

DÉRIVATION ET ÉTUDE DE FONCTIONS

Cours — Première STI2D

Comment utiliser ce cours

Chaque partie commence par ce qu'il faut **savoir** (définitions, propriétés), puis vient ce qu'il faut **savoir faire** : une méthode, avec des **exemples corrigés** faits en classe, puis des exercices « **À vous de jouer** » à chercher seul.

I — Fonctions affines et droites

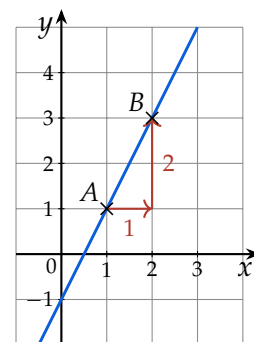
Rappel — Fonction affine, coefficient directeur

Une fonction affine s'écrit $f(x) = mx + p$. Sa courbe est la droite d'équation $y = mx + p$.

- p est l'**ordonnée à l'origine** : la droite coupe l'axe des ordonnées en p .
- m est le **coefficient directeur** (la **pente**) : quand on avance de 1, on monte de m (on descend si $m < 0$).

Si la droite passe par $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$:

$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} \quad (\text{ce qu'on monte, divisé par ce qu'on avance}).$$



on avance de 1, on monte de 2 : $m = 2$

Méthode 1 — Trouver l'équation d'une droite passant par deux points

Exemples corrigés

Déterminer l'équation réduite de la droite (AB) dans chaque cas.

- $A(1; 3)$ et $B(3; 7)$.
- $A(-2; 5)$ et $B(2; -3)$.

a)

$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} \quad \text{on écrit la formule}$$

$$m = \frac{7 - 3}{3 - 1} \quad \text{on remplace par les coordonnées}$$

$$m = 2 \quad \frac{4}{2} = 2$$

L'équation est de la forme $y = 2x + p$. La droite passe par $A(1; 3)$:

on cherche maintenant p

$$2 \times 1 + p = 3 \quad \text{on remplace } x \text{ par } 1 \text{ et } y \text{ par } 3$$

$$p = 3 - 2$$

$$p = 1$$

La droite (AB) a pour équation $y = 2x + 1$.

on remplace m et p

b)

$$m = \frac{-3 - 5}{2 - (-2)} \quad \text{attention aux signes}$$

$$m = \frac{-8}{4}$$

$$m = -2$$

L'équation est de la forme $y = -2x + p$. La droite passe par $A(-2; 5)$:

$$-2 \times (-2) + p = 5 \quad \text{on remplace } x \text{ par } -2 \text{ et } y \text{ par } 5$$

$$4 + p = 5$$

$$p = 1$$

La droite (AB) a pour équation $y = -2x + 1$.

À vous de jouer

Déterminer l'équation réduite de la droite (EF) dans chaque cas.

a) $E(1; 1)$ et $F(3; 7)$.

b) $E(-1; 4)$ et $F(3; -4)$.

Réponses : a) $y = 3x - 2$; b) $y = -2x + 2$.

► **À faire** : fiche d'exercices du chapitre, exercices 1 à 4.

II — Nombre dérivé

Définition 1 — Taux de variation, nombre dérivé

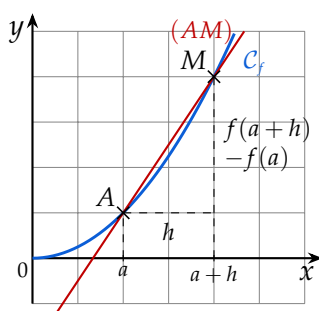
A et M sont les points de C_f d'abscisses a et $a + h$.

- Le **taux de variation** de f entre a et $a + h$ est $T(h) = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$: c'est le coefficient directeur de la droite (AM) .
- Quand h se rapproche de 0, M glisse vers A et la droite (AM) se rapproche de la **tangente** en A . Son coefficient directeur se rapproche d'un nombre : c'est le **nombre dérivé** de f en a , noté $f'(a)$ (« f prime de a »). On écrit

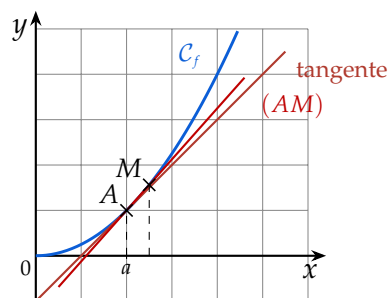
$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

(« limite quand h tend vers 0 »).

h grand : (AM) s'écarte de la courbe



h petit : (AM) presque confondue avec la tangente



Méthode 2 — Calculer un nombre dérivé avec le taux de variation

Exemples corrigés

Soit $f(x) = x^2 - 4x + 1$.

