

CORRIGÉ — DÉRIVATION ET ÉTUDE DE FONCTIONS

Chapitre 5 : fiche d'exercices — Première STI2D

Les résultats sont encadrés ; les remarques en bleu signalent les erreurs fréquentes. Pour dériver, on écrit d'abord u, u' (et v, v'), puis la formule, puis on remplace.

I) Fonctions affines et droites

Exercice 1 — Coefficient directeur

- a) $m = \frac{8-2}{3-1} = \boxed{3}$
- b) $m = \frac{-2-4}{2-(-1)} = \boxed{-2}$ ($-\frac{6}{3}$)
- c) $m = \frac{-1-(-3)}{4-0} = \boxed{\frac{1}{2}}$ ($\frac{2}{4}$)
- d) $m = \frac{5-5}{1-(-3)} = \boxed{0}$: la droite est horizontale.

Exercice 2 — Équation d'une droite

- a) $m = \frac{4-1}{2-1} = 3$. La droite passe par $A(1;1)$:
 $3 \times 1 + p = 1$
 $p = -2$
 $\boxed{y = 3x - 2}$
- b) $m = \frac{1-5}{1-(-1)} = -2$; avec $A : -2 \times (-1) + p = 5$,
donc $p = 3$: $\boxed{y = -2x + 3}$
- c) $m = \frac{5-(-3)}{2-(-2)} = 2$; avec $A : 2 \times (-2) + p = -3$,
donc $p = 1$: $\boxed{y = 2x + 1}$
- d) $m = \frac{2-0}{6-2} = \frac{1}{2}$; avec $A : \frac{1}{2} \times 2 + p = 0$, donc
 $p = -1$: $\boxed{y = \frac{1}{2}x - 1}$

On trouve m d'abord, puis p avec un des deux points.

Exercice 3 — Une fonction affine par deux images

- 1°) $f(x) = mx + p$ passe par $(2;7)$ et $(-1;-2)$:
 $m = \frac{7-(-2)}{2-(-1)} = 3$.
 $3 \times 2 + p = 7$
 $p = 1$
 $\boxed{f(x) = 3x + 1}$ et $f(10) = 30 + 1 = \boxed{31}$.
- 2°) $m = \frac{0-8}{1-(-3)} = -2$; $-2 \times 1 + p = 0$, donc $p = 2$:
 $\boxed{g(x) = -2x + 2}$ et $g(5) = -10 + 2 = \boxed{-8}$.

Exercice 4 — Lire des équations

On lit p sur l'axe des ordonnées, puis on avance de 1 et on regarde de combien on monte.

- a) $(d_1) : p = -1$, on monte de 2 : $\boxed{y = 2x - 1}$
- b) $(d_2) : p = 3$, on descend de 1 : $\boxed{y = -x + 3}$
- c) $(d_3) : p = -2$, en avançant de 2 on monte de 1 :
 $\boxed{y = \frac{1}{2}x - 2}$

II) Nombre dérivé

Exercice 5 — Nombre dérivé en 1

- a) $f(1) = 1 + 2 - 1 = \boxed{2}$
 $f(1+h) = (1+h)^2 + 2(1+h) - 1$
 $f(1+h) = 1 + 2h + h^2 + 2 + 2h - 1$
 $f(1+h) = \boxed{h^2 + 4h + 2}$
- b)
 $T(h) = \frac{h^2 + 4h + 2 - 2}{h}$
 $T(h) = \frac{h(h+4)}{h}$
 $T(h) = \boxed{h+4}$
- c) Quand h se rapproche de 0, $h+4$ se rapproche de 4 :
 $\boxed{f'(1) = 4}$.

Exercice 6 — Nombre dérivé en 2

- $g(2) = 8 - 6 = 2$.
 $g(2+h) = 2(2+h)^2 - 3(2+h)$
 $g(2+h) = 8 + 8h + 2h^2 - 6 - 3h$
 $g(2+h) = 2h^2 + 5h + 2$
 $T(h) = \frac{2h^2 + 5h}{h}$
 $T(h) = 2h + 5$
 $\boxed{g'(2) = 5}$
- $2(2+h)^2 = 2(4 + 4h + h^2)$: on développe le carré avant de multiplier par 2.

