> (raison $r$ )           | <b>Géométrique</b> (raison $q > 0$ )            |
|-----------------------|---------------------------------------------|-------------------------------------------------|
| D'un terme au suivant | on ajoute $r$ : $u_{n+1} = u_n + r$         | on multiplie par $q$ : $u_{n+1} = q \times u_n$ |
| Terme général         | $u_n = u_0 + n \times r$                    | $u_n = u_0 \times q^n$                          |
| Croissante si         | $r > 0$                                     | $q > 1$ (avec $u_0 > 0$ )                       |
| Décroissante si       | $r < 0$                                     | $0 < q < 1$ (avec $u_0 > 0$ )                   |
| Graphique             | points alignés : <b>croissance linéaire</b> | <b>croissance exponentielle</b> (si $q > 1$ )   |