

# DÉRIVATION ET ÉTUDE DE FONCTIONS

Cours — Première STI2D

Version élève

## Comment utiliser ce cours

Chaque partie commence par ce qu'il faut **savoir** (définitions, propriétés), puis vient ce qu'il faut **savoir faire** : une méthode, avec des **exemples** faits en classe, puis des exercices « **À vous de jouer** » à chercher seul.

Sur cette feuille, seuls les **énoncés** des exemples figurent : la résolution, signalée par la mention *(au tableau)*, est à rédiger dans le cahier.

## I — Fonctions affines et droites

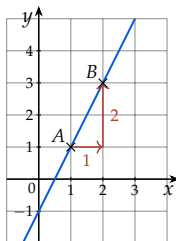
### Rappel — Fonction affine, coefficient directeur

Une fonction affine s'écrit  $f(x) = mx + p$ . Sa courbe est la droite d'équation  $y = mx + p$ .

- $p$  est l'**ordonnée à l'origine** : la droite coupe l'axe des ordonnées en  $p$ .
- $m$  est le **coefficient directeur** (la **pen**te) : quand on avance de 1, on monte de  $m$  (on descend si  $m < 0$ ).

Si la droite passe par  $A(x_A; y_A)$  et  $B(x_B; y_B)$  :

$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} \quad (\text{ce qu'on monte, divisé par ce qu'on avance}).$$



on avance de 1, on monte de 2 :  $m = 2$

### Méthode 1 — Trouver l'équation d'une droite passant par deux points

#### Exemples

Déterminer l'équation réduite de la droite  $(AB)$  dans chaque cas.

- $A(1;3)$  et  $B(3;7)$ .
- $A(-2;5)$  et  $B(2;-3)$ .

#### À vous de jouer

Déterminer l'équation réduite de la droite  $(EF)$  dans chaque cas.

- $E(1;1)$  et  $F(3;7)$ .
- $E(-1;4)$  et  $F(3;-4)$ .

► **À faire** : fiche d'exercices du chapitre, exercices 1 à 4.

## II — Nombre dérivé

### Définition 1 — Taux de variation, nombre dérivé

$A$  et  $M$  sont les points de  $C_f$  d'abscisses  $a$  et  $a+h$ .

- Le **taux de variation** de  $f$  entre  $a$  et  $a+h$  est  $T(h) = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$  : c'est le coefficient directeur de la

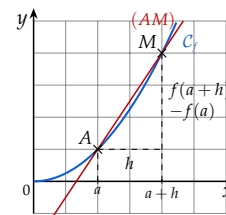
droite  $(AM)$ .

- Quand  $h$  se rapproche de 0,  $M$  glisse vers  $A$  et la droite  $(AM)$  se rapproche de la **tangente** en  $A$ . Son coefficient directeur se rapproche d'un nombre : c'est le **nombre dérivé** de  $f$  en  $a$ , noté  $f'(a)$  («  $f$  prime de  $a$  »). On écrit

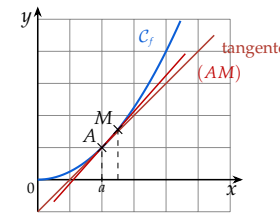
$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

(« limite quand  $h$  tend vers 0 »).

$h$  grand :  $(AM)$  s'écarte de la courbe



$h$  petit :  $(AM)$  presque confondue avec la tangente



### Méthode 2 — Calculer un nombre dérivé avec le taux de variation

#### Exemples

Soit  $f(x) = x^2 - 4x + 1$ .

- Calculer  $f(3)$ , puis  $f(3+h)$ .

- Simplifier le taux de variation  $T(h) = \frac{f(3+h) - f(3)}{h}$ .

- En déduire  $f'(3)$ .

#### À vous de jouer

Soit  $g(x) = x^2 + x - 3$ .

- Calculer  $g(1)$ , puis  $g(1+h)$ .

- Simplifier le taux de variation  $T(h) = \frac{g(1+h) - g(1)}{h}$ .

- En déduire  $g'(1)$ .

(au tableau)

► **À faire** : fiche d'exercices du chapitre, exercices 5 à 8.