Exercice 7 — Avec un coefficient négatif

$$k(1) = -1 + 5 = 4.$$

$$k(1+h) = -(1+h)^2 + 5(1+h)$$

$$k(1+h) = -1 - 2h - h^2 + 5 + 5h$$

$$k(1+h) = -h^2 + 3h + 4$$

$$T(h) = \frac{-h^2 + 3h}{h}$$

$$T(h) = -h + 3$$

$$k'(1) = 3$$

$-(1+h)^2$: le signe $-$ porte sur les trois termes du développement.

Exercice 8 — À la calculatrice

h	1	0,1	0,01
$T(h)$	9	8,1	8,01

Par exemple $T(0,1) = \frac{16,81 - 16}{0,1} = 8,1$. Le tableau suggère $f'(4) = 8$.

III) Tangente à une courbe
Exercice 9 — Lire des nombres dérivés

On part du point, on avance de 1 et on lit de combien la tangente monte.

$$f'(-3) = -2$$

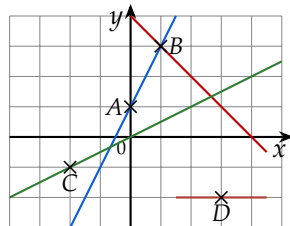
$$f'(-1) = 0 \text{ (horizontale)}$$

$$f'(1) = 2$$

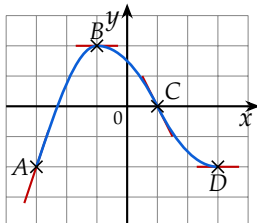
$$f'(4) = -2$$

Exercice 10 — Tracer des tangentes

A : on avance de 1, on monte de 2.
 B : on avance de 1, on descend de 1.
 C : on avance de 2, on monte de 1.
 D : tangente horizontale.


Exercice 11 — Retrouver l'allure d'une courbe

On trace d'abord un petit morceau de chaque tangente, puis la courbe, qui les « touche » en A, B, C et D : un maximum en B, un minimum en D.


IV) Équation de la tangente
Exercice 12 — Avec un nombre dérivé admis

$$a) f(4) = 16 - 12 + 2 = 6.$$

$$y = f'(4)(x-4) + f(4)$$

$$y = 5(x-4) + 6$$

$$y = 5x - 20 + 6$$

$$y = 5x - 14$$

$$b) f(1) = 1 - 3 + 2 = 0.$$

$$y = -1(x-1) + 0$$

$$y = -x + 1$$

Exercice 13 — Quatre tangentes

On remplace dans $y = f'(a)(x-a) + f(a)$.

$$a) y = 1(x-2) + 3, \text{ soit } y = x + 1$$

$$b) y = -2(x+1) + 4, \text{ soit } y = -2x + 2$$

$$c) y = 0(x-3) - 1, \text{ soit } y = -1 \text{ (horizontale)}$$

$$d) y = -3(x-0) + 5, \text{ soit } y = -3x + 5$$

b) $x-a = x-(-1) = x+1$: attention au signe.

Exercice 14 — Du taux de variation à la tangente

$$a) f(2) = -4 + 6 + 1 = 3$$

$$f(2+h) = -(2+h)^2 + 3(2+h) + 1$$

$$f(2+h) = -4 - 4h - h^2 + 6 + 3h + 1$$

$$f(2+h) = -h^2 - h + 3$$

b)

$$T(h) = \frac{-h^2 - h + 3 - 3}{h}$$

$$T(h) = \frac{h(-h-1)}{h}$$

$$T(h) = -h - 1$$

Quand h se rapproche de 0 : $f'(2) = -1$.

c)

$$y = -1(x-2) + 3$$

$$y = -x + 5$$

V) Approximation affine
Exercice 15 — Le carré de 3,02

a) 3,02 est proche de 3 : on remplace x par 3,02 dans $6x - 9$.

