

DÉRIVATION ET ÉTUDE DE FONCTIONS

Cours — Première STI2D

Version élève

Comment utiliser ce cours

Chaque partie commence par ce qu'il faut **savoir** (définitions, propriétés), puis vient ce qu'il faut **savoir faire** : une méthode, avec des **exemples** faits en classe, puis des exercices « **À vous de jouer** » à chercher seul.

Sur cette feuille, seuls les **énoncés** des exemples figurent : la résolution, signalée par la mention (*au tableau*), est à rédiger dans le cahier.

I — Fonctions affines et droites

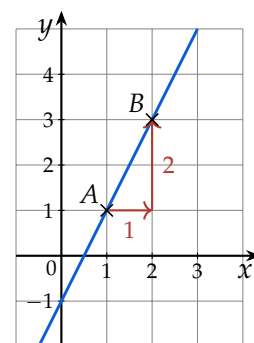
Rappel — Fonction affine, coefficient directeur

Une fonction affine s'écrit $f(x) = mx + p$. Sa courbe est la droite d'équation $y = mx + p$.

- p est l'**ordonnée à l'origine** : la droite coupe l'axe des ordonnées en p .
- m est le **coefficient directeur** (la **pente**) : quand on avance de 1, on monte de m (on descend si $m < 0$).

Si la droite passe par $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$:

$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} \quad (\text{ce qu'on monte, divisé par ce qu'on avance}).$$



on avance de 1, on monte de 2 : $m = 2$

Méthode 1 — Trouver l'équation d'une droite passant par deux points

Exemples

Déterminer l'équation réduite de la droite (AB) dans chaque cas.

- $A(1; 3)$ et $B(3; 7)$.
- $A(-2; 5)$ et $B(2; -3)$.

À vous de jouer

Déterminer l'équation réduite de la droite (EF) dans chaque cas.

- $E(1; 1)$ et $F(3; 7)$.
- $E(-1; 4)$ et $F(3; -4)$.

(au tableau)

► **À faire** : fiche d'exercices du chapitre, exercices 1 à 4.

II — Nombre dérivé

Définition 1 — Taux de variation, nombre dérivé

A et M sont les points de C_f d'abscisses a et $a + h$.

- Le **taux de variation** de f entre a et $a + h$ est $T(h) = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$: c'est le coefficient directeur de la

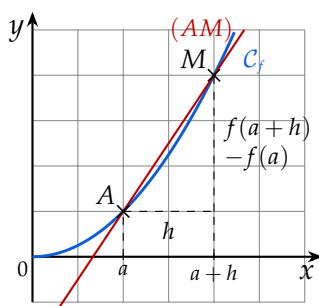
droite (AM) .

- Quand h se rapproche de 0, M glisse vers A et la droite (AM) se rapproche de la **tangente** en A . Son coefficient directeur se rapproche d'un nombre : c'est le **nombre dérivé** de f en a , noté $f'(a)$ (« f prime de a »). On écrit

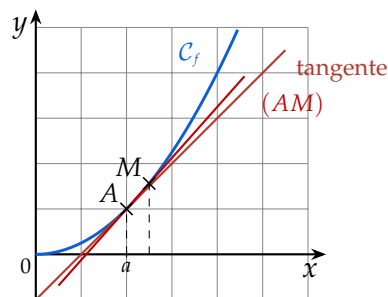
$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

(« limite quand h tend vers 0 »).

h grand : (AM) s'écarte de la courbe



h petit : (AM) presque confondue avec la tangente



Méthode 2 — Calculer un nombre dérivé avec le taux de variation

Exemples

(au tableau)

Soit $f(x) = x^2 - 4x + 1$.

- Calculer $f(3)$, puis $f(3+h)$.
- Simplifier le taux de variation $T(h) = \frac{f(3+h) - f(3)}{h}$.
- En déduire $f'(3)$.

À vous de jouer

Soit $g(x) = x^2 + x - 3$.

- Calculer $g(1)$, puis $g(1+h)$.
- Simplifier le taux de variation $T(h) = \frac{g(1+h) - g(1)}{h}$.
- En déduire $g'(1)$.