## III — Tangente à une courbe

### Définition 2 — Tangente

La **tangente** à  $C_f$  au point  $A$  d'abscisse  $a$  est la droite qui

- passe par  $A(a; f(a))$ ;
- a pour coefficient directeur le nombre dérivé  $f'(a)$ .

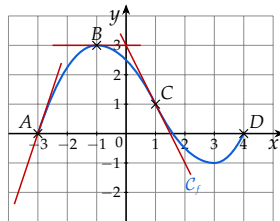
Près de  $A$ , elle « colle » à la courbe. Sur un graphique,  $f'(a)$  se lit donc comme la pente de la tangente : à partir de  $A$ , on avance de 1 et on monte de  $f'(a)$ . Une tangente horizontale correspond à  $f'(a) = 0$ .

## Méthode 3 — Lire un nombre dérivé, tracer une tangente

## Exemples

On a tracé la courbe  $C_f$  d'une fonction  $f$  et ses tangentes aux points  $A$ ,  $B$  et  $C$ .

- Lire  $f'(-3)$ ,  $f'(-1)$  et  $f'(1)$ .
- On sait que  $f'(4) = 2$ . Tracer la tangente à  $C_f$  au point  $D(4;0)$ .

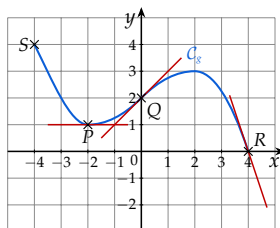


(au tableau)

## À vous de jouer

On a tracé la courbe  $C_g$  d'une fonction  $g$  et ses tangentes aux points  $P$ ,  $Q$  et  $R$ .

- Lire  $g'(-2)$ ,  $g'(0)$  et  $g'(4)$ .
- On sait que  $g'(-4) = -2$ . Tracer la tangente à  $C_g$  au point  $S(-4;4)$ .



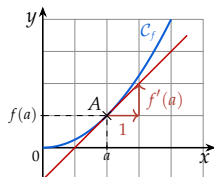
► À faire : fiche d'exercices du chapitre, exercices 9 à 11.

## IV — Équation de la tangente

## Propriété 1 — Équation de la tangente

La tangente à  $C_f$  au point  $A(a; f(a))$  a pour équation

$$y = f'(a)(x - a) + f(a).$$



**D'où vient cette formule?** La tangente est une droite de coefficient directeur  $f'(a)$  : son équation s'écrit  $y = f'(a)x + p$ . Elle passe par  $A(a; f(a))$ , ce qui donne  $p$  (comme à la méthode 1) :

$$f'(a) \times a + p = f(a) \quad \text{on remplace } x \text{ par } a \text{ et } y \text{ par } f(a)$$

$$p = f(a) - f'(a) \times a \quad \text{on isole } p$$

On remplace  $p$  dans  $y = f'(a)x + p$  :

$$y = f'(a)x + f(a) - f'(a) \times a \quad \text{on remplace } p$$

$$y = f'(a)(x - a) + f(a) \quad \text{on factorise } f'(a)x - f'(a) \times a \text{ par } f'(a)$$

## Méthode 4 — Déterminer l'équation d'une tangente

## Exemples

Soit  $f(x) = x^2 - 4x + 1$ . On admet que  $f'(1) = -2$ .

- Calculer  $f(1)$ .
- Déterminer l'équation réduite de la tangente à  $C_f$  au point d'abscisse 1.

(au tableau)

## À vous de jouer

Soit  $g(x) = x^2 + x - 3$ . On admet que  $g'(2) = 5$ .

- Calculer  $g(2)$ .
- Déterminer l'équation réduite de la tangente à  $C_g$  au point d'abscisse 2.

► À faire : fiche d'exercices du chapitre, exercices 12 à 14.