$$f(3,02) \simeq 6 \times 3,02 - 9$$

$$f(3,02) \simeq 9,12$$

Valeur exacte : $3,02^2 = 9,1204$; écart de 0,0004.

$$b) f(2,99) \simeq 6 \times 2,99 - 9 = 8,94 ; \text{ exacte : } 8,9401.$$

Exercice 16 — Une fonction inverse

$$a) f(2) = \frac{1}{2-1} = 1.$$

$$y = -1(x-2) + 1$$

$$y = -x + 3$$

- b) $f(2,1) \simeq -2,1 + 3 = 0,9$
c) $f(2,1) = \frac{1}{1,1} \simeq 0,909$: écart d'environ 0,009.

Exercice 17 — Une plaque qui se dilate

- a) $A(10) = 100$.
 $y = 20(x - 10) + 100$
 $y = 20x - 100$
b) $A(10,1) \simeq 20 \times 10,1 - 100 = 102 \text{ cm}^2$
c) $10,1^2 = 102,01 \text{ cm}^2$: l'approximation ne se trompe que de $0,01 \text{ cm}^2$.

VI) Fonction dérivée d'une fonction polynôme

Exercice 18 — Dériver

- a) $f'(x) = 7$ e) $m'(x) = -10x + 10$
b) $g'(x) = -4$ f) $p'(x) = 3x^2 + 8x - 1$
c) $h'(x) = 2x + 6$ g) $q'(x) = 8x^3 - 6x$
d) $k'(x) = 6x - 1$ h) $r'(x) = -5x^4 + 6x^2$

Un nombre seul (le -5 de $7x - 5$) a pour dérivée 0.

Exercice 19 — Degré 3 et plus

- a) $f'(x) = 4 \times 3x^2 - 6 \times 2x + 5 = 12x^2 - 12x + 5$
b) $g'(x) = 6x^5 - 4x^3$
c) $h'(x) = -10x^4 + 3x^2 - 7$
d) $k'(x) = -12x^3$
e) $m'(x) = \frac{1}{3} \times 3x^2 - 2 = x^2 - 2$

Exercice 20 — Entraînement

- a) $f'(x) = 6$ e) $m'(x) = -12x^3 + 6$
b) $g'(x) = -2x + 4$ f) $p'(x) = 10x^4 - 10x$
c) $h'(x) = 15x^2 - 4x$ g) $q'(x) = x + 3$
d) $k'(x) = 4x^3 + 3x^2 + 2x + 1$
h) $r'(x) = x^3 - 1$
g) $\frac{1}{2} \times 2x = x$; h) $\frac{1}{4} \times 4x^3 = x^3$.

Exercice 21 — Développer d'abord

- a) $A(x) = x^2 + 3x - 4$, donc $A'(x) = 2x + 3$
b) $B(x) = 2x^2 - 5x - 3$, donc $B'(x) = 4x - 5$
c) $C(x) = x^2 + 4x + 4$, donc $C'(x) = 2x + 4$
d) $D(x) = x^3 - 5x$, donc $D'(x) = 3x^2 - 5$

Exercice 22 — Dérivée et tangentes

- a) $f'(x) = 3x^2 - 2$
b) $f(1) = 1 - 2 + 1 = 0$ et $f'(1) = 3 - 2 = 1$.

$$y = 1(x - 1) + 0$$

$$y = x - 1$$

- c) $f(0) = 1$ et $f'(0) = -2$: $y = -2(x - 0) + 1$, soit
 $y = -2x + 1$.

VII) Autres fonctions dérivées

Exercice 23 — Inverse, cosinus, sinus

- a) $f'(x) = -\frac{4}{x^2}$ b) $g'(x) = \frac{7}{x^2}$
c) $h'(x) = -\sin x + 3$ d) $k'(x) = 5 \cos x$
e) $m'(x) = -2 \sin x - 3 \cos x$
f) $p'(x) = 4x^3 + \frac{1}{x^2}$ g) $q'(x) = -\frac{6}{x^2} + 4x$
h) $r'(x) = -\cos x + 3x^2$

Seule la dérivée de $\cos x$ porte un signe $-$: $(\cos x)' = -\sin x$.

