

POLYNÔMES DU SECOND DEGRÉ

Cours — Première STI2D

Comment utiliser ce cours

Chaque partie commence par ce qu'il faut **savoir** (définitions, théorèmes), puis vient ce qu'il faut **savoir faire** : une méthode, avec des **exemples corrigés** faits en classe, puis des exercices « À vous de jouer » à chercher seul.

I — Fonction polynôme du second degré

Définition 1 — Fonction polynôme du second degré

Une **fonction polynôme de degré 2**, ou **trinôme**, est une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = ax^2 + bx + c \quad \text{avec } a \neq 0.$$

Les nombres a , b et c sont ses **coefficients**. Si $a = 0$, il reste $bx + c$: c'est une fonction affine.

Exemples et contre-exemple

$f(x) = 2x^2 - 5x + 1$ et $g(x) = 7 - 3x^2$ sont des trinômes. En revanche, $h(x) = 4x + 1$ n'en est pas un : il n'y a pas de x^2 .

Méthode 1 — Identifier les coefficients a , b et c

Exemples corrigés

Donner, quand c'est possible, les coefficients a , b et c :

a) $P(x) = 4x^2 - 3x + 7$; $R(x) = -x^2 + \frac{3}{4}x$; $T(x) = \frac{2}{3}x^2 - 5$

b) $U(x) = (x + 3)^2 - 2(x - 1)$

c) $V(x) = (x + 2)^2 - x^2$

a)

$P : a = 4, b = -3, c = 7.$

on lit chaque coefficient avec son signe

$R : a = -1, b = \frac{3}{4}, c = 0.$

$-x^2 = -1 \times x^2$; pas de nombre seul : $c = 0$

$T : a = \frac{2}{3}, b = 0, c = -5.$

pas de terme en x : $b = 0$

b)

$U(x) = (x + 3)^2 - 2(x - 1)$ *des parenthèses : on développe d'abord*

$U(x) = x^2 + 6x + 9 - 2x + 2$ *identité remarquable, puis distributivité*

$U(x) = x^2 + 4x + 11$ *on réduit et on range*

$a = 1, b = 4, c = 11.$

c)

$V(x) = x^2 + 4x + 4 - x^2$ *on développe*

$V(x) = 4x + 4$ *les x^2 s'éliminent*

V n'est pas un trinôme : c'est une fonction affine.

$a = 0$

À vous de jouer

Donner, quand c'est possible, les coefficients a , b et c :

$$f(x) = 3 - 2x^2 \quad g(x) = (3x - 1)(x + 2) \quad h(x) = 3(x - 1)^2 - 3x^2$$

Réponses : $f : a = -2, b = 0, c = 3$; $g(x) = 3x^2 + 5x - 2$; $h(x) = -6x + 3$: pas un trinôme.

► **À faire** : fiche d'exercices du chapitre, exercices 1 à 4.

II — Forme factorisée et racines**Définition 2 — Forme factorisée, racines**

Une fonction $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$, avec $a \neq 0$, est un trinôme écrit sous **forme factorisée**.

Les **racines** d'un polynôme f sont les solutions de $f(x) = 0$: ce sont les abscisses des points où sa courbe coupe l'axe des abscisses.

Exemple

Soit $f(x) = 3(x - 1)(x - 2)$. On développe :

$$f(x) = 3(x^2 - 2x - x + 2) \quad \text{on développe d'abord les deux parenthèses}$$

$$f(x) = 3(x^2 - 3x + 2)$$

$$f(x) = 3x^2 - 9x + 6 \quad \text{puis on multiplie par 3}$$

f est bien un trinôme : $a = 3, b = -9, c = 6$. partie I

Avec la forme développée, on calcule $f(1)$, $f(2)$ et $f(3)$:

$$f(1) = 3 - 9 + 6 = 0 \quad 1 \text{ est une racine de } f$$

$$f(2) = 12 - 18 + 6 = 0 \quad 2 \text{ est une racine de } f$$

$$f(3) = 27 - 27 + 6 = 6 \quad f(3) \neq 0 : 3 \text{ n'est pas une racine}$$

Les racines 1 et 2 se lisaient déjà dans la forme factorisée $3(x - 1)(x - 2)$.