► **À faire** : fiche d'exercices du chapitre, exercices 5 à 8.

III — Tangente à une courbe

Définition 2 — Tangente

La **tangente** à C_f au point A d'abscisse a est la droite qui

- passe par $A(a; f(a))$;
- a pour coefficient directeur le nombre dérivé $f'(a)$.

Près de A , elle « colle » à la courbe. Sur un graphique, $f'(a)$ se lit donc comme la pente de la tangente : à partir de A , on avance de 1 et on monte de $f'(a)$. Une tangente horizontale correspond à $f'(a) = 0$.

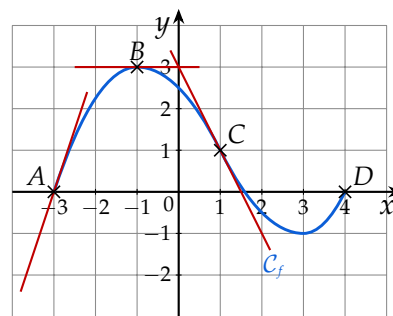
Méthode 3 — Lire un nombre dérivé, tracer une tangente

Exemples

(au tableau)

On a tracé la courbe C_f d'une fonction f et ses tangentes aux points A , B et C .

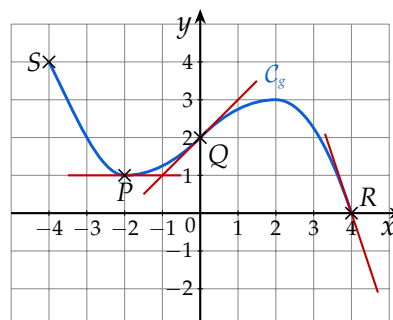
- Lire $f'(-3)$, $f'(-1)$ et $f'(1)$.
- On sait que $f'(4) = 2$. Tracer la tangente à C_f au point $D(4;0)$.



À vous de jouer

On a tracé la courbe C_g d'une fonction g et ses tangentes aux points P , Q et R .

- Lire $g'(-2)$, $g'(0)$ et $g'(4)$.
- On sait que $g'(-4) = -2$. Tracer la tangente à C_g au point $S(-4;4)$.



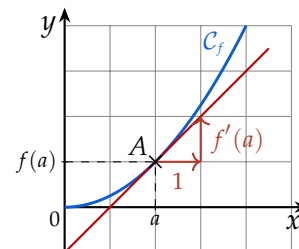
► À faire : fiche d'exercices du chapitre, exercices 9 à 11.

IV — Équation de la tangente

Propriété 1 — Équation de la tangente

La tangente à C_f au point $A(a; f(a))$ a pour équation

$$y = f'(a)(x - a) + f(a).$$



D'où vient cette formule? La tangente est une droite de coefficient directeur $f'(a)$: son équation s'écrit $y = f'(a)x + p$. Elle passe par $A(a; f(a))$, ce qui donne p (comme à la méthode 1) :

$$f'(a) \times a + p = f(a) \quad \text{on remplace } x \text{ par } a \text{ et } y \text{ par } f(a)$$

$$p = f(a) - f'(a) \times a \quad \text{on isole } p$$

On remplace p dans $y = f'(a)x + p$:

$$y = f'(a)x + f(a) - f'(a) \times a \quad \text{on remplace } p$$

$$y = f'(a)(x - a) + f(a) \quad \text{on factorise } f'(a)x - f'(a) \times a \text{ par } f'(a)$$

Méthode 4 — Déterminer l'équation d'une tangente

Exemples

(au tableau)

Soit $f(x) = x^2 - 4x + 1$. On admet que $f'(1) = -2$.

- Calculer $f(1)$.
- Déterminer l'équation réduite de la tangente à C_f au point d'abscisse 1.

À vous de jouer

Soit $g(x) = x^2 + x - 3$. On admet que $g'(2) = 5$.

- Calculer $g(2)$.
- Déterminer l'équation réduite de la tangente à C_g au point d'abscisse 2.

