

SUITES NUMÉRIQUES

Cours — Première STI2D
Version élève

Comment utiliser ce cours

Chaque partie commence par ce qu'il faut **savoir** (définitions, propriétés), puis vient ce qu'il faut **savoir faire** : une méthode, avec des **exemples** faits en classe, puis des exercices « **À vous de jouer** » à chercher seul.
Sur cette feuille, seuls les **énoncés** des exemples figurent : la résolution, signalée par la mention (*au tableau*), est à rédiger dans le cahier.

I — Définition d'une suite

Pour commencer

Écrivons les nombres pairs à partir de 2 : 2 ; 4 ; 6 ; 8 ; 10 ; ... On leur donne un numéro, en commençant à 0 :

$u_0 = 2 \quad u_1 = 4 \quad u_2 = 6 \quad u_3 = 8 \quad u_4 = 10 \quad \dots$

Cette liste numérotée s'appelle une **suite**.

Définition 1 — Suite numérique

Une **suite** (u_n) associe un nombre u_n à chaque entier $n = 0, 1, 2, 3, \dots$

- Les nombres $u_0, u_1, u_2, \dots$ sont les **termes** de la suite.
- L'entier n est le **rang** du terme u_n (on lit « u indice n »).

Rang et position

Le premier terme est u_0 , le deuxième $u_1, \dots$: le 12^e terme est u_{11} . Le rang vaut toujours la position moins 1.

Méthode 1 — Lire les termes d'une suite donnée par une liste

Exemples

(au tableau)

Chaque liste donne les premiers termes d'une suite (u_n) , numérotée à partir de u_0 . Trouver comment on passe d'un terme au suivant, puis répondre.

- a) 6 ; 11 ; 16 ; 21 ; ... Donner u_0, u_4 et u_7 .
- b) 3 ; 6 ; 12 ; 24 ; ... Donner les deux termes suivants, puis u_5 .
- c) 2 ; 2 ; 4 ; 6 ; 10 ; ... Donner u_3 et u_6 .

À vous de jouer

Pour chaque suite, donner les deux termes suivants, puis u_2 et u_7 :

4 ; 10 ; 16 ; 22 ; ... 1 ; 4 ; 16 ; 64 ; ... 1 ; 4 ; 9 ; 16 ; 25 ; ...

► **À faire** : fiche d'exercices du chapitre, exercices 1 à 4.

II — Suites définies explicitement

Pour commencer

Louer un vélo électrique coûte 6 €, plus 3 € par heure. Pour n heures, on paie $p_n = 6 + 3n$ euros. Pour 4 heures : $p_4 = 6 + 3 \times 4 = 18$ €.

Définition 2 — Suite définie explicitement

Une suite est définie **explicitement** quand une formule donne u_n directement à partir de n , comme une fonction : $u_n = f(n)$. On calcule alors **n'importe quel terme** en remplaçant n par son rang.

Méthode 2 — Calculer des termes d'une suite définie explicitement

Exemples

(au tableau)

- a) Soit $u_n = 4n - 3$. Calculer les quatre premiers termes, puis u_{50} .
- b) Soit $v_n = 2n^2 + 1$. Calculer les quatre premiers termes, puis v_{10} .

À vous de jouer

Pour chaque suite, calculer les termes de rang 0, 1, 2 et 10 :

$a_n = 6n - 1 \quad b_n = n^2 - 3n \quad c_n = 50 - 2n^2$

Ne pas confondre u_{n+1} et $u_n + 1$

u_{n+1} est le terme **suivant** : on remplace n par $n + 1$ dans la formule. Avec $u_n = 3n$:

$u_{n+1} = 3(n + 1) = 3n + 3$ alors que $u_n + 1 = 3n + 1$

► **À faire** : fiche d'exercices du chapitre, exercices 5 à 9.