Exercice 24 — Entraînement

- a) $f'(x) = -\frac{3}{x^2} + 1$ b) $g'(x) = -4 \sin x + 2x$
c) $h'(x) = -2 \cos x$ d) $k'(x) = 3x^2 + \frac{5}{x^2}$
e) $m'(x) = \cos x + \sin x$ f) $p'(x) = -\frac{1}{x^2} + 3 \sin x$
e) $-\cos x$ a pour dérivée $-(-\sin x) = \sin x$.

Exercice 25 — Tangentes à la courbe de $\frac{2}{x}$

- a) $f'(x) = 2 \times \left(-\frac{1}{x^2}\right) = -\frac{2}{x^2}$
b) $f(1) = 2$ et $f'(1) = -2$.
 $y = -2(x - 1) + 2$
 $y = -2x + 4$
c) $f(2) = 1$ et $f'(2) = -\frac{2}{4} = -\frac{1}{2}$.
 $y = -\frac{1}{2}(x - 2) + 1$
 $y = -\frac{1}{2}x + 2$

Exercice 26 — Sinus et cosinus près de 0

- a) $f'(x) = \cos x$, donc $f'(0) = \cos 0 = 1$;
 $f(0) = \sin 0 = 0$.
 $y = 1(x - 0) + 0$
 $y = x$
b) $\sin(0,1) \simeq 0,1$; la calculatrice donne 0,0998...
c) $g'(x) = -\sin x$, donc $g'(0) = 0$: la tangente est horizontale, d'équation $y = 1$ (car $g(0) = 1$).

VIII) Dérivée d'un produit, d'un carré

Exercice 27 — Des carrés

On écrit u et u' , puis $2 \times u' \times u$.