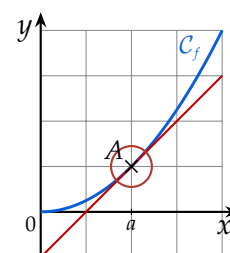
► **À faire** : fiche d'exercices du chapitre, exercices 12 à 14.

V — Approximation affine**Propriété 2 — La tangente remplace la courbe**

Près du point d'abscisse a , la courbe et sa tangente sont presque confondues : pour x proche de a , la fonction est **à peu près égale à sa tangente**. On calcule donc avec l'**équation de la tangente** (propriété 1) au lieu de la fonction :

$$f(x) \simeq \underbrace{f'(a)(x - a) + f(a)}_{\text{le } y \text{ de la tangente}}.$$

C'est l'**approximation affine** de f près de a ; le signe $\simeq$ se lit « à peu près égal à ».



dans le cercle : presque confondues

Méthode 5 — Calculer une valeur approchée avec la tangente**Exemples**

(au tableau)

Soit $f(x) = x^2 - 4x + 1$. Sa tangente au point d'abscisse 1 a pour équation $y = -2x$ (méthode 4).

- Avec la tangente, donner une valeur approchée de $f(1,1)$.
- Calculer $f(1,1)$ et comparer.

À vous de jouer

Soit $g(x) = x^2 + x - 3$. Sa tangente au point d'abscisse 2 a pour équation $y = 5x - 7$.

- Avec la tangente, donner une valeur approchée de $g(2,1)$.
- Calculer $g(2,1)$ et comparer.

► **À faire** : fiche d'exercices du chapitre, exercices 15 à 17.

VI — Fonction dérivée d'une fonction polynôme**Définition 3 — Fonction dérivée**

La **fonction dérivée** de f , notée f' , associe à chaque nombre x le nombre dérivé $f'(x)$. Plus besoin de taux de variation : on la calcule avec des formules.

Propriété 3 — Dérivées des polynômes

Fonction $f(x)$	Dérivée $f'(x)$
k (un nombre)	0
x	1
$mx + p$	m
x^2	$2x$
x^3	$3x^2$
x^n ($n = 4, 5, 6, \dots$)	$n x^{n-1}$

Pour x^n , l'exposant passe devant et on lui retire 1 : x^5 a pour dérivée $5x^4$. On dérive **terme par terme**, et un nombre qui multiplie reste devant : $(5x^2)' = 5 \times 2x = 10x$.

Remarque

Avec ces formules, $f(x) = x^2 - 4x + 1$ donne $f'(x) = 2x - 4$: on retrouve $f'(3) = 2$ (méthode 2) et $f'(1) = -2$ (méthode 4), sans aucun taux de variation.

Méthode 6 — Dériver une fonction polynôme

Exemples

(au tableau)

Calculer la dérivée de chaque fonction.

- a) $f(x) = 3x^2 - 5x + 4$
- b) $g(x) = 2x^3 + x^2 - 7x + 1$
- c) $h(x) = 2x^4 - x^3 + 6x$

À vous de jouer

Calculer la dérivée de chaque fonction.

- a) $k(x) = 4x^2 + 3x - 2$
- b) $m(x) = x^3 - 5x^2 + 2$
- c) $p(x) = x^5 + 4x^3 - 2x$

► **À faire** : fiche d'exercices du chapitre, exercices 18 à 22.

VII — Autres fonctions dérivées

Propriété 4 — Inverse, cosinus et sinus

Fonction $f(x)$	Dérivée $f'(x)$
$\frac{1}{x}$ (pour $x \neq 0$)	$-\frac{1}{x^2}$
$\cos x$	$-\sin x$
$\sin x$	$\cos x$

Pour $\cos x$ et $\sin x$, x est un angle en radians (chapitre 7). Attention au signe $-$: seule la dérivée de $\cos x$ en a un.

