

1^{re} STI2D — Dérivation et étude de fonctions

Fiche d'exercices du chapitre

I — Fonctions affines et droites

Exercice 1 : Coefficient directeur

Pour chaque couple de points, calculer le coefficient directeur de la droite (AB).

- $A(1;2)$ et $B(3;8)$
- $A(-1;4)$ et $B(2;-2)$
- $A(0;-3)$ et $B(4;-1)$
- $A(-3;5)$ et $B(1;5)$

Exercice 2 : Équation d'une droite

Pour chaque couple de points, déterminer l'équation réduite de la droite (AB).

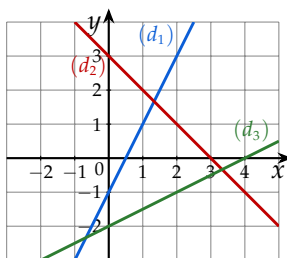
- $A(1;1)$ et $B(2;4)$
- $A(-1;5)$ et $B(1;1)$
- $A(-2;-3)$ et $B(2;5)$
- $A(2;0)$ et $B(6;2)$

Exercice 3 : Une fonction affine par deux images

- f est affine, avec $f(2) = 7$ et $f(-1) = -2$. Déterminer $f(x)$, puis calculer $f(10)$.
- g est affine, avec $g(-3) = 8$ et $g(1) = 0$. Déterminer $g(x)$, puis calculer $g(5)$.

Exercice 4 : Lire des équations

Lire l'équation réduite de chacune des droites (d_1) , (d_2) et (d_3) .



II — Nombre dérivé

Exercice 5 : Nombre dérivé en 1

Soit $f(x) = x^2 + 2x - 1$.

- Calculer $f(1)$, puis $f(1+h)$.
- Simplifier le taux de variation $T(h) = \frac{f(1+h) - f(1)}{h}$.
- En déduire $f'(1)$.

Exercice 6 : Nombre dérivé en 2

Soit $g(x) = 2x^2 - 3x$. Calculer $g(2)$ et $g(2+h)$, simplifier le taux de variation $T(h) = \frac{g(2+h) - g(2)}{h}$, puis en déduire $g'(2)$.

Exercice 7 : Avec un coefficient négatif

Soit $k(x) = -x^2 + 5x$. Calculer $k(1)$ et $k(1+h)$, simplifier le taux de variation $T(h) = \frac{k(1+h) - k(1)}{h}$, puis en déduire $k'(1)$.

Exercice 8 : À la calculatrice

Soit $f(x) = x^2$ et $a = 4$.

- Compléter le tableau, où $T(h) = \frac{f(4+h) - f(4)}{h}$.

h	1	0,1	0,01
$T(h)$			

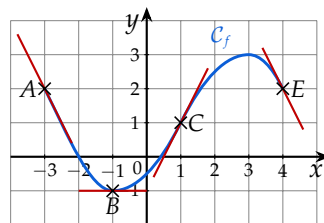
- Quelle valeur de $f'(4)$ ce tableau suggère-t-il ?

III — Tangente à une courbe

Exercice 9 : Lire des nombres dérivés

On a tracé C_f et ses tangentes aux points A, B, C et E.

Lire $f'(-3)$, $f'(-1)$, $f'(1)$ et $f'(4)$.



Exercice 10 : Tracer des tangentes

Dans un repère, placer chaque point de C_f , puis tracer la tangente à C_f en ce point.

- $A(0;1)$ et $f'(0) = 2$
- $B(1;3)$ et $f'(1) = -1$
- $C(-2;-1)$ et $f'(-2) = \frac{1}{2}$
- $D(3;-2)$ et $f'(3) = 0$

Exercice 11 : Retrouver l'allure d'une courbe

Dans un repère, tracer une courbe qui passe par $A(-3;-2)$, $B(-1;2)$, $C(1;0)$ et $D(3;-2)$, avec $f'(-3) = 3$, $f'(-1) = 0$, $f'(1) = -2$ et $f'(3) = 0$. Commencer par tracer les quatre tangentes.