III — Suites définies par récurrence

Pour commencer

Tom a 30 € dans sa tirelire et y ajoute 12 € chaque semaine. On note u_n la somme après n semaines : $u_0 = 30$, et $u_{n+1} = u_n + 12$.

$u_1 = 30 + 12 = 42 \quad u_2 = 42 + 12 = 54 \quad u_3 = 54 + 12 = 66$

Chaque semaine se calcule avec la semaine d'avant.

Définition 3 — Suite définie par récurrence

Une suite est définie **par récurrence** quand on connaît :

- son **premier terme** u_0 ;
- une **relation** qui donne chaque terme à partir du **précédent** : u_{n+1} en fonction de u_n .

Méthode 3 — Calculer des termes d'une suite définie par récurrence

Exemples

(au tableau)

- a) Soit $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = 4u_n$. Calculer u_1, u_2 et u_3 .
- b) Soit $v_0 = 4$ et $v_{n+1} = 3v_n - 5$. Calculer v_1, v_2 et v_3 .

À vous de jouer

Calculer les trois termes qui suivent le premier :

$w_0 = 3$ et $w_{n+1} = 2w_n$ $t_0 = 5$ et $t_{n+1} = 2t_n - 4$

Remarque

Pour u_{15} , il faut d’abord u_{14} , donc $u_{13} \dots$: pour un rang élevé, on confie les calculs à un programme (partie suivante).

► À faire : fiche d’exercices du chapitre, exercices 10 à 15.

IV — Programmer une suite définie par récurrence

Le programme type

Pour une suite donnée par u_0 et une relation $u_{n+1} = \dots$, la fonction `suite(n)` renvoie u_n :

- la variable `u` reçoit le premier terme ;
- la boucle `for` refait n fois le calcul du terme suivant ;
- à la sortie de la boucle, `u` vaut u_n : `return u` le renvoie.

Méthode 4 — Calculer un terme de rang élevé avec Python

Exemples

a) Soit $u_0 = 4$ et $u_{n+1} = 3u_n - 5$. Écrire le programme, puis calculer u_{12} .

b) Une cuve contient 800 L d’eau. Chaque jour, on en utilise 20 %, puis on ajoute 100 L. Combien d’eau contient-elle au bout de 10 jours ?

À vous de jouer

Écrire le programme de la suite définie par $u_0 = 3$ et $u_{n+1} = 2u_n - 1$, puis donner u_{10} .

Quand la relation contient n

Dans la boucle, `i` joue le rôle de n : $t_{n+1} = -t_n + 3 + n$ s’écrit `u = -u + 3 + i`.

► À faire : fiche d’exercices du chapitre, exercices 16 à 19.

V — Représentation graphique d’une suite

Définition 4 — Représentation graphique

On représente une suite (u_n) par les points de coordonnées $(n ; u_n)$: le rang en abscisse, le terme en ordonnée. Les points **ne se relient pas** : il n’y a pas de terme entre deux rangs (pas de rang 2,5).

Méthode 5 — Représenter graphiquement une suite

Exemples

a) $u_n = n^2 - 5n + 4$

b) $w_0 = 2$ et $w_{n+1} = -w_n + 1$

À vous de jouer

Représenter les termes a_0 à a_5 de la suite $a_n = 6 - n$, puis les termes b_0 à b_4 de la suite définie par $b_0 = 16$ et

$$b_{n+1} = \frac{b_n}{2}.$$

► À faire : fiche d’exercices du chapitre, exercices 20 à 23.

VI — Sens de variation d’une suite

Définition 5 — Suite croissante, décroissante

- (u_n) est **croissante** si chaque terme est supérieur ou égal au précédent : $u_{n+1} \geq u_n$ pour tout n .
- (u_n) est **décroissante** si chaque terme est inférieur ou égal au précédent : $u_{n+1} \leq u_n$ pour tout n .
- (u_n) est **constante** si $u_{n+1} = u_n$ pour tout n .