Propriété 1 — Racines et forme factorisée

Les racines de $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$ sont x_1 et x_2 (éventuellement égales) : elles se lisent sans calcul, en changeant le signe. Dans $(x - 4)$, la racine est 4 ; dans $(x + 2)$, elle est -2 .

Démonstration. Un produit est nul si et seulement si l'un de ses facteurs est nul ; comme $a \neq 0$, $a(x - x_1)(x - x_2) = 0$ équivaut à $x = x_1$ ou $x = x_2$.

Remarque

Tous les trinômes ne se factorisent pas : $x^2 + 4$ n'a pas de racine, car $x^2 + 4 \geq 4$ pour tout x . Le **discriminant** (partie III) dira lesquels se factorisent.

Méthode 2 — Développer une forme factorisée, lire les racines**Exemples corrigés**

- Développer $f(x) = -2(x - 3)(x + 1)$ et donner ses racines.
- Même question pour $g(x) = -2(x + 5)(x + 3)$.
- Résoudre $-2(x - 3)(x + 1) = 0$, puis $-2(x + 5)(x + 3) = 0$.

a)

$$f(x) = -2(x^2 + x - 3x - 3) \quad \text{on développe d'abord les deux parenthèses}$$

$$f(x) = -2(x^2 - 2x - 3)$$

$$f(x) = -2x^2 + 4x + 6 \quad \text{puis on multiplie par } a = -2$$

Racines : 3 et -1.

*on annule chaque parenthèse***b)**

$$g(x) = -2(x^2 + 3x + 5x + 15) \quad \text{on développe d'abord les deux parenthèses}$$

$$g(x) = -2(x^2 + 8x + 15)$$

$$g(x) = -2x^2 - 16x - 30 \quad \text{puis on multiplie par } a = -2$$

Racines : -5 et -3.

$$x + 5 = 0 \text{ donne } x = -5$$

c)

$$S = \{-1; 3\} \quad \text{et} \quad S = \{-5; -3\}.$$

*produit nul; le facteur -2 ne s'annule jamais***À vous de jouer**

Développer, puis donner les racines :

$$f(x) = (x - 4)(x + 1) \quad g(x) = -3(x + 2)(x - 5) \quad h(x) = 2(x + 1)(x + 3)$$

Réponses : $f(x) = x^2 - 3x - 4$, racines 4 et -1; $g(x) = -3x^2 + 9x + 30$, racines -2 et 5; $h(x) = 2x^2 + 8x + 6$, racines -1 et -3.

► **À faire** : fiche d'exercices du chapitre, exercices 5 à 8.**III — Le discriminant****Définition 3 — Discriminant**Le **discriminant** du trinôme $ax^2 + bx + c$ est le nombre

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

(lire « delta »). Son signe va dire si le trinôme a deux racines, une seule ou aucune.

Méthode 3 — Calculer un discriminant**Exemples corrigés**Pour chaque trinôme P , Q , R , S , calculer le discriminant et donner son signe :

$$P(x) = 2x^2 + 3x - 2 \quad Q(x) = x^2 - 6x + 9 \quad R(x) = -3x^2 + 2x - 4 \quad S(x) = 9x^2 - 4$$