IV — Équation de la tangente

Exercice 12 : Avec un nombre dérivé admis

Soit $f(x) = x^2 - 3x + 2$. On admet que $f'(4) = 5$ et $f'(1) = -1$.

- Calculer $f(4)$, puis déterminer l'équation réduite de la tangente à C_f au point d'abscisse 4.
- Même question au point d'abscisse 1.

Exercice 13 : Quatre tangentes

Pour chaque cas, déterminer l'équation réduite de la tangente à C_f au point d'abscisse a .

- $a = 2$; $f(2) = 3$ et $f'(2) = 1$
- $a = -1$; $f(-1) = 4$ et $f'(-1) = -2$
- $a = 3$; $f(3) = -1$ et $f'(3) = 0$
- $a = 0$; $f(0) = 5$ et $f'(0) = -3$

Exercice 14 : Du taux de variation à la tangente

Soit $f(x) = -x^2 + 3x + 1$.

- Calculer $f(2)$, puis $f(2+h)$.
- Simplifier le taux de variation $T(h) = \frac{f(2+h) - f(2)}{h}$ et en déduire $f'(2)$.
- Déterminer l'équation réduite de la tangente à C_f au point d'abscisse 2.

V — Approximation affine

Exercice 15 : Le carré de 3,02

Soit $f(x) = x^2$. Sa tangente au point d'abscisse 3 a pour équation $y = 6x - 9$.

- Avec la tangente, donner une valeur approchée de $f(3,02)$, puis calculer $f(3,02)$ et comparer.
- Même question pour $f(2,99)$.

Exercice 16 : Une fonction inverse

Soit $f(x) = \frac{1}{x-1}$ pour $x \neq 1$. On admet que $f'(2) = -1$.

- Calculer $f(2)$, puis déterminer l'équation de la tangente au point d'abscisse 2.
- Avec la tangente, donner une valeur approchée de $f(2,1)$.
- Calculer $f(2,1)$ à la calculatrice et comparer.

Exercice 17 : Une plaque qui se dilate

Une plaque carrée de côté c (en cm) a pour aire $A(c) = c^2$. On admet que $A'(10) = 20$. Chauffée, la plaque passe de 10 cm à 10,1 cm de côté.

- Déterminer l'équation de la tangente à la courbe de A au point d'abscisse 10.
- En déduire une valeur approchée de l'aire de la plaque chauffée.
- Calculer l'aire exacte et comparer.

VI — Fonction dérivée d'une fonction polynôme**Exercice 18 : Dériver**

Calculer la dérivée de chaque fonction.

- | | |
|--------------------------|-----------------------------|
| a) $f(x) = 7x - 5$ | e) $m(x) = -5x^2 + 10x$ |
| b) $g(x) = 1 - 4x$ | f) $p(x) = x^3 + 4x^2 - x$ |
| c) $h(x) = x^2 + 6x - 2$ | g) $q(x) = 2x^4 - 3x^2 + 1$ |
| d) $k(x) = 3x^2 - x + 8$ | h) $r(x) = -x^5 + 2x^3$ |

Exercice 19 : Degré 3 et plus

Calculer la dérivée de chaque fonction.

- $f(x) = 4x^3 - 6x^2 + 5x - 1$
- $g(x) = x^6 - x^4$
- $h(x) = -2x^5 + x^3 - 7x$
- $k(x) = 5 - 3x^4$
- $m(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x$

Exercice 20 : Entraînement

Calculer la dérivée de chaque fonction.

- | | |
|---------------------------------|---------------------------------|
| a) $f(x) = 6x - 2$ | e) $m(x) = -3x^4 + 6x$ |
| b) $g(x) = -x^2 + 4x - 3$ | f) $p(x) = 2x^5 - 5x^2 + 3$ |
| c) $h(x) = 5x^3 - 2x^2$ | g) $q(x) = \frac{1}{2}x^2 + 3x$ |
| d) $k(x) = x^4 + x^3 + x^2 + x$ | h) $r(x) = \frac{1}{4}x^4 - x$ |

Exercice 21 : Développer d'abord

Développer chaque expression, puis calculer sa dérivée.