- a) Calculer $f(3)$, puis $f(3+h)$.
- b) Simplifier le taux de variation $T(h) = \frac{f(3+h) - f(3)}{h}$.
- c) En déduire $f'(3)$.

a)

$$f(3) = 3^2 - 4 \times 3 + 1 \quad \text{on remplace } x \text{ par } 3$$

$$f(3) = -2$$

$$f(3+h) = (3+h)^2 - 4(3+h) + 1 \quad \text{on remplace } x \text{ par } (3+h)$$

$$f(3+h) = 9 + 6h + h^2 - 12 - 4h + 1 \quad (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2, \text{ puis on développe}$$

$$f(3+h) = h^2 + 2h - 2 \quad \text{on réduit}$$

b)

$$T(h) = \frac{f(3+h) - f(3)}{h} \quad \text{la formule, avec } a = 3$$

$$T(h) = \frac{h^2 + 2h - 2 - (-2)}{h} \quad \text{on remplace}$$

$$T(h) = \frac{h^2 + 2h}{h} \quad -2 + 2 = 0$$

$$T(h) = \frac{\cancel{h}(h+2)}{\cancel{h}} \quad \text{on factorise par } h, \text{ puis on simplifie}$$

$$T(h) = h + 2$$

c)

Quand h se rapproche de 0, $T(h) = h + 2$ se rapproche de 2. on remplace h par 0 dans le résultat simplifié
 Donc $f'(3) = 2$.

À vous de jouer

Soit $g(x) = x^2 + x - 3$.

- a) Calculer $g(1)$, puis $g(1+h)$.
- b) Simplifier le taux de variation $T(h) = \frac{g(1+h) - g(1)}{h}$.
- c) En déduire $g'(1)$.

Réponses : a) $g(1) = -1$ et $g(1+h) = h^2 + 3h - 1$; b) $T(h) = h + 3$; c) $g'(1) = 3$.

► **À faire** : fiche d'exercices du chapitre, exercices 5 à 8.

III — Tangente à une courbe

Définition 2 — Tangente

La **tangente** à $\mathcal{C}_f$ au point A d'abscisse a est la droite qui

- passe par $A(a; f(a))$;
- a pour coefficient directeur le nombre dérivé $f'(a)$.

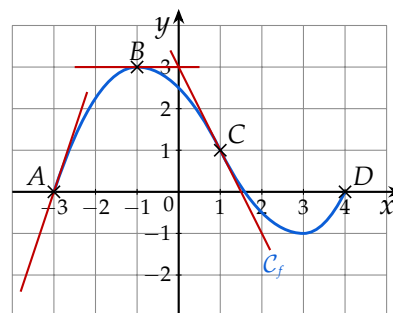
Près de A , elle « colle » à la courbe. Sur un graphique, $f'(a)$ se lit donc comme la pente de la tangente : à partir de A , on avance de 1 et on monte de $f'(a)$. Une tangente horizontale correspond à $f'(a) = 0$.

Méthode 3 — Lire un nombre dérivé, tracer une tangente

Exemples corrigés

On a tracé la courbe C_f d'une fonction f et ses tangentes aux points A , B et C .

- Lire $f'(-3)$, $f'(-1)$ et $f'(1)$.
- On sait que $f'(4) = 2$. Tracer la tangente à C_f au point $D(4;0)$.



a)

En A : on avance de 1, on monte de 3. Donc $f'(-3) = 3$.

En B : la tangente est horizontale. Donc $f'(-1) = 0$.

En C : on avance de 1, on descend de 2. Donc $f'(1) = -2$.