Méthode 7 — Dériver avec l'inverse, le cosinus et le sinus

Exemples

(au tableau)

Calculer la dérivée de chaque fonction.

a) $f(x) = \frac{5}{x}$

b) $g(x) = 4x + \frac{2}{x}$

c) $h(x) = 3 \sin x + x^2$

d) $k(x) = 2 \cos x - x^3$

À vous de jouer

Calculer la dérivée de chaque fonction.

a) $m(x) = -\frac{3}{x}$

b) $p(x) = x^2 - \frac{6}{x}$

c) $q(x) = 4 \sin x - x$

d) $r(x) = 5 \cos x + 2x^2$

► **À faire** : fiche d'exercices du chapitre, exercices 23 à 26.

VIII — Dérivée d'un produit, d'un carré

Propriété 5 — Produit et carré

u et v sont deux fonctions, de dérivées u' et v' .

Fonction	Dérivée
$u \times v$	$u' \times v + u \times v'$
u^2	$2 \times u' \times u$

Attention : la dérivée d'un produit n'est pas le produit des dérivées.

Méthode 8 — Dériver un produit, un carré

Exemples

(au tableau)

Calculer la dérivée de chaque fonction.

a) $f(x) = (2x + 1)(x^2 - 3)$

b) $g(x) = (3x - 2)^2$

À vous de jouer

Calculer la dérivée de chaque fonction.

a) $k(x) = (x + 4)(2x^2 - 1)$

b) $m(x) = (5x + 1)^2$

► **À faire** : fiche d'exercices du chapitre, exercices 27 à 30.

IX — Dérivée de l'inverse, d'un quotient

Propriété 6 — Inverse et quotient

u et v sont deux fonctions, de dérivées u' et v' , et $v(x) \neq 0$.

Fonction	Dérivée
$\frac{1}{v}$	$-\frac{v'}{v^2}$
$\frac{u}{v}$	$\frac{u' \times v - u \times v'}{v^2}$

Le dénominateur v^2 reste écrit au carré : on ne le développe pas.

Méthode 9 — Dériver un inverse, un quotient

Exemples

(au tableau)

Calculer la dérivée de chaque fonction.

a) $f(x) = \frac{1}{2x-3}$

b) $g(x) = \frac{3x+1}{x-2}$

À vous de jouer

Calculer la dérivée de chaque fonction.

a) $k(x) = \frac{1}{4x+1}$

b) $m(x) = \frac{2x-5}{x+3}$

► **À faire** : fiche d'exercices du chapitre, exercices 31 à 34.

X — Fonctions composées

Propriété 7 — Tableau de référence des fonctions composées

u est une fonction de dérivée u' (par exemple $u(x) = x^2 + 3x$, ou $u(x) = 3x + 1$).

Fonction	Dérivée
u^n	$n \times u' \times u^{n-1}$
$\cos(u)$	$-u' \times \sin(u)$
$\sin(u)$	$u' \times \cos(u)$

On dérive comme si u était x , puis on **multiplie par u'** . Cas fréquent en électricité : $\cos(\omega t + \varphi)$ a pour dérivée $-\omega \sin(\omega t + \varphi)$.

Méthode 10 — Dériver une fonction composée**Exemples**

(au tableau)

Calculer la dérivée de chaque fonction.

- a) $f(x) = (x^2 + 3x)^4$
 b) $g(x) = \cos(3x + 1)$
 c) $h(x) = 5 \sin(2x - 1)$

À vous de jouer

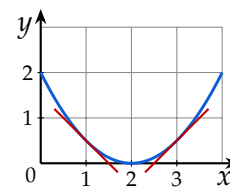
Calculer la dérivée de chaque fonction.

- a) $k(x) = (x^2 - 5x)^3$
 b) $m(x) = \cos(5x - 2)$
 c) $p(x) = 2 \sin(3x + 5)$

► **À faire** : fiche d'exercices du chapitre, exercices 35 à 39.**XI — Dérivée et sens de variation****Propriété 8 — Signe de la dérivée et variations**

Sur un intervalle :

- si $f'(x) > 0$, alors f est **croissante** ;
- si $f'(x) < 0$, alors f est **décroissante**.