- | | |
|-----------------------------|------------------------|
| a) $A(x) = (x - 1)(x + 4)$ | c) $C(x) = (x + 2)^2$ |
| b) $B(x) = (2x + 1)(x - 3)$ | d) $D(x) = x(x^2 - 5)$ |

Exercice 22 : Dérivée et tangentes

Soit $f(x) = x^3 - 2x + 1$.

- Calculer $f'(x)$.
- Calculer $f(1)$ et $f'(1)$, puis déterminer l'équation de la tangente au point d'abscisse 1.
- Même question au point d'abscisse 0.

VII — Autres fonctions dérivées**Exercice 23 : Inverse, cosinus, sinus**

Calculer la dérivée de chaque fonction.

- | | |
|--------------------------|---------------------------------|
| a) $f(x) = \frac{4}{x}$ | e) $m(x) = 2 \cos x - 3 \sin x$ |
| b) $g(x) = -\frac{7}{x}$ | f) $p(x) = x^4 - \frac{1}{x}$ |
| c) $h(x) = \cos x + 3x$ | g) $q(x) = \frac{6}{x} + 2x^2$ |
| d) $k(x) = 5 \sin x$ | h) $r(x) = -\sin x + x^3$ |

Exercice 24 : Entraînement

Calculer la dérivée de chaque fonction.

- | | |
|-----------------------------|------------------------------------|
| a) $f(x) = \frac{3}{x} + x$ | d) $k(x) = x^3 - \frac{5}{x}$ |
| b) $g(x) = 4 \cos x + x^2$ | e) $m(x) = \sin x - \cos x$ |
| c) $h(x) = -2 \sin x + 5$ | f) $p(x) = \frac{1}{x} - 3 \cos x$ |

Exercice 25 : Tangentes à la courbe de $\frac{2}{x}$

Soit $f(x) = \frac{2}{x}$ pour $x \neq 0$.

- Calculer $f'(x)$.
- Déterminer l'équation de la tangente au point d'abscisse 1.

c) Même question au point d'abscisse 2.

Exercice 26 : Sinus et cosinus près de 0

- Soit $f(x) = \sin x$. Calculer $f'(0)$, puis déterminer l'équation de la tangente au point d'abscisse 0.
- En déduire une valeur approchée de $\sin(0,1)$; comparer avec la calculatrice (en radians).
- Soit $g(x) = \cos x$. Calculer $g'(0)$. Que peut-on dire de la tangente au point d'abscisse 0?

VIII — Dérivée d'un produit, d'un carré**Exercice 27 : Des carrés**

Calculer la dérivée de chaque fonction, avec la formule de u^2 .

- | | |
|------------------------|-------------------------|
| a) $f(x) = (4x + 1)^2$ | c) $h(x) = (x^2 + 3)^2$ |
| b) $g(x) = (2 - 5x)^2$ | d) $k(x) = (x^3 - 1)^2$ |

Exercice 28 : Des produits

Calculer la dérivée de chaque fonction, avec la formule de $u \times v$.

- $f(x) = (x + 2)(3x - 1)$
- $g(x) = (2x - 3)(x^2 + 1)$
- $h(x) = x^2(4x + 5)$
- $k(x) = (x^2 - x)(x^2 + 2)$
- $m(x) = x \sin x$

Exercice 29 : Entraînement

Calculer la dérivée de chaque fonction.

- | | |
|-------------------------------|-------------------------------|
| a) $f(x) = (3x + 1)(x - 2)$ | d) $k(x) = (3 - x^2)^2$ |
| b) $g(x) = (x + 5)^2$ | e) $m(x) = x^2 \cos x$ |
| c) $h(x) = (x^2 - 4)(2x + 3)$ | f) $p(x) = (2x - 1)(x^3 + x)$ |

Exercice 30 : Deux façons de faire

Soit $f(x) = (x + 3)(2x - 1)$.

- Calculer $f'(x)$ avec la formule du produit.
- Développer $f(x)$, puis le dériver.
- Comparer les deux résultats.

IX — Dérivée de l'inverse, d'un quotient**Exercice 31 : Des inverses**

Calculer la dérivée de chaque fonction.