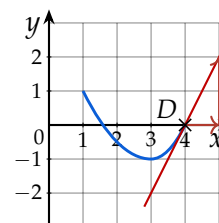
b)

On part de $D(4;0)$, on avance de 1 et on monte de 2 : on arrive en $(5;2)$. On trace la droite qui passe par ces deux points (en reculant de 1 et en descendant de 2, on arrive en $(3;-2)$).

la tangente passe par $(-2;3)$

on ne monte pas

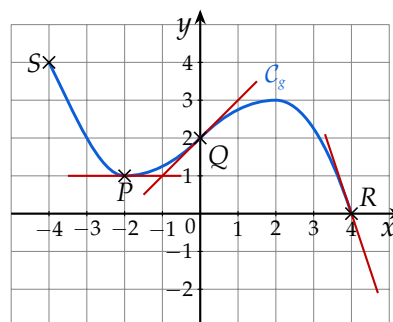
la tangente passe par $(2;-1)$; on descend : nombre négatif



À vous de jouer

On a tracé la courbe C_g d'une fonction g et ses tangentes aux points P , Q et R .

- Lire $g'(-2)$, $g'(0)$ et $g'(4)$.
- On sait que $g'(-4) = -2$. Tracer la tangente à C_g au point $S(-4;4)$.



Réponses : a) $g'(-2) = 0$; $g'(0) = 1$; $g'(4) = -3$; b) la tangente passe par $S(-4;4)$ et par $(-3;2)$.

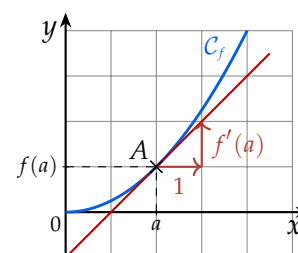
► **À faire** : fiche d'exercices du chapitre, exercices 9 à 11.

IV — Équation de la tangente

Propriété 1 — Équation de la tangente

La tangente à C_f au point $A(a; f(a))$ a pour équation

$$y = f'(a)(x - a) + f(a).$$



D'où vient cette formule? La tangente est une droite de coefficient directeur $f'(a)$: son équation s'écrit

$y = f'(a)x + p$. Elle passe par $A(a; f(a))$, ce qui donne p (comme à la méthode 1) :

$$f'(a) \times a + p = f(a) \quad \text{on remplace } x \text{ par } a \text{ et } y \text{ par } f(a)$$

$$p = f(a) - f'(a) \times a \quad \text{on isole } p$$

On remplace p dans $y = f'(a)x + p$:

$$y = f'(a)x + f(a) - f'(a) \times a \quad \text{on remplace } p$$

$$y = f'(a)(x - a) + f(a) \quad \text{on factorise } f'(a)x - f'(a) \times a \text{ par } f'(a)$$

Méthode 4 — Déterminer l'équation d'une tangente

Exemples corrigés

Soit $f(x) = x^2 - 4x + 1$. On admet que $f'(1) = -2$.

- Calculer $f(1)$.
- Déterminer l'équation réduite de la tangente à C_f au point d'abscisse 1.

a)

$$f(1) = 1^2 - 4 \times 1 + 1 \quad \text{on remplace } x \text{ par } 1$$

$$f(1) = -2$$

b)

$$y = f'(1)(x - 1) + f(1) \quad \text{la formule, avec } a = 1$$

$$y = -2(x - 1) + (-2) \quad f'(1) = -2 \text{ et } f(1) = -2$$

$$y = -2x + 2 - 2 \quad \text{on développe}$$

$$y = -2x \quad \text{on réduit}$$

La tangente au point d'abscisse 1 a pour équation $y = -2x$. on conclut par une phrase

À vous de jouer

Soit $g(x) = x^2 + x - 3$. On admet que $g'(2) = 5$.

- Calculer $g(2)$.
- Déterminer l'équation réduite de la tangente à C_g au point d'abscisse 2.

Réponses : a) $g(2) = 3$; b) $y = 5x - 7$.

► **À faire** : fiche d'exercices du chapitre, exercices 12 à 14.