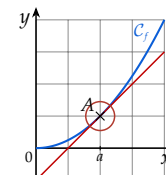
## V — Approximation affine

## Propriété 2 — La tangente remplace la courbe

Près du point d'abscisse  $a$ , la courbe et sa tangente sont presque confondues : pour  $x$  proche de  $a$ , la fonction est **à peu près égale à sa tangente**. On calcule donc avec l'équation de la tangente (propriété 1) au lieu de la fonction :

$$f(x) \simeq \underbrace{f'(a)(x - a) + f(a)}_{\text{le } y \text{ de la tangente}}.$$

C'est l'**approximation affine** de  $f$  près de  $a$  ; le signe  $\simeq$  se lit « à peu près égal à ».



dans le cercle : presque confondues

## Méthode 5 — Calculer une valeur approchée avec la tangente

## Exemples

Soit  $f(x) = x^2 - 4x + 1$ . Sa tangente au point d'abscisse 1 a pour équation  $y = -2x$  (méthode 4).

- Avec la tangente, donner une valeur approchée de  $f(1,1)$ .
- Calculer  $f(1,1)$  et comparer.

## À vous de jouer

Soit  $g(x) = x^2 + x - 3$ . Sa tangente au point d'abscisse 2 a pour équation  $y = 5x - 7$ .

- Avec la tangente, donner une valeur approchée de  $g(2,1)$ .
- Calculer  $g(2,1)$  et comparer.

► À faire : fiche d'exercices du chapitre, exercices 15 à 17.

## VI — Fonction dérivée d'une fonction polynôme

## Définition 3 — Fonction dérivée

La **fonction dérivée** de  $f$ , notée  $f'$ , associe à chaque nombre  $x$  le nombre dérivé  $f'(x)$ . Plus besoin de taux de variation : on la calcule avec des formules.

Propriété 3 — Dérivées des polynômes

| Fonction $f(x)$                | Dérivée $f'(x)$ |
|--------------------------------|-----------------|
| $k$ (un nombre)                | $0$             |
| $x$                            | $1$             |
| $mx + p$                       | $m$             |
| $x^2$                          | $2x$            |
| $x^3$                          | $3x^2$          |
| $x^n$ ( $n = 4, 5, 6, \dots$ ) | $n x^{n-1}$     |

Pour  $x^n$ , l'exposant passe devant et on lui retire 1 :  $x^5$  a pour dérivée  $5x^4$ . On dérive **terme par terme**, et un nombre qui multiplie reste devant :  $(5x^2)' = 5 \times 2x = 10x$ .

Remarque

Avec ces formules,  $f(x) = x^2 - 4x + 1$  donne  $f'(x) = 2x - 4$  : on retrouve  $f'(3) = 2$  (méthode 2) et  $f'(1) = -2$  (méthode 4), sans aucun taux de variation.

Méthode 6 — Dériver une fonction polynôme

Exemples

(au tableau)

Calculer la dérivée de chaque fonction.

- a)  $f(x) = 3x^2 - 5x + 4$
- b)  $g(x) = 2x^3 + x^2 - 7x + 1$
- c)  $h(x) = 2x^4 - x^3 + 6x$

À vous de jouer

Calculer la dérivée de chaque fonction.

- a)  $k(x) = 4x^2 + 3x - 2$
- b)  $m(x) = x^3 - 5x^2 + 2$
- c)  $p(x) = x^5 + 4x^3 - 2x$

► À faire : fiche d'exercices du chapitre, exercices 18 à 22.

VII — Autres fonctions dérivées

Propriété 4 — Inverse, cosinus et sinus

| Fonction $f(x)$                  | Dérivée $f'(x)$  |
|----------------------------------|------------------|
| $\frac{1}{x}$ (pour $x \neq 0$ ) | $-\frac{1}{x^2}$ |
| $\cos x$                         | $-\sin x$        |
| $\sin x$                         | $\cos x$         |

Pour  $\cos x$  et  $\sin x$ ,  $x$  est un angle en radians (chapitre 7). Attention au signe  $-$  : seule la dérivée de  $\cos x$  en a un.

Méthode 7 — Dériver avec l'inverse, le cosinus et le sinus

Exemples

(au tableau)

Calculer la dérivée de chaque fonction.

- a)  $f(x) = \frac{5}{x}$
- b)  $g(x) = 4x + \frac{2}{x}$
- c)  $h(x) = 3 \sin x + x^2$
- d)  $k(x) = 2 \cos x - x^3$

À vous de jouer

Calculer la dérivée de chaque fonction.