Résolution

$$\Delta_P = 3^2 - 4 \times 2 \times (-2) \quad a = 2, b = 3, c = -2; \text{ un nombre négatif entre parenthèses}$$

$$\Delta_P = 25 \quad 9 + 16 : \Delta_P > 0$$

$$\Delta_Q = (-6)^2 - 4 \times 1 \times 9 \quad b^2 \text{ est toujours positif : } (-6)^2 = 36$$

$$\Delta_Q = 0$$

$$\Delta_R = 2^2 - 4 \times (-3) \times (-4) \quad -4ac : \text{ attention aux deux signes } -$$

$$\Delta_R = -44 \quad 4 - 48 : \Delta_R < 0$$

$$\Delta_S = 0^2 - 4 \times 9 \times (-4) \quad \text{pas de terme en } x : b = 0$$

$$\Delta_S = 144 \quad \Delta_S > 0$$

À vous de jouer

Calculer le discriminant et donner son signe :

$$f(x) = 4x^2 - 4x + 1 \quad g(x) = 3x^2 + 2x + 1 \quad h(x) = -x^2 + 2x + 8$$

Réponses : $\Delta_f = 16 - 16 = 0$; $\Delta_g = 4 - 12 = -8 < 0$; $\Delta_h = 4 + 32 = 36 > 0$.

► **À faire** : fiche d'exercices du chapitre, exercices 9 à 11.

IV — Racines du trinôme et équations du second degré**Théorème 1 — Les trois cas**

Pour l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ (avec $a \neq 0$) et $\Delta = b^2 - 4ac$:

- si $\Delta > 0$: deux solutions, $x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$;
- si $\Delta = 0$: une seule solution, la racine double $x_0 = \frac{-b}{2a}$;
- si $\Delta < 0$: aucune solution ($\sqrt{\Delta}$ n'existe pas).

Méthode 4 — Résoudre une équation du second degré**Exemples corrigés**

Résoudre dans $\mathbb{R}$:

- $2x^2 + 5x - 3 = 0$
- $x^2 + 6x + 9 = 0$
- $2x^2 - 3x + 4 = 0$
- $3x^2 + x - 5 = 2x^2 + 7$
- $x^2 - 9 = 0$; $2x^2 + 10x = 0$; $x^2 = 5$

a)

$$\Delta = 5^2 - 4 \times 2 \times (-3) \quad a = 2, b = 5, c = -3$$

$$\Delta = 49 \quad \Delta > 0 : \text{deux solutions ; } \sqrt{49} = 7$$

$$x_1 = \frac{-5 - 7}{4} = -3 \quad 2a = 4$$

$$x_2 = \frac{-5 + 7}{4} = \frac{1}{2}$$

$$S = \left\{-3; \frac{1}{2}\right\}.$$

b)

$$\Delta = 6^2 - 4 \times 1 \times 9$$

$$\Delta = 0 \quad \text{une seule solution}$$

$$x_0 = \frac{-6}{2} = -3 \quad x_0 = \frac{-b}{2a}$$

$$S = \{-3\}.$$

c)

$$\Delta = (-3)^2 - 4 \times 2 \times 4$$

$$\Delta = -23 \quad 9 - 32 : \Delta < 0$$

$$S = \emptyset.$$

aucune solution

d)

$$3x^2 + x - 5 = 2x^2 + 7 \quad \text{on recopie}$$

$$x^2 + x - 12 = 0 \quad \text{tout dans le membre de gauche}$$

$$\Delta = 1^2 - 4 \times 1 \times (-12)$$

$$\Delta = 49$$

$$x_1 = \frac{-1 - 7}{2} = -4$$

$$x_2 = \frac{-1 + 7}{2} = 3$$

$$S = \{-4; 3\}.$$

e)

Ces trois équations se résolvent sans Δ .*plus rapide et plus sûr que le discriminant*

$$x^2 - 9 = 0 \quad \text{on recopie}$$

$$(x - 3)(x + 3) = 0 \quad \text{différence de deux carrés}$$

$$x - 3 = 0 \quad \text{ou} \quad x + 3 = 0 \quad \text{produit nul}$$

$$S = \{-3; 3\}.$$

$$2x^2 + 10x = 0 \quad \text{on recopie}$$

$$2x(x + 5) = 0 \quad \text{pas de nombre seul : facteur commun } 2x$$

$$2x = 0 \quad \text{ou} \quad x + 5 = 0 \quad \text{produit nul}$$

$$S = \{-5; 0\}.$$

$$x^2 = 5 \quad \text{pas de terme en } x : x^2 \text{ est déjà isolé}$$

$$x = -\sqrt{5} \quad \text{ou} \quad x = \sqrt{5} \quad 5 > 0 : \text{deux solutions}$$

$$S = \{-\sqrt{5}; \sqrt{5}\}.$$

À vous de jouerRésoudre dans $\mathbb{R}$:

$$x^2 - 7x + 10 = 0 \quad 3x^2 - 2x + 2 = 0 \quad 9x^2 + 6x + 1 = 0 \quad x^2 - 6x = 0$$