a) $u = 4x + 1, u' = 4 :$

$$f'(x) = 2 \times 4 \times (4x + 1) = \boxed{32x + 8}$$

b) $u = 2 - 5x, u' = -5 :$

$$g'(x) = 2 \times (-5)(2 - 5x) = \boxed{50x - 20}$$

c) $u = x^2 + 3, u' = 2x :$

$$h'(x) = 2 \times 2x(x^2 + 3) = \boxed{4x^3 + 12x}$$

d) $u = x^3 - 1, u' = 3x^2 :$

$$k'(x) = 2 \times 3x^2(x^3 - 1) = \boxed{6x^5 - 6x^2}$$

Exercice 28 — Des produits

a) $u = x + 2, u' = 1; v = 3x - 1, v' = 3.$

$$f'(x) = 1 \times (3x - 1) + (x + 2) \times 3$$

$$f'(x) = 3x - 1 + 3x + 6$$

$$f'(x) = \boxed{6x + 5}$$

b) $u' = 2; v' = 2x.$

$$g'(x) = 2(x^2 + 1) + (2x - 3) \times 2x$$

$$g'(x) = 2x^2 + 2 + 4x^2 - 6x$$

$$g'(x) = \boxed{6x^2 - 6x + 2}$$

c) $u = x^2, u' = 2x; v = 4x + 5, v' = 4 :$

$$h'(x) = 2x(4x + 5) + 4x^2 = \boxed{12x^2 + 10x}$$

d) $u' = 2x - 1; v' = 2x.$

$$k'(x) = (2x - 1)(x^2 + 2) + (x^2 - x) \times 2x$$

$$k'(x) = 2x^3 + 4x - x^2 - 2 + 2x^3 - 2x^2$$

$$k'(x) = \boxed{4x^3 - 3x^2 + 4x - 2}$$

e) $u = x, u' = 1; v = \sin x, v' = \cos x :$

$$m'(x) = \boxed{\sin x + x \cos x}$$

Exercice 29 — Entraînement

a) $f'(x) = 3(x - 2) + (3x + 1) \times 1 = \boxed{6x - 5}$

b) $g'(x) = 2 \times 1 \times (x + 5) = \boxed{2x + 10}$

c) $h'(x) = 2x(2x + 3) + (x^2 - 4) \times 2 = \boxed{6x^2 + 6x - 8}$

d) $k'(x) = 2 \times (-2x)(3 - x^2) = \boxed{4x^3 - 12x}$

e) $m'(x) = \boxed{2x \cos x - x^2 \sin x}$

f) $p'(x) = 2(x^3 + x) + (2x - 1)(3x^2 + 1) = \boxed{8x^3 - 3x^2 + 4x - 1}$

Exercice 30 — Deux façons de faire

a) $u = x + 3, u' = 1; v = 2x - 1, v' = 2.$

$$f'(x) = 1 \times (2x - 1) + (x + 3) \times 2$$

$$f'(x) = \boxed{4x + 5}$$

b) $f(x) = 2x^2 - x + 6x - 3 = 2x^2 + 5x - 3$, donc

$$f'(x) = \boxed{4x + 5}.$$

c) Les deux résultats sont **égaux** : développer permet de vérifier.

La dérivée d'un produit n'est pas le produit des dérivées :

$1 \times 2 = 2$ serait faux.

IX) Dérivée de l'inverse, d'un quotient

Exercice 31 — Des inverses

On écrit v et v' , puis $-\frac{v'}{v^2}$.

a) $v' = 3 : f'(x) = \boxed{-\frac{3}{(3x + 2)^2}}$

b) $v' = -4 : g'(x) = -\frac{-4}{(1 - 4x)^2} = \boxed{\frac{4}{(1 - 4x)^2}}$

c) $v' = 2x : h'(x) = \boxed{-\frac{2x}{(x^2 + 1)^2}}$

d) $k(x) = 5 \times \frac{1}{2x - 1}, v' = 2 : k'(x) = \boxed{-\frac{10}{(2x - 1)^2}}$

Exercice 32 — Des quotients

a) $u = x + 4, u' = 1; v = x - 1, v' = 1.$

$$f'(x) = \frac{1 \times (x - 1) - (x + 4) \times 1}{(x - 1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{x - 1 - x - 4}{(x - 1)^2}$$

$$f'(x) = \boxed{-\frac{5}{(x - 1)^2}}$$

b) $g'(x) = \frac{2(x + 2) - (2x - 1)}{(x + 2)^2} = \boxed{\frac{5}{(x + 2)^2}}$

c) $h'(x) = \frac{3(x + 1) - 3x}{(x + 1)^2} = \boxed{\frac{3}{(x + 1)^2}}$

d) $u' = 2x; v' = 1.$

$$k'(x) = \frac{2x(x - 2) - (x^2 + 1)}{(x - 2)^2}$$

$$k'(x) = \frac{2x^2 - 4x - x^2 - 1}{(x - 2)^2}$$

$$k'(x) = \boxed{\frac{x^2 - 4x - 1}{(x - 2)^2}}$$

Des parenthèses autour de $u(x)$: le $-$ porte sur tout le terme.

Exercice 33 — Entraînement

a) $f'(x) = \boxed{-\frac{1}{(x + 5)^2}}$

b) $g'(x) = 3 \times \left(-\frac{4}{(4x - 1)^2}\right) = \boxed{-\frac{12}{(4x - 1)^2}}$

c) $h'(x) = \frac{(x + 2) - (x - 3)}{(x + 2)^2} = \boxed{\frac{5}{(x + 2)^2}}$

d) $k'(x) = \frac{8x - 12 - 8x - 2}{(2x - 3)^2} = \boxed{\frac{-14}{(2x - 3)^2}}$
(numérateur : $4(2x - 3) - (4x + 1) \times 2$)

$$e) m'(x) = 2 \times \left(-\frac{2x}{(x^2+4)^2} \right) = -\frac{4x}{(x^2+4)^2}$$