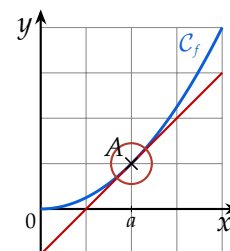
V — Approximation affine

Propriété 2 — La tangente remplace la courbe

Près du point d'abscisse a , la courbe et sa tangente sont presque confondues : pour x proche de a , la fonction est **à peu près égale à sa tangente**. On calcule donc avec l'**équation de la tangente** (propriété 1) au lieu de la fonction :

$$f(x) \simeq \underbrace{f'(a)(x - a) + f(a)}_{\text{le } y \text{ de la tangente}}.$$

C'est l'**approximation affine** de f près de a ; le signe $\simeq$ se lit « à peu près égal à ».



dans le cercle : presque confondues

Méthode 5 — Calculer une valeur approchée avec la tangente**Exemples corrigés**

Soit $f(x) = x^2 - 4x + 1$. Sa tangente au point d'abscisse 1 a pour équation $y = -2x$ (méthode 4).

a) Avec la tangente, donner une valeur approchée de $f(1,1)$.

b) Calculer $f(1,1)$ et comparer.

a)

$$f(1,1) \simeq -2 \times 1,1 \quad 1,1 \text{ est proche de } 1 : \text{on remplace } x \text{ par } 1,1 \text{ dans l'équation de la tangente}$$

$$f(1,1) \simeq -2,2$$

b)

$$f(1,1) = 1,1^2 - 4 \times 1,1 + 1 \quad \text{on remplace } x \text{ par } 1,1 \text{ dans } f(x)$$

$$f(1,1) = 1,21 - 4,4 + 1$$

$$f(1,1) = -2,19$$

L'écart entre $-2,2$ et $-2,19$ n'est que de $0,01$:
l'approximation est bonne.

plus x est proche de 1, meilleure elle est

À vous de jouer

Soit $g(x) = x^2 + x - 3$. Sa tangente au point d'abscisse 2 a pour équation $y = 5x - 7$.

a) Avec la tangente, donner une valeur approchée de $g(2,1)$.

b) Calculer $g(2,1)$ et comparer.

Réponses : a) $g(2,1) \simeq 3,5$; b) $g(2,1) = 3,51$: écart de $0,01$.

► **À faire** : fiche d'exercices du chapitre, exercices 15 à 17.

VI — Fonction dérivée d'une fonction polynôme**Définition 3 — Fonction dérivée**

La **fonction dérivée** de f , notée f' , associe à chaque nombre x le nombre dérivé $f'(x)$. Plus besoin de taux de variation : on la calcule avec des formules.

Propriété 3 — Dérivées des polynômes

Fonction $f(x)$	Dérivée $f'(x)$
k (un nombre)	0
x	1
$mx + p$	m
x^2	$2x$
x^3	$3x^2$
x^n ($n = 4, 5, 6, \dots$)	$n x^{n-1}$

Pour x^n , l'exposant passe devant et on lui retire 1 : x^5 a pour dérivée $5x^4$. On dérive **terme par terme**, et un nombre qui multiplie reste devant : $(5x^2)' = 5 \times 2x = 10x$.

Remarque

Avec ces formules, $f(x) = x^2 - 4x + 1$ donne $f'(x) = 2x - 4$: on retrouve $f'(3) = 2$ (méthode 2) et $f'(1) = -2$ (méthode 4), sans aucun taux de variation.

Méthode 6 — Dériver une fonction polynôme**Exemples corrigés**

Calculer la dérivée de chaque fonction.

a) $f(x) = 3x^2 - 5x + 4$

b) $g(x) = 2x^3 + x^2 - 7x + 1$

c) $h(x) = 2x^4 - x^3 + 6x$

a)

$$f'(x) = 3 \times 2x - 5 + 0 \quad x^2 \text{ devient } 2x; -5x \text{ devient } -5; 4 \text{ devient } 0$$

$$f'(x) = 6x - 5$$

b)

$$g'(x) = 2 \times 3x^2 + 2x - 7 + 0 \quad x^3 \text{ devient } 3x^2, \text{ terme par terme}$$

$$g'(x) = 6x^2 + 2x - 7$$

c)

$$h'(x) = 2 \times 4x^3 - 3x^2 + 6 \quad x^4 \text{ devient } 4x^3; 6x \text{ devient } 6$$

$$h'(x) = 8x^3 - 3x^2 + 6$$

À vous de jouer

Calculer la dérivée de chaque fonction.

a) $k(x) = 4x^2 + 3x - 2$

b) $m(x) = x^3 - 5x^2 + 2$

c) $p(x) = x^5 + 4x^3 - 2x$

Réponses : a) $k'(x) = 8x + 3$; b) $m'(x) = 3x^2 - 10x$; c) $p'(x) = 5x^4 + 12x^2 - 2$.