Remarque

Une suite peut n’être **ni croissante, ni décroissante** : la suite (w_n) de la méthode 5, qui alterne entre 2 et -1 , en est un exemple. Les premiers termes ou le graphique donnent une idée du sens de variation, sans le **prouver**.

Méthode 6 — Étudier le sens de variation avec $u_{n+1} - u_n$

Exemples

Étudier le sens de variation de chaque suite.

a) $u_{n+1} = u_n - 4$

b) $w_n = 7 - 2n$

c) $v_n = n^2 + 4n$

d) $t_0 = 1$ et $t_{n+1} = t_n + n^2 + 2$

À vous de jouer

Étudier le sens de variation de chaque suite :

$a_n = 3n + 5$ $b_{n+1} = b_n - n - 1$ $c_n = n^2 + 3$ $d_n = 8 - 2n^2$

► À faire : fiche d’exercices du chapitre, exercices 24 à 27.

VII — Suites arithmétiques

Pour commencer

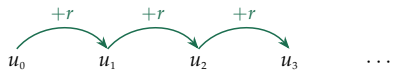
- On part de 2 et on ajoute 6 à chaque étape : 2 ; 8 ; 14 ; 20 ; ... Donc $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = u_n + 6$.
- On part de 10 et on enlève 3 à chaque étape : 10 ; 7 ; 4 ; 1 ; ... Donc $v_0 = 10$ et $v_{n+1} = v_n - 3$.

Définition 6 — Suite arithmétique

Une suite (u_n) est **arithmétique** quand on passe d'un terme au suivant en **ajoutant toujours le même nombre r** :

$$u_{n+1} = u_n + r$$
 pour tout entier n

Ce nombre r est la **raison** de la suite ; il est négatif quand on enlève.



Méthode 7 — Traduire une situation par une suite arithmétique

Exemples

(au tableau)

a) (u_n) est arithmétique, de premier terme $u_0 = -5$ et de raison 4. Écrire la relation de récurrence, puis calculer u_1 , u_2 et u_3 .

b) Louer une nacelle élévatrice coûte 40 € de forfait, puis 15 € par heure. On note p_n le prix pour n heures. Donner p_0 , la relation entre p_{n+1} et p_n , puis p_3 .

À vous de jouer

a) (b_n) est arithmétique, avec $b_0 = 12$ et $r = -1,5$. Calculer b_1 , b_2 et b_3 .

b) Le réservoir d'un groupe électrogène contient 30 L ; le groupe consomme 2,5 L par heure. On note h_n le volume restant après n heures. Donner h_0 , la relation entre h_{n+1} et h_n , puis h_4 .

► À faire : fiche d'exercices du chapitre, exercices 28 à 31.

VIII — Reconnaître une suite arithmétique

Propriété 1 — Le test de la différence

La suite (u_n) est arithmétique quand la différence entre un terme et le précédent est **toujours la même** :

$$u_{n+1} - u_n = r$$
 (un nombre, sans n)

Méthode 8 — Montrer qu'une suite est arithmétique, ou ne l'est pas

Exemples

(au tableau)

a) Les nombres 5 ; 9 ; 13 ; 17 peuvent-ils être les premiers termes d'une suite arithmétique ? Et 3 ; 6 ; 12 ; 24 ?

b) Soit $u_n = 4n - 1$. Montrer que (u_n) est arithmétique.

c) Soit $v_n = n^2 + 2$. La suite (v_n) est-elle arithmétique ?

À vous de jouer

Pour chaque suite, dire si elle est arithmétique ; si oui, donner sa raison et son premier terme :

$$a_n = 9 - 3n \quad b_n = 3n^2 \quad c_n = \frac{n+3}{2}$$

► À faire : fiche d'exercices du chapitre, exercices 32 à 34.

IX — Terme général et variations d'une suite arithmétique

Propriété 2 — Terme général

Si (u_n) est arithmétique, de premier terme u_0 et de raison r , alors pour tout entier n :

$$u_n = u_0 + n \times r$$

Si la suite commence à u_1

De u_1 à u_n , on ajoute $(n - 1)$ fois la raison : $u_n = u_1 + (n - 1) \times r$.