- | | |
|------------------------------|-------------------------------|
| a) $f(x) = \frac{1}{3x + 2}$ | c) $h(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$ |
| b) $g(x) = \frac{1}{1 - 4x}$ | d) $k(x) = \frac{5}{2x - 1}$ |

Exercice 32 : Des quotients

Calculer la dérivée de chaque fonction.

- | | |
|----------------------------------|-----------------------------------|
| a) $f(x) = \frac{x + 4}{x - 1}$ | c) $h(x) = \frac{3x}{x + 1}$ |
| b) $g(x) = \frac{2x - 1}{x + 2}$ | d) $k(x) = \frac{x^2 + 1}{x - 2}$ |

Exercice 33 : Entraînement

Calculer la dérivée de chaque fonction.

- | | |
|----------------------------------|-----------------------------------|
| a) $f(x) = \frac{1}{x + 5}$ | d) $k(x) = \frac{4x + 1}{2x - 3}$ |
| b) $g(x) = \frac{4x - 1}{x - 3}$ | e) $m(x) = \frac{2}{x^2 + 4}$ |
| c) $h(x) = \frac{x - 3}{x + 2}$ | f) $p(x) = \frac{x^2}{x + 1}$ |

Exercice 34 : Quotient et tangente

Soit $f(x) = \frac{2x + 1}{x - 1}$ pour $x \neq 1$.

- Calculer $f'(x)$.
- Calculer $f(2)$ et $f'(2)$, puis déterminer l'équation de la tangente au point d'abscisse 2.

X — Fonctions composées

Exercice 35 : Des puissances

Calculer la dérivée de chaque fonction, avec la formule de u^n .

- a) $f(x) = (3x - 2)^4$ c) $h(x) = (1 - 2x)^5$
b) $g(x) = (x^2 + 1)^3$ d) $k(x) = (x^3 + x)^2$

Exercice 36 : Cosinus et sinus composés

Calculer la dérivée de chaque fonction.

- a) $f(x) = \cos(4x)$ c) $h(x) = 3 \cos(5x - 1)$
b) $g(x) = \sin(2x + 3)$ d) $k(t) = 2 \sin(100t)$

Exercice 37 : Entraînement

Calculer la dérivée de chaque fonction.

- a) $f(x) = (5x + 2)^3$ d) $k(x) = 4 \sin(x^2)$
b) $g(x) = (x^2 - 3x)^4$ e) $m(t) = 5 \cos(100t + 1)$
c) $h(x) = \cos(3x - 2)$ f) $p(x) = (2 - x)^6$

Exercice 38 : Un piston

La position d'un piston, en cm, au bout de t secondes, est $p(t) = 6 \cos(2t)$. Sa vitesse, en cm/s, est la dérivée $p'(t)$.

- a) Calculer $p'(t)$.
b) Quelle est la vitesse du piston à l'instant $t = 0$?
c) Sachant que $\sin(2t)$ est toujours compris entre -1 et 1 , quelle est la plus grande vitesse possible du piston (en valeur absolue)?

Exercice 39 : Dérivées en vrac

Pour chaque fonction, choisir la bonne formule, puis calculer la dérivée.

- a) $f(x) = 3x^4 - \frac{2}{x}$ d) $k(x) = \frac{4}{x^2 + 3}$
b) $g(x) = (x^2 + 1)(x - 3)$ e) $m(x) = \frac{x - 1}{x^2 + 1}$
c) $h(x) = (2x + 5)^3$ f) $p(x) = x \cos x$

XI — Dérivée et sens de variation

Exercice 40 : Du signe de f' aux variations

Voici le signe de $f'(x)$ sur $[-4; 5]$. On sait que $f(-4) = 2$, $f(-1) = -3$, $f(3) = 4$ et $f(5) = 1$.

x	-4	-1	3	5	
$f'(x)$	-	0	+	0	-

Dresser le tableau de variations de f .

Exercice 41 : Un trinôme

Soit $f(x) = x^2 - 6x + 5$ sur $[0; 6]$.

- a) Calculer $f'(x)$ et étudier son signe.
b) Dresser le tableau de variations de f .

Exercice 42 : Un polynôme de degré 3

Soit $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$ sur $[-1; 3]$.