► **À faire** : fiche d'exercices du chapitre, exercices 18 à 22.

VII — Autres fonctions dérivées**Propriété 4 — Inverse, cosinus et sinus**

Fonction $f(x)$	Dérivée $f'(x)$
$\frac{1}{x}$ (pour $x \neq 0$)	$-\frac{1}{x^2}$
$\cos x$	$-\sin x$
$\sin x$	$\cos x$

Pour $\cos x$ et $\sin x$, x est un angle en radians (chapitre 7). Attention au signe $-$: seule la dérivée de $\cos x$ en a un.

Méthode 7 — Dériver avec l'inverse, le cosinus et le sinus**Exemples corrigés**

Calculer la dérivée de chaque fonction.

a) $f(x) = \frac{5}{x}$

b) $g(x) = 4x + \frac{2}{x}$

c) $h(x) = 3 \sin x + x^2$

d) $k(x) = 2 \cos x - x^3$

a)

$$f'(x) = 5 \times \left(-\frac{1}{x^2}\right) \quad \frac{5}{x} = 5 \times \frac{1}{x} : \text{le 5 reste devant}$$

$$f'(x) = -\frac{5}{x^2}$$

b)

$$g'(x) = 4 + 2 \times \left(-\frac{1}{x^2}\right) \quad \text{terme par terme}$$

$$g'(x) = 4 - \frac{2}{x^2}$$

c)

$$h'(x) = 3 \cos x + 2x \quad \sin x \text{ devient } \cos x, \text{ le 3 reste devant}$$

d)

$$k'(x) = 2 \times (-\sin x) - 3x^2 \quad \cos x \text{ devient } -\sin x$$

$$k'(x) = -2 \sin x - 3x^2$$

À vous de jouer

Calculer la dérivée de chaque fonction.

a) $m(x) = -\frac{3}{x}$

b) $p(x) = x^2 - \frac{6}{x}$

c) $q(x) = 4 \sin x - x$

d) $r(x) = 5 \cos x + 2x^2$

Réponses : a) $m'(x) = \frac{3}{x^2}$; b) $p'(x) = 2x + \frac{6}{x^2}$; c) $q'(x) = 4 \cos x - 1$; d) $r'(x) = -5 \sin x + 4x$.► **À faire** : fiche d'exercices du chapitre, exercices 23 à 26.**VIII — Dérivée d'un produit, d'un carré****Propriété 5 — Produit et carré** u et v sont deux fonctions, de dérivées u' et v' .

Fonction	Dérivée
$u \times v$	$u' \times v + u \times v'$
u^2	$2 \times u' \times u$

Attention : la dérivée d'un produit n'est pas le produit des dérivées.

Méthode 8 — Dériver un produit, un carré

Exemples corrigés

Calculer la dérivée de chaque fonction.

a) $f(x) = (2x + 1)(x^2 - 3)$

b) $g(x) = (3x - 2)^2$

a)

$$u(x) = 2x + 1$$

$$\text{donc } u'(x) = 2$$

$$v(x) = x^2 - 3$$

$$\text{donc } v'(x) = 2x$$

$$f'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x) \quad \text{la formule du produit}$$

$$f'(x) = 2(x^2 - 3) + (2x + 1) \times 2x \quad \text{on remplace}$$

$$f'(x) = 2x^2 - 6 + 4x^2 + 2x \quad \text{on développe}$$

$$f'(x) = 6x^2 + 2x - 6 \quad \text{on réduit}$$

b)

$$u(x) = 3x - 2$$

$$\text{donc } u'(x) = 3$$

$$g'(x) = 2 \times u'(x) \times u(x) \quad \text{la formule du carré}$$

$$g'(x) = 2 \times 3 \times (3x - 2) \quad \text{on remplace}$$

$$g'(x) = 18x - 12 \quad \text{on développe } 6(3x - 2)$$

À vous de jouer

Calculer la dérivée de chaque fonction.

a) $k(x) = (x + 4)(2x^2 - 1)$

b) $m(x) = (5x + 1)^2$

Réponses : a) $k'(x) = 6x^2 + 16x - 1$; b) $m'(x) = 50x + 10$.