$$f) p'(x) = \frac{2x(x+1) - x^2}{(x+1)^2} = \frac{x^2+2x}{(x+1)^2}$$

Exercice 34 — Quotient et tangente

$$a) u = 2x + 1, u' = 2; v = x - 1, v' = 1.$$

$$f'(x) = \frac{2(x-1) - (2x+1) \times 1}{(x-1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{2x - 2 - 2x - 1}{(x-1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{-3}{(x-1)^2}$$

$$b) f(2) = \frac{5}{1} = 5 \text{ et } f'(2) = \frac{-3}{1} = -3.$$

$$y = -3(x-2) + 5$$

$$y = -3x + 11$$

X) Fonctions composées
Exercice 35 — Des puissances

On écrit u, u' et n , puis $n \times u' \times u^{n-1}$.

$$a) u' = 3, n = 4 : f'(x) = 12(3x-2)^3$$

$$b) u' = 2x, n = 3 : g'(x) = 6x(x^2+1)^2$$

$$c) u' = -2, n = 5 : h'(x) = -10(1-2x)^4$$

$$d) u' = 3x^2 + 1, n = 2 : k'(x) = 2(3x^2+1)(x^3+x)$$

Exercice 36 — Cosinus et sinus composés

$$a) u = 4x, u' = 4 : f'(x) = -4 \sin(4x)$$

$$b) u' = 2 : g'(x) = 2 \cos(2x+3)$$

$$c) u' = 5 : h'(x) = 3 \times (-5) \sin(5x-1) = -15 \sin(5x-1)$$

$$d) u' = 100 : k'(t) = 2 \times 100 \cos(100t) = 200 \cos(100t)$$

Exercice 37 — Entraînement

$$a) f'(x) = 3 \times 5(5x+2)^2 = 15(5x+2)^2$$

$$b) g'(x) = 4(2x-3)(x^2-3x)^3$$

$$c) h'(x) = -3 \sin(3x-2)$$

$$d) u = x^2, u' = 2x : k'(x) = 4 \times 2x \cos(x^2) = 8x \cos(x^2)$$

$$e) m'(t) = 5 \times (-100) \sin(100t+1) = -500 \sin(100t+1)$$

$$f) u' = -1 : p'(x) = -6(2-x)^5$$

Exercice 38 — Un piston

$$a) u = 2t, u' = 2 :$$

$$p'(t) = 6 \times (-2) \sin(2t) = -12 \sin(2t)$$

b) $p'(0) = -12 \sin 0 = 0 \text{ cm/s}$: au départ, le piston est immobile.

c) $\sin(2t)$ est entre -1 et 1 , donc $p'(t)$ est entre -12 et 12 : au plus 12 cm/s .

Exercice 39 — Dérivées en vrac

$$a) \text{ Somme : } f'(x) = 12x^3 + \frac{2}{x^2}$$

$$b) \text{ Produit : } g'(x) = 2x(x-3) + (x^2+1) = 3x^2 - 6x + 1$$

$$c) \text{ Puissance : } h'(x) = 3 \times 2(2x+5)^2 = 6(2x+5)^2$$

$$d) \text{ Inverse : } k'(x) = 4 \times \left(-\frac{2x}{(x^2+3)^2} \right) = -\frac{8x}{(x^2+3)^2}$$

$$e) \text{ Quotient : } m'(x) = \frac{(x^2+1) - (x-1) \times 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{-x^2+2x+1}{(x^2+1)^2}$$

$$f) \text{ Produit : } p'(x) = \cos x - x \sin x$$

XI) Dérivée et sens de variation
Exercice 40 — Du signe de f' aux variations

$f'(x) < 0$: f décroît ; $f'(x) > 0$: f croît.

x	-4	-1	3	5	
$f'(x)$	-	0	+	0	-
$f(x)$	2		4		1

Exercice 41 — Un trinôme

a) $f'(x) = 2x-6$; $2x-6=0$ pour $x=3$. Affine de coefficient $2 > 0$: négatif avant 3, positif après.