Réponses : $\Delta = 9 : S = \{2; 5\}$; $\Delta = -20 : S = \emptyset$; $\Delta = 0 : S = \{-\frac{1}{3}\}$; $x(x - 6) = 0 : S = \{0; 6\}$.

► **À faire** : fiche d'exercices du chapitre, exercices 12 à 16.**V — Factoriser un trinôme****Théorème 2 — Factorisation**Pour le trinôme $P(x) = ax^2 + bx + c$ et $\Delta = b^2 - 4ac$:

- si $\Delta > 0$: $P(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$;
- si $\Delta = 0$: $P(x) = a(x - x_0)^2$;
- si $\Delta < 0$: P ne se factorise pas.

On n'oublie pas le coefficient a devant les parenthèses.

Méthode 5 — Factoriser un trinôme

Exemples corrigés

Factoriser, quand c'est possible :

a) $f(x) = 3x^2 - 3x - 6$

b) $g(x) = -2x^2 - 7x - 3$

c) $h(x) = x^2 + 8x + 16$ et $k(x) = x^2 - 2x + 5$

a)

$$\Delta = (-3)^2 - 4 \times 3 \times (-6)$$

$$\Delta = 81$$

$$\sqrt{81} = 9$$

$$x_1 = \frac{3-9}{6} = -1$$

$$x_2 = \frac{3+9}{6} = 2$$

$$f(x) = 3(x+1)(x-2).$$

contrôle : $3 \times 1 \times (-2) = -6$, c'est bien c

b)

$$\Delta = (-7)^2 - 4 \times (-2) \times (-3)$$

$$\Delta = 25$$

$$x_1 = \frac{7-5}{-4} = -\frac{1}{2}$$

$$-b = 7 \text{ et } 2a = -4$$

$$x_2 = \frac{7+5}{-4} = -3$$

$$g(x) = -2\left(x + \frac{1}{2}\right)(x+3).$$

$$\text{contrôle : } -2 \times \frac{1}{2} \times 3 = -3$$

c)

$$h : \Delta = 64 - 64 = 0, x_0 = -4 \text{ et } h(x) = (x+4)^2.$$

 $\Delta = 0$: un carré

$$k : \Delta = 4 - 20 = -16 < 0 : k \text{ ne se factorise pas.}$$

À vous de jouer

Factoriser, quand c'est possible :

$$f(x) = x^2 + x - 12 \quad g(x) = -3x^2 + 12x - 12 \quad h(x) = 2x^2 + x + 1$$

Réponses : $\Delta_f = 49 : f(x) = (x+4)(x-3)$; $\Delta_g = 0 : g(x) = -3(x-2)^2$; $\Delta_h = -7 < 0$: pas de factorisation.

Racine évidente

Parfois une racine se voit : dans $f(x) = 3x^2 + 2x - 5$, $3 + 2 - 5 = 0$, donc $f(1) = 0$. On écrit $f(x) = 3(x-1)(x-x_2)$; en $x = 0$: $-5 = 3 \times (-1) \times (-x_2)$, donc $x_2 = -\frac{5}{3}$ et $f(x) = 3(x-1)\left(x + \frac{5}{3}\right)$, sans calculer Δ .

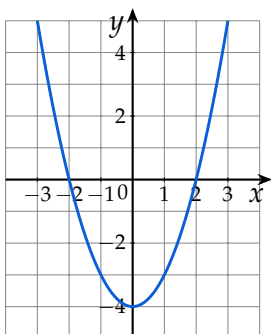
► À faire : fiche d'exercices du chapitre, exercices 17 à 20.