Propriété 3 — Sens de variation

Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r .

- Si $r > 0$, la suite est **croissante**.
- Si $r = 0$, la suite est **constante**.
- Si $r < 0$, la suite est **décroissante**.

Démonstration. $u_{n+1} - u_n = r$: la différence a le signe de r (méthode 6).

Méthode 9 — Utiliser le terme général d'une suite arithmétique

Exemples

(au tableau)

a) (u_n) est arithmétique, avec $u_0 = 9$ et $r = -3$. Exprimer u_n en fonction de n , calculer u_{40} , puis donner le sens de variation.

b) Soit $V_n = -4n + 10$. Montrer que (V_n) est arithmétique, calculer V_{100} , puis donner le sens de variation.

c) Un atelier produit 4 800 pièces en janvier, puis 120 pièces de plus chaque mois. On note $u_1 = 4 800$ la production de janvier. Combien de pièces produit-il en décembre ?

À vous de jouer

a) (a_n) est arithmétique, avec $a_0 = -8$ et $r = 5$. Exprimer a_n , calculer a_{20} , puis donner le sens de variation.

b) Le groupe électrogène de la méthode 7 : $h_0 = 30$ et $r = -2,5$. Exprimer h_n , puis calculer le volume restant au bout de 8 heures.

► À faire : fiche d'exercices du chapitre, exercices 35 à 39.

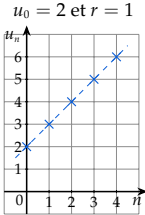
X — Suites géométriques

Pour commencer

- On part de 3 et on multiplie par 2 à chaque étape : 3 ; 6 ; 12 ; 24 ; ... Donc $u_0 = 3$ et $u_{n+1} = 2 \times u_n$.
- On part de 40 et on multiplie par 0,5 (on divise par 2) : 40 ; 20 ; 10 ; 5 ; ... Donc $v_0 = 40$ et $v_{n+1} = 0,5 \times v_n$.

Définition 7 — Suite géométrique

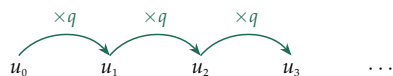
Une suite (u_n) est **géométrique** quand on passe d'un terme au suivant en **multipliant toujours par le même**



nombre q , strictement positif :

$$u_{n+1} = q \times u_n \quad \text{pour tout entier } n$$

Ce nombre q est la **raison** de la suite.



Propriété 4 — Évolution en pourcentage

- Augmenter de $t\%$, c'est multiplier par $1 + \frac{t}{100}$.
- Diminuer de $t\%$, c'est multiplier par $1 - \frac{t}{100}$.

Une quantité qui varie chaque année du **même pourcentage** forme donc une suite géométrique, dont la raison est ce coefficient multiplicateur.

Méthode 10 — Traduire une évolution en pourcentage par une suite géométrique

Exemples

(au tableau)

- Donner le coefficient multiplicateur de chaque évolution : $+3\%$; -8% ; $+25\%$; -40% .
- On place 800 € à 3 % par an ; u_n est le capital après n années. Donner u_0 et la relation de récurrence, puis calculer u_1 et u_2 .
- Un village de 2000 habitants perd 4 % de sa population chaque année ; P_n est la population après n années. Calculer P_1 et P_2 .

À vous de jouer

- Donner le coefficient multiplicateur : $+12\%$; -6% ; $+50\%$.
- Un vélo électrique acheté 1 500 € perd 20 % de sa valeur chaque année ; v_n est sa valeur après n années. Donner v_0 , la relation entre v_{n+1} et v_n , puis v_1 et v_2 .

► **À faire** : fiche d'exercices du chapitre, exercices 40 à 43.