b) $f(0) = 5$; $f(3) = 9 - 18 + 5 = -4$; $f(6) = 36 - 36 + 5 = 5$.

x	0	3	6
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	5	-4	5

Exercice 42 — Un polynôme de degré 3

$$a) f'(x) = 3x^2 - 6x$$

$$b) a = 3, b = -6, c = 0.$$

$$\Delta = (-6)^2 - 4 \times 3 \times 0$$

$$\Delta = 36$$

$$x_1 = \frac{6-6}{6} = 0$$

$$x_2 = \frac{6+6}{6} = 2$$

Du signe de $a = 3 > 0$ à l'extérieur des racines.

$$c) f(-1) = -1 - 3 + 1 = -3; f(0) = 1;$$

$$f(2) = 8 - 12 + 1 = -3; f(3) = 27 - 27 + 1 = 1.$$

x	-1	0	2	3	
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	-3	1	-3	1	

Plus rapide : $3x^2 - 6x = 3x(x - 2)$, racines 0 et 2.

Exercice 43 — Un coefficient négatif

$$a) g'(x) = -6x^2 + 6x + 12$$

b)

$$\Delta = 6^2 - 4 \times (-6) \times 12$$

$$\Delta = 324$$

$$x_1 = \frac{-6+18}{-12} = -1$$

$$x_2 = \frac{-6-18}{-12} = 2$$

Du signe de $a = -6 < 0$ (négatif) à l'extérieur des racines, positif entre elles.

$$c) g(-2) = 16 + 12 - 24 - 5 = -1;$$

$$g(-1) = 2 + 3 - 12 - 5 = -12;$$

$$g(2) = -16 + 12 + 24 - 5 = 15;$$

$$g(3) = -54 + 27 + 36 - 5 = 4.$$

x	-2	-1	2	3	
$g'(x)$	-	0	+	0	-
$g(x)$	-1	-12	15	4	

Exercice 44 — Un quotient

$$a) u = 2x + 1, u' = 2; v = x + 1, v' = 1.$$

$$f'(x) = \frac{2(x+1) - (2x+1) \times 1}{(x+1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{2x+2-2x-1}{(x+1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{1}{(x+1)^2}$$

b) Un carré est positif : $f'(x) > 0$, donc f est **croissante** sur $[0; 4]$. $f(0) = 1$ et $f(4) = \frac{9}{5}$.

x	0	4
$f'(x)$	+	
$f(x)$	1	$\frac{9}{5}$

Exercice 45 — Étude complète et tracé

$$a) f'(x) = 3x^2 - 3; \Delta = 0 - 4 \times 3 \times (-3) = 36, \text{ racines } \frac{0 \pm 6}{6} : -1 \text{ et } 1. \text{ Positif à l'extérieur } (a = 3 > 0).$$

$$b) f(-2) = -2; f(-1) = 2; f(1) = -2; f(2) = 2.$$

x	-2	-1	1	2	
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	-2	$\nearrow$ 2	$\searrow$	-2	$\nearrow$ 2

$$c) f(0) = 0 \text{ et } f'(0) = -3 : y = -3x.$$

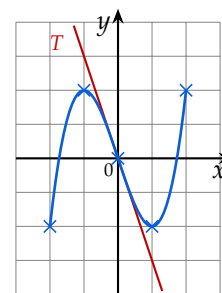
d) Valeurs :

$$f(-2) = -2; f(-1) = 2;$$

$$f(0) = 0; f(1) = -2;$$

$$f(2) = 2.$$

e) Tangentes horizontales en -1 et en 1.



XII) Problèmes concrets : maximum et minimum

Exercice 46 — Un coût minimal

$$a) C'(q) = 2q - 30$$

b) $2q - 30 = 0$ pour $q = 15$; coefficient $2 > 0$: négatif puis positif. $C(0) = 300$;

$$C(15) = 225 - 450 + 300 = 75;$$

$$C(25) = 625 - 750 + 300 = 175.$$

q	0	15	25
$C'(q)$	-	0	+
$C(q)$	300	75	175

c) Coût minimal de **75 €** pour $q = 15$, soit **150** pièces.

q compte des dizaines : 15 dizaines font 150 pièces.