(Elle le reste si f' s'annule seulement en quelques points.) Pour trouver les variations de f , on étudie donc le **signe** de $f'(x)$.

à gauche : tangentes qui descendent, f décroît ;
 à droite : tangentes qui montent, f croît

Méthode 11 — Étudier les variations d'une fonction**Exemples**

(au tableau)

Soit $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 2$ sur l'intervalle $[-2; 4]$.

- a) Calculer $f'(x)$.
 b) Étudier le signe de $f'(x)$.
 c) Dresser le tableau de variations de f .

À vous de jouerSoit $g(x) = -x^3 + 6x^2 - 9x + 1$ sur l'intervalle $[0; 4]$.

- a) Calculer $g'(x)$.
 b) Étudier le signe de $g'(x)$.
 c) Dresser le tableau de variations de g .

► **À faire** : fiche d'exercices du chapitre, exercices 40 à 45.**XII — Problèmes concrets : maximum et minimum****Propriété 9 — Extremum**Si $f'(x)$ s'annule en c **en changeant de signe**, alors f admet en c un extremum (la tangente y est horizontale) :

+ puis - : un **maximum**

x	c
$f'(x)$	+ 0 -
$f(x)$	$f(c)$

 - puis + : un **minimum**

x	c
$f'(x)$	- 0 +
$f(x)$	$f(c)$

Méthode 12 — Trouver le maximum dans un problème

Exemples

(au tableau)

Un générateur débite un courant d'intensité I (en ampères), entre 0 et 6 A. La puissance qu'il fournit, en watts, vaut $P(I) = 12I - 2I^2$.

- Calculer $P'(I)$.
- Dresser le tableau de variations de P sur $[0; 6]$.
- Pour quelle intensité la puissance est-elle maximale? Que vaut-elle?

À vous de jouer

On lance un ballon vers le haut. Au bout de t secondes (entre 0 et 4 s), il est à la hauteur $h(t) = -5t^2 + 20t + 2$, en mètres.

- Calculer $h'(t)$.
- Dresser le tableau de variations de h sur $[0; 4]$.
- À quel instant le ballon est-il le plus haut? À quelle hauteur?

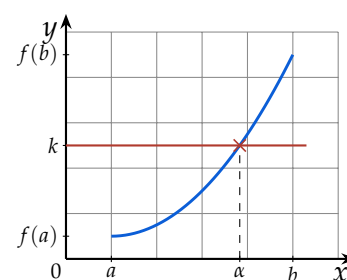
► **À faire** : fiche d'exercices du chapitre, exercices 46 à 48.

XIII — Résoudre une équation $f(x) = k$

Propriété 10 — Théorème des valeurs intermédiaires

Si f est dérivable et **strictement croissante** (ou strictement décroissante) sur $[a; b]$, et si k est **compris entre $f(a)$ et $f(b)$** , alors l'équation $f(x) = k$ a **une seule solution** α dans $[a; b]$.

La courbe monte sans sauter de $f(a)$ à $f(b)$: elle traverse une seule fois la droite d'équation $y = k$.



Méthode 13 — Montrer qu'une équation a une seule solution, l'encadrer

Exemples

(au tableau)

Soit $f(x) = x^3 + 2x - 5$ sur l'intervalle $[0; 3]$.

- Montrer que f est strictement croissante sur $[0; 3]$.
- Montrer que l'équation $f(x) = 0$ a une seule solution α dans $[0; 3]$.
- Avec le tableau de valeurs de la calculatrice, encadrer α entre deux nombres à un chiffre après la virgule.

À vous de jouer

Soit $g(x) = x^3 + 3x - 2$ sur l'intervalle $[0; 2]$.

- Montrer que g est strictement croissante sur $[0; 2]$.
- Montrer que l'équation $g(x) = 0$ a une seule solution α dans $[0; 2]$.

c) Avec le tableau de valeurs de la calculatrice, encadrer α entre deux nombres à un chiffre après la virgule.

► **À faire** : fiche d'exercices du chapitre, exercices 49 à 51.