- a) Calculer $f'(x)$.
b) Étudier le signe de $f'(x)$.
c) Dresser le tableau de variations de f .

Exercice 43 : Un coefficient négatif

Soit $g(x) = -2x^3 + 3x^2 + 12x - 5$ sur $[-2; 3]$.

- a) Calculer $g'(x)$.
b) Étudier le signe de $g'(x)$.
c) Dresser le tableau de variations de g .

Exercice 44 : Un quotient

Soit $f(x) = \frac{2x + 1}{x + 1}$ sur $[0; 4]$.

- a) Montrer que $f'(x) = \frac{1}{(x + 1)^2}$.
b) En déduire le sens de variation de f sur $[0; 4]$, puis dresser son tableau de variations.

Exercice 45 : Étude complète et tracé

Soit $f(x) = x^3 - 3x$ sur $[-2; 2]$.

- a) Calculer $f'(x)$ et étudier son signe.
b) Dresser le tableau de variations de f .
c) Déterminer l'équation de la tangente T au point d'abscisse 0.
d) Compléter un tableau de valeurs de f pour $x = -2, -1, 0, 1$ et 2 .
e) Dans un repère, tracer T , puis C_f .

XII — Problèmes concrets : maximum et minimum

Exercice 46 : Un coût minimal

Une usine fabrique q dizaines de pièces par jour, avec $0 \leq q \leq 25$. Le coût de fabrication, en euros, est

$$C(q) = q^2 - 30q + 300.$$

- a) Calculer $C'(q)$.
b) Dresser le tableau de variations de C sur $[0; 25]$.
c) Combien de pièces faut-il fabriquer pour que le coût soit minimal? Que vaut-il?

Exercice 47 : La boîte la plus grande

Dans un carton carré de 12 cm de côté, on découpe aux quatre coins un carré de côté x (en cm), puis on relève les bords pour former une boîte sans couvercle. Son volume est $V(x) = x(12 - 2x)^2$, pour $0 \leq x \leq 6$.

- a) Montrer que $V(x) = 4x^3 - 48x^2 + 144x$.
b) Calculer $V'(x)$.
c) Étudier le signe de $V'(x)$ sur $[0; 6]$.
d) Dresser le tableau de variations de V .
e) Pour quelle valeur de x le volume est-il maximal? Que vaut-il?

Exercice 48 : Le tambour d'une machine à laver

Après l'essorage, le tambour d'une machine à laver tourne librement jusqu'à l'arrêt. Au bout de t secondes, il a fait $N(t) = -0,5t^2 + 20t$ tours, pour $0 \leq t \leq 40$. Sa vitesse de rotation, en tours par seconde, est $N'(t)$.

- a) Calculer $N'(t)$.
b) Au bout de combien de secondes le tambour s'arrête-t-il?
c) Combien de tours a-t-il faits jusqu'à l'arrêt?

XIII — Résoudre une équation $f(x) = k$

Exercice 49 : Nombre de solutions

Voici le tableau de variations d'une fonction f dérivable sur $[-3; 4]$.

x	-3	0	2	4
$f(x)$	-2	5	-4	1

Pour chaque équation, donner le nombre de solutions et un intervalle qui contient chacune d'elles.

- a) $f(x) = 0$ c) $f(x) = -3$
b) $f(x) = 3$ d) $f(x) = 6$

Exercice 50 : Une seule solution

Soit $f(x) = x^3 + x - 3$ sur $[0; 2]$.

- a) Montrer que f est strictement croissante sur $[0; 2]$.
b) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ a une seule solution α dans $[0; 2]$.
c) Avec la calculatrice, encadrer α entre deux nombres à un chiffre après la virgule.

Exercice 51 : Trois solutions

Soit $g(x) = x^3 - 12x$ sur $[-4; 4]$.

- Calculer $g'(x)$ et étudier son signe.
- Dresser le tableau de variations de g .
- Combien de solutions l'équation $g(x) = 5$ a-t-elle dans $[-4; 4]$?
- Encadrer la plus grande d'entre elles entre deux nombres à un chiffre après la virgule.