- a)  $m(x) = -\frac{3}{x}$
- b)  $p(x) = x^2 - \frac{6}{x}$
- c)  $q(x) = 4 \sin x - x$
- d)  $r(x) = 5 \cos x + 2x^2$

► À faire : fiche d'exercices du chapitre, exercices 23 à 26.

VIII — Dérivée d'un produit, d'un carré

Propriété 5 — Produit et carré

$u$  et  $v$  sont deux fonctions, de dérivées  $u'$  et  $v'$ .

| Fonction     | Dérivée                     |
|--------------|-----------------------------|
| $u \times v$ | $u' \times v + u \times v'$ |
| $u^2$        | $2 \times u' \times u$      |

Attention : la dérivée d'un produit n'est pas le produit des dérivées.

Méthode 8 — Dériver un produit, un carré

Exemples

(au tableau)

Calculer la dérivée de chaque fonction.

- a)  $f(x) = (2x + 1)(x^2 - 3)$
- b)  $g(x) = (3x - 2)^2$

À vous de jouer

Calculer la dérivée de chaque fonction.

- a)  $k(x) = (x + 4)(2x^2 - 1)$
- b)  $m(x) = (5x + 1)^2$

► À faire : fiche d'exercices du chapitre, exercices 27 à 30.

IX — Dérivée de l'inverse, d'un quotient

Propriété 6 — Inverse et quotient

$u$  et  $v$  sont deux fonctions, de dérivées  $u'$  et  $v'$ , et  $v(x) \neq 0$ .

| Fonction      | Dérivée                                 |
|---------------|-----------------------------------------|
| $\frac{1}{v}$ | $-\frac{v'}{v^2}$                       |
| $\frac{u}{v}$ | $\frac{u' \times v - u \times v'}{v^2}$ |

Le dénominateur  $v^2$  reste écrit au carré : on ne le développe pas.

Méthode 9 — Dériver un inverse, un quotient

Exemples

Calculer la dérivée de chaque fonction.

a)  $f(x) = \frac{1}{2x-3}$

b)  $g(x) = \frac{3x+1}{x-2}$

À vous de jouer

Calculer la dérivée de chaque fonction.

a)  $k(x) = \frac{1}{4x+1}$

b)  $m(x) = \frac{2x-5}{x+3}$

(au tableau)

➤ À faire : fiche d'exercices du chapitre, exercices 31 à 34.

X — Fonctions composées

Propriété 7 — Tableau de référence des fonctions composées

$u$  est une fonction de dérivée  $u'$  (par exemple  $u(x) = x^2 + 3x$ , ou  $u(x) = 3x + 1$ ).

| Fonction  | Dérivée                      |
|-----------|------------------------------|
| $u^n$     | $n \times u' \times u^{n-1}$ |
| $\cos(u)$ | $-u' \times \sin(u)$         |
| $\sin(u)$ | $u' \times \cos(u)$          |

On dérive comme si  $u$  était  $x$ , puis on **multiplie par  $u'$** . Cas fréquent en électricité :  $\cos(\omega t + \varphi)$  a pour dérivée  $-\omega \sin(\omega t + \varphi)$ .

Méthode 10 — Dériver une fonction composée

Exemples

Calculer la dérivée de chaque fonction.

a)  $f(x) = (x^2 + 3x)^4$

b)  $g(x) = \cos(3x + 1)$

c)  $h(x) = 5 \sin(2x - 1)$

À vous de jouer

Calculer la dérivée de chaque fonction.

a)  $k(x) = (x^2 - 5x)^3$

b)  $m(x) = \cos(5x - 2)$

c)  $p(x) = 2 \sin(3x + 5)$

(au tableau)

➤ À faire : fiche d'exercices du chapitre, exercices 35 à 39.

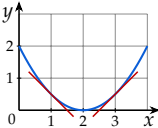
XI — Dérivée et sens de variation

Propriété 8 — Signe de la dérivée et variations

Sur un intervalle :

- si  $f'(x) > 0$ , alors  $f$  est **croissante** ;
- si  $f'(x) < 0$ , alors  $f$  est **décroissante**.

(Elle le reste si  $f'$  s'annule seulement en quelques points.) Pour trouver les variations de  $f$ , on étudie donc le **signe** de  $f'(x)$ .