► **À faire** : fiche d'exercices du chapitre, exercices 27 à 30.

IX — Dérivée de l'inverse, d'un quotient

Propriété 6 — Inverse et quotient

u et v sont deux fonctions, de dérivées u' et v' , et $v(x) \neq 0$.

Fonction	Dérivée
$\frac{1}{v}$	$-\frac{v'}{v^2}$
$\frac{u}{v}$	$\frac{u' \times v - u \times v'}{v^2}$

Le dénominateur v^2 reste écrit au carré : on ne le développe pas.

Méthode 9 — Dériver un inverse, un quotient

Exemples corrigés

Calculer la dérivée de chaque fonction.

a) $f(x) = \frac{1}{2x-3}$

b) $g(x) = \frac{3x+1}{x-2}$

a)

$$v(x) = 2x - 3 \quad \text{donc } v'(x) = 2$$

$$f'(x) = -\frac{v'(x)}{v(x)^2} \quad \text{la formule de l'inverse}$$

$$f'(x) = -\frac{2}{(2x-3)^2} \quad \text{on remplace}$$

b)

$$u(x) = 3x + 1 \quad \text{donc } u'(x) = 3$$

$$v(x) = x - 2 \quad \text{donc } v'(x) = 1$$

$$g'(x) = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v(x)^2} \quad \text{la formule du quotient}$$

$$g'(x) = \frac{3(x-2) - (3x+1) \times 1}{(x-2)^2} \quad \text{parenthèses autour de } u(x) : \text{le } - \text{ porte sur tout}$$

$$g'(x) = \frac{3x - 6 - 3x - 1}{(x-2)^2} \quad \text{on développe le numérateur}$$

$$g'(x) = \frac{-7}{(x-2)^2} \quad \text{on réduit}$$

À vous de jouer

Calculer la dérivée de chaque fonction.

a) $k(x) = \frac{1}{4x+1}$

b) $m(x) = \frac{2x-5}{x+3}$

$$\text{Réponses : a) } k'(x) = -\frac{4}{(4x+1)^2}; \text{ b) } m'(x) = \frac{11}{(x+3)^2}.$$

► À faire : fiche d'exercices du chapitre, exercices 31 à 34.

X — Fonctions composées

Propriété 7 — Tableau de référence des fonctions composées

 u est une fonction de dérivée u' (par exemple $u(x) = x^2 + 3x$, ou $u(x) = 3x + 1$).

Fonction	Dérivée
u^n	$n \times u' \times u^{n-1}$
$\cos(u)$	$-u' \times \sin(u)$
$\sin(u)$	$u' \times \cos(u)$

On dérive comme si u était x , puis on **multiplie par u'** . Cas fréquent en électricité : $\cos(\omega t + \varphi)$ a pour dérivée $-\omega \sin(\omega t + \varphi)$.

Méthode 10 — Dériver une fonction composée

Exemples corrigés

Calculer la dérivée de chaque fonction.

a) $f(x) = (x^2 + 3x)^4$

b) $g(x) = \cos(3x + 1)$

c) $h(x) = 5 \sin(2x - 1)$

a)

$$u(x) = x^2 + 3x \quad \text{donc } u'(x) = 2x + 3; \text{ ici } n = 4$$

$$f'(x) = 4 \times u'(x) \times u(x)^3 \quad \text{la formule de } u^n$$

$$f'(x) = 4(2x + 3)(x^2 + 3x)^3 \quad \text{on remplace ; on ne développe pas}$$

b)

$$u(x) = 3x + 1 \quad \text{donc } u'(x) = 3$$

$$g'(x) = -u'(x) \times \sin(u(x)) \quad \text{la formule de } \cos(u)$$

$$g'(x) = -3 \sin(3x + 1) \quad \text{on remplace}$$

c)

$$u(x) = 2x - 1 \quad \text{donc } u'(x) = 2$$

$$h'(x) = 5 \times 2 \cos(2x - 1) \quad \text{la formule de } \sin(u); \text{ le 5 reste devant}$$

$$h'(x) = 10 \cos(2x - 1)$$

À vous de jouer

Calculer la dérivée de chaque fonction.

a) $k(x) = (x^2 - 5x)^3$

b) $m(x) = \cos(5x - 2)$

c) $p(x) = 2 \sin(3x + 5)$

Réponses : a) $k'(x) = 3(2x - 5)(x^2 - 5x)^2$; b) $m'(x) = -5 \sin(5x - 2)$; c) $p'(x) = 6 \cos(3x + 5)$.