XI — Reconnaître une suite géométrique

Propriété 5 — Le test du quotient

La suite (u_n) , dont aucun terme n'est nul, est géométrique quand le quotient d'un terme par le précédent est **toujours le même** :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = q \quad (\text{un nombre, sans } n)$$

Méthode 11 — Montrer qu'une suite est géométrique, ou ne l'est pas

Exemples

(au tableau)

- Les nombres 2 ; 6 ; 18 ; 54 peuvent-ils être les premiers termes d'une suite géométrique ? Et 4 ; 8 ; 16 ; 30 ?
- Soit $u_n = 3 \times 5^n$. Montrer que (u_n) est géométrique.
- Soit $v_n = 3n + 2$. La suite (v_n) est-elle géométrique ?

À vous de jouer

Pour chaque suite, dire si elle est géométrique ; si oui, donner sa raison :

$$64 ; 16 ; 4 ; 1 \quad a_n = 6 \times 0,5^n \quad b_n = n^2 + 1$$

► **À faire** : fiche d'exercices du chapitre, exercices 44 à 47.

XII — Terme général et variations d'une suite géométrique

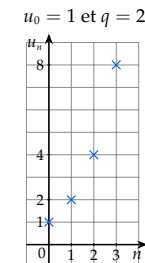
Propriété 6 — Terme général

Si (u_n) est géométrique, de premier terme u_0 et de raison q , alors pour tout entier n :

$$u_n = u_0 \times q^n$$

De u_0 à u_n , on multiplie n fois par q .

Les points ne sont pas alignés : pour $q > 1$, ils montent de plus en plus vite. C'est une **croissance exponentielle**.



Si la suite commence à u_1

On multiplie $(n - 1)$ fois par q : $u_n = u_1 \times q^{n-1}$.

Propriété 7 — Sens de variation

Soit (u_n) une suite géométrique de raison $q > 0$ et de premier terme $u_0 > 0$.

- Si $q > 1$, la suite est **croissante**.
- Si $q = 1$, la suite est **constante**.
- Si $0 < q < 1$, la suite est **décroissante**, et ses termes se rapprochent de 0.

Démonstration. $u_{n+1} - u_n = q \times u_n - u_n = u_n \times (q - 1)$; les termes u_n sont positifs, donc la différence a le signe de $q - 1$.

Méthode 12 — Utiliser le terme général d'une suite géométrique

Exemples

(au tableau)

- Le placement de la méthode 10 : $u_0 = 800$ et $q = 1,03$. Exprimer u_n en fonction de n , calculer u_{10} , puis donner le sens de variation.
- Le village de la méthode 10 : $P_0 = 2000$ et $q = 0,96$. Quelle sera sa population dans 10 ans ?
- Au bout de combien d'années le capital du a) aura-t-il doublé ?

À vous de jouer

- (a_n) est géométrique, avec $a_0 = 5$ et $q = 2$. Exprimer a_n , calculer a_6 , puis donner le sens de variation.
- (b_n) est géométrique, avec $b_0 = 729$ et $q = \frac{1}{3}$. Calculer b_5 et donner le sens de variation.
- Le vélo de la méthode 10 : $v_n = 1500 \times 0,8^n$. Au bout de combien d'années vaut-il moins de 500 € ?

► **À faire** : fiche d'exercices du chapitre, exercices 48 à 52.

Bilan : arithmétique ou géométrique ?

	Arithmétique (raison r)	Géométrique (raison $q > 0$)
D'un terme au suivant	on ajoute r : $u_{n+1} = u_n + r$	on multiplie par q : $u_{n+1} = q \times u_n$
Terme général	$u_n = u_0 + n \times r$	$u_n = u_0 \times q^n$
Croissante si	$r > 0$	$q > 1$ (avec $u_0 > 0$)
Décroissante si	$r < 0$	$0 < q < 1$ (avec $u_0 > 0$)
Graphique	points alignés : croissance linéaire	croissance exponentielle (si $q > 1$)