à gauche : tangentes qui descendent,  $f$  décroît ;  
à droite : tangentes qui montent,  $f$  croît

Méthode 11 — Étudier les variations d'une fonction

Exemples

Soit  $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 2$  sur l'intervalle  $[-2; 4]$ .

a) Calculer  $f'(x)$ .

b) Étudier le signe de  $f'(x)$ .

c) Dresser le tableau de variations de  $f$ .

À vous de jouer

Soit  $g(x) = -x^3 + 6x^2 - 9x + 1$  sur l'intervalle  $[0; 4]$ .

a) Calculer  $g'(x)$ .

b) Étudier le signe de  $g'(x)$ .

c) Dresser le tableau de variations de  $g$ .

(au tableau)

➤ À faire : fiche d'exercices du chapitre, exercices 40 à 45.

XII — Problèmes concrets : maximum et minimum

Propriété 9 — Extremum

Si  $f'(x)$  s'annule en  $c$  **en changeant de signe**, alors  $f$  admet en  $c$  un extremum (la tangente y est horizontale) :

+ puis - : un **maximum**

|         |        |
|---------|--------|
| $x$     | $c$    |
| $f'(x)$ | + 0 -  |
| $f(x)$  | $f(c)$ |

- puis + : un **minimum**

|         |        |
|---------|--------|
| $x$     | $c$    |
| $f'(x)$ | - 0 +  |
| $f(x)$  | $f(c)$ |

Méthode 12 — Trouver le maximum dans un problème

Exemples (au tableau)

Un générateur débite un courant d'intensité  $I$  (en ampères), entre 0 et 6 A. La puissance qu'il fournit, en watts, vaut  $P(I) = 12I - 2I^2$ .

- a) Calculer  $P'(I)$ .
- b) Dresser le tableau de variations de  $P$  sur  $[0; 6]$ .
- c) Pour quelle intensité la puissance est-elle maximale? Que vaut-elle?

À vous de jouer

On lance un ballon vers le haut. Au bout de  $t$  secondes (entre 0 et 4 s), il est à la hauteur  $h(t) = -5t^2 + 20t + 2$ , en mètres.

- a) Calculer  $h'(t)$ .
- b) Dresser le tableau de variations de  $h$  sur  $[0; 4]$ .
- c) À quel instant le ballon est-il le plus haut? À quelle hauteur?

► À faire : fiche d'exercices du chapitre, exercices 46 à 48.

XIII — Résoudre une équation  $f(x) = k$

Propriété 10 — Théorème des valeurs intermédiaires

Si  $f$  est dérivable et **strictement croissante** (ou strictement décroissante) sur  $[a; b]$ , et si  $k$  est **compris entre  $f(a)$  et  $f(b)$** , alors l'équation  $f(x) = k$  a **une seule solution  $\alpha$**  dans  $[a; b]$ .

La courbe monte sans sauter de  $f(a)$  à  $f(b)$  : elle traverse une seule fois la droite d'équation  $y = k$ .

Méthode 13 — Montrer qu'une équation a une seule solution, l'encadrer

Exemples (au tableau)

Soit  $f(x) = x^3 + 2x - 5$  sur l'intervalle  $[0; 3]$ .

- a) Montrer que  $f$  est strictement croissante sur  $[0; 3]$ .
- b) Montrer que l'équation  $f(x) = 0$  a une seule solution  $\alpha$  dans  $[0; 3]$ .
- c) Avec le tableau de valeurs de la calculatrice, encadrer  $\alpha$  entre deux nombres à un chiffre après la virgule.

À vous de jouer

Soit  $g(x) = x^3 + 3x - 2$  sur l'intervalle  $[0; 2]$ .

- a) Montrer que  $g$  est strictement croissante sur  $[0; 2]$ .
- b) Montrer que l'équation  $g(x) = 0$  a une seule solution  $\alpha$  dans  $[0; 2]$ .

c) Avec le tableau de valeurs de la calculatrice, encadrer  $\alpha$  entre deux nombres à un chiffre après la virgule.

► À faire : fiche d'exercices du chapitre, exercices 49 à 51.