► **À faire** : fiche d'exercices du chapitre, exercices 35 à 39.

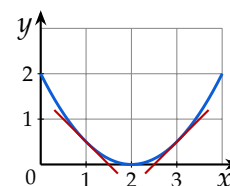
XI — Dérivée et sens de variation

Propriété 8 — Signe de la dérivée et variations

Sur un intervalle :

- si $f'(x) > 0$, alors f est **croissante** ;
- si $f'(x) < 0$, alors f est **décroissante**.

(Elle le reste si f' s'annule seulement en quelques points.) Pour trouver les variations de f , on étudie donc le **signe** de $f'(x)$.



à gauche : tangentes qui descendent, f décroît ;
à droite : tangentes qui montent, f croît

Méthode 11 — Étudier les variations d'une fonction

Exemples corrigés

Soit $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 2$ sur l'intervalle $[-2; 4]$.

- Calculer $f'(x)$.
- Étudier le signe de $f'(x)$.
- Dresser le tableau de variations de f .

a)

$$f'(x) = 3x^2 - 3 \times 2x - 9 \quad \text{terme par terme}$$

$$f'(x) = 3x^2 - 6x - 9$$

b)

$f'(x)$ est un trinôme : $a = 3$, $b = -6$ et $c = -9$.

on cherche ses racines (chapitre 3)

$$\Delta = b^2 - 4ac \quad \text{le discriminant}$$

$$\Delta = (-6)^2 - 4 \times 3 \times (-9)$$

$$\Delta = 144 \quad 36 + 108; \Delta > 0 : \text{deux racines}$$

$$x_1 = \frac{6 - 12}{6} = -1 \quad \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}, \text{ avec } \sqrt{144} = 12$$

$$x_2 = \frac{6 + 12}{6} = 3 \quad \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$f'(x)$ est du signe de $a = 3$, donc positif, à l'extérieur des racines, et négatif entre elles.

signe d'un trinôme

c)

On calcule les images des bornes et des racines :

elles complètent le tableau

$$f(-2) = -8 - 12 + 18 + 2 = 0$$

$$f(-1) = -1 - 3 + 9 + 2 = 7$$

$$f(3) = 27 - 27 - 27 + 2 = -25$$

$$f(4) = 64 - 48 - 36 + 2 = -18$$

x	-2	-1	3	4	
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	0	7	-25	-18	

À vous de jouer

Soit $g(x) = -x^3 + 6x^2 - 9x + 1$ sur l'intervalle $[0; 4]$.

- Calculer $g'(x)$.
- Étudier le signe de $g'(x)$.
- Dresser le tableau de variations de g .

Réponses : a) $g'(x) = -3x^2 + 12x - 9$; b) racines 1 et 3; $g'(x)$ négatif sur $[0; 1]$ et sur $[3; 4]$, positif sur $[1; 3]$; c) g décroît de 1 à -3, croît de -3 à 1, puis décroît de 1 à -3.

XII — Problèmes concrets : maximum et minimum

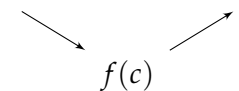
Propriété 9 — Extremum

Si $f'(x)$ s'annule en c **en changeant de signe**, alors f admet en c un extremum (la tangente y est horizontale) :

+ puis - : un **maximum**

x	c		
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	$f(c)$ 		

- puis + : un **minimum**

x	c		
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	$f(c)$ 		

Méthode 12 — Trouver le maximum dans un problème

Exemples corrigés

Un générateur débite un courant d'intensité I (en ampères), entre 0 et 6 A. La puissance qu'il fournit, en watts, vaut $P(I) = 12I - 2I^2$.