Exercice 47 — La boîte la plus grande

$$a) (12 - 2x)^2 = 144 - 48x + 4x^2, \text{ donc } V(x) = x(4x^2 - 48x + 144) = 4x^3 - 48x^2 + 144x.$$

$$b) V'(x) = 12x^2 - 96x + 144$$

c)

$$\Delta = 96^2 - 4 \times 12 \times 144$$

$$\Delta = 2\,304$$

$$x_1 = \frac{96 - 48}{24} = 2$$

$$x_2 = \frac{96 + 48}{24} = 6$$

$a = 12 > 0$: positif sur $[0; 2]$, négatif sur $[2; 6]$.

d) $V(0) = 0$; $V(2) = 2 \times 8^2 = 128$; $V(6) = 0$.

x	0	2	6		
$V'(x)$		+	0	-	0
$V(x)$	0	$\nearrow$	128	$\searrow$	0

e) Volume maximal de 128 cm^3 pour $x = 2 \text{ cm}$.

x	-4	-2	2	4			
$g'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$		
$g(x)$	-16	$\nearrow$	16	$\searrow$	-16	$\nearrow$	16

c) Sur chacun des trois intervalles, g varie dans un seul sens entre -16 et 16 , et 5 est entre les deux : 3 solutions.

d) La plus grande est dans $]2; 4[$: $g(3) = -9$ et $g(4) = 16$, donc $3 < \alpha < 4$; $g(3,6) = 3,456$ et $g(3,7) = 6,253$ encadrent 5, donc $3,6 < \alpha < 3,7$.

Exercice 48 — Le tambour d'une machine à laver

a) $N'(t) = -0,5 \times 2t + 20 = -t + 20$

b) Le tambour s'arrête quand sa vitesse est nulle : $-t + 20 = 0$, soit $t = 20 \text{ s}$.

c) $N(20) = -0,5 \times 400 + 400 = 200$ tours.

Entre 0 et 20 s, $N'(t) > 0$: le nombre de tours augmente, le tambour tourne.

XIII) Résoudre une équation $f(x) = k$

Exercice 49 — Nombre de solutions

Sur chaque intervalle où f varie dans un seul sens, on regarde si k est entre les deux valeurs extrêmes.

a) $f(x) = 0$: 3 solutions, dans $] -3; 0[$, $] 0; 2[$ et $] 2; 4[$.

b) $f(x) = 3$: 2 solutions, dans $] -3; 0[$ et $] 0; 2[$ (sur $] 2; 4[$, f ne dépasse pas 1).

c) $f(x) = -3$: 2 solutions, dans $] 0; 2[$ et $] 2; 4[$ (sur $] -3; 0[$, f reste au-dessus de -2).

d) $f(x) = 6$: 0 solution (6 est plus grand que le maximum 5).

Exercice 50 — Une seule solution

a) $f'(x) = 3x^2 + 1$: un carré est positif, donc $f'(x) > 0$ et f est strictement croissante.

b) $f(0) = -3$ et $f(2) = 8 + 2 - 3 = 7$: 0 est entre -3 et 7 , donc l'équation a une seule solution α .

c) $f(1) = -1$ et $f(2) = 7$, donc $1 < \alpha < 2$;
 $f(1,2) = -0,072$ et $f(1,3) = 0,497$, donc
 $1,2 < \alpha < 1,3$.

Exercice 51 — Trois solutions

a) $g'(x) = 3x^2 - 12$; $\Delta = 0 - 4 \times 3 \times (-12) = 144$,
 racines $\frac{0 \pm 12}{6}$: -2 et 2 . Positif à l'extérieur
 ($a = 3 > 0$).

b) $g(-4) = -16$; $g(-2) = 16$; $g(2) = -16$; $g(4) = 16$.