- Calculer $P'(I)$.
- Dresser le tableau de variations de P sur $[0; 6]$.
- Pour quelle intensité la puissance est-elle maximale? Que vaut-elle?

a)

$$P'(I) = 12 - 2 \times 2I \quad \text{la variable s'appelle } I \text{ au lieu de } x$$

$$P'(I) = 12 - 4I$$

b)

On cherche quand $P'(I)$ s'annule :

$$12 - 4I = 0$$

$$-4I = -12$$

$$I = 3 \quad \frac{-12}{-4} = 3$$

$12 - 4I$ est affine, de coefficient directeur $-4 < 0$: positif avant 3, négatif après.

signe d'une expression affine

$$P(0) = 0$$

$$P(3) = 36 - 18 = 18 \quad 12 \times 3 - 2 \times 3^2$$

$$P(6) = 72 - 72 = 0$$

I	0	3	6
$P'(I)$	+	0	-
$P(I)$	0	18	0

c)

La puissance est maximale pour une intensité de 3 A ; elle vaut alors 18 W.

P' s'annule en 3 en passant de + à - : un maximum

À vous de jouer

On lance un ballon vers le haut. Au bout de t secondes (entre 0 et 4 s), il est à la hauteur $h(t) = -5t^2 + 20t + 2$, en mètres.

- Calculer $h'(t)$.
- Dresser le tableau de variations de h sur $[0; 4]$.
- À quel instant le ballon est-il le plus haut? À quelle hauteur?

Réponses : a) $h'(t) = -10t + 20$; b) h croît de 2 à 22 sur $[0; 2]$, puis décroît de 22 à 2; c) au bout de 2 s, à 22 m.

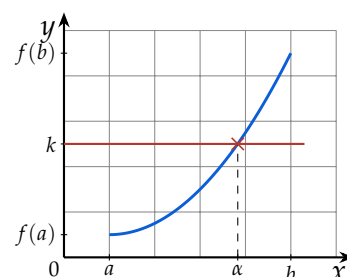
► **À faire** : fiche d'exercices du chapitre, exercices 46 à 48.

XIII — Résoudre une équation $f(x) = k$

Propriété 10 — Théorème des valeurs intermédiaires

Si f est dérivable et **strictement croissante** (ou strictement décroissante) sur $[a; b]$, et si k est **compris entre $f(a)$ et $f(b)$** , alors l'équation $f(x) = k$ a **une seule solution** α dans $[a; b]$.

La courbe monte sans sauter de $f(a)$ à $f(b)$: elle traverse une seule fois la droite d'équation $y = k$.



Méthode 13 — Montrer qu'une équation a une seule solution, l'encadrer

Exemples corrigés

Soit $f(x) = x^3 + 2x - 5$ sur l'intervalle $[0; 3]$.

- Montrer que f est strictement croissante sur $[0; 3]$.
- Montrer que l'équation $f(x) = 0$ a une seule solution α dans $[0; 3]$.
- Avec le tableau de valeurs de la calculatrice, encadrer α entre deux nombres à un chiffre après la virgule.

a)

$$f'(x) = 3x^2 + 2 \quad \text{terme par terme}$$

Un carré est positif, donc $3x^2 + 2 > 0$: f est strictement croissante sur $[0; 3]$.

$$f'(x) > 0 : f \text{ croît}$$

b)

$$f(0) = -5 \quad \text{les images des bornes}$$

$$f(3) = 27 + 6 - 5 = 28$$

f est strictement croissante et 0 est compris entre -5 et 28 : l'équation $f(x) = 0$ a une seule solution α dans $[0; 3]$.

théorème des valeurs intermédiaires

c)

Tableau de valeurs avec un pas de 1 : $f(1) = -2$ et $f(2) = 7$.
Donc $1 < \alpha < 2$.

$f(x)$ passe de négatif à positif

Pas de 0,1 à partir de 1 : $f(1,3) = -0,203$ et $f(1,4) = 0,544$.

on recommence entre 1 et 2

Donc $1,3 < \alpha < 1,4$.

À vous de jouer

Soit $g(x) = x^3 + 3x - 2$ sur l'intervalle $[0; 2]$.

- Montrer que g est strictement croissante sur $[0; 2]$.
- Montrer que l'équation $g(x) = 0$ a une seule solution α dans $[0; 2]$.

c) Avec le tableau de valeurs de la calculatrice, encadrer α entre deux nombres à un chiffre après la virgule.

Réponses : a) $g'(x) = 3x^2 + 3 > 0$; b) $g(0) = -2$ et $g(2) = 12$; c) $0,5 < \alpha < 0,6$.

► **À faire** : fiche d'exercices du chapitre, exercices 49 à 51.