VI — Représentation graphique des fonctions du second degré

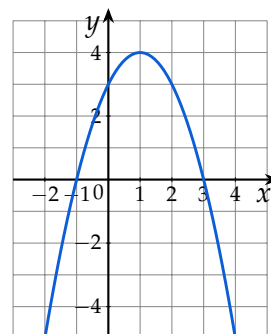
Propriété 2 — La parabole et son sens

La courbe d'un trinôme est une **parabole**. Son sens dépend du signe de a : si $a > 0$, elle est tournée vers le haut (un « creux »); si $a < 0$, vers le bas (une « bosse »).

$$a > 0 : f(x) = x^2 - 4$$



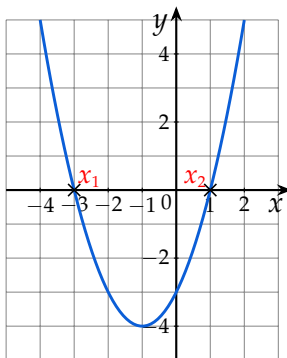
$$a < 0 : g(x) = -x^2 + 2x + 3$$



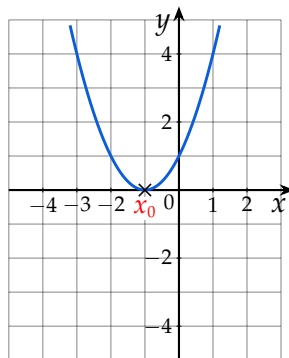
Propriété 3 — Racines et axe des abscisses

Les racines sont les abscisses des points où la parabole coupe l'axe des abscisses : deux points si $\Delta > 0$; un seul si $\Delta = 0$ (la parabole touche l'axe) ; aucun si $\Delta < 0$.

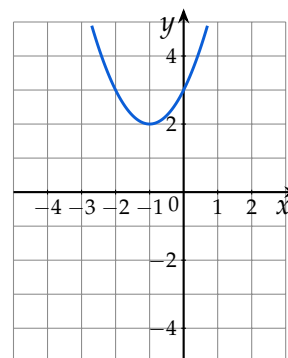
$$\Delta > 0 : x^2 + 2x - 3$$



$$\Delta = 0 : x^2 + 2x + 1$$



$$\Delta < 0 : x^2 + 2x + 3, \text{ aucune racine}$$



Méthode 6 — Tracer une parabole à partir d'un tableau de valeurs

Exemples corrigés

Dresser un tableau de valeurs, puis tracer la courbe de :

a) $f(x) = -x^2 - 2x + 3$ sur $[-4; 2]$;

b) $g(x) = x^2 - 4x$ sur $[-1; 5]$.

a)

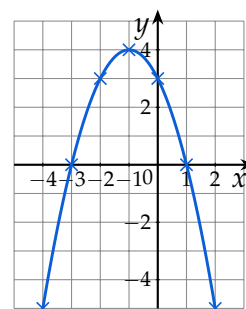
$a = -1 < 0$: une « bosse ».

le signe de a servira de contrôle

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	-5	0	3	4	3	0	-5

On place les points et on les relie à main levée, par une courbe arrondie.

les valeurs se répondent de part et d'autre de $x = -1$: symétrie

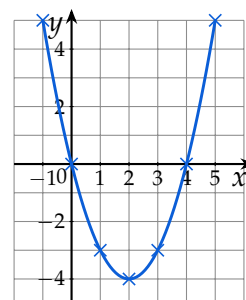


b)

$a = 1 > 0$: un « creux ». Racines : $x(x - 4) = 0$, soit 0 et 4.

les points sur l'axe des abscisses

x	-1	0	1	2	3	4	5
$g(x)$	5	0	-3	-4	-3	0	5



À vous de jouer

Dresser un tableau de valeurs, puis tracer la courbe de $h(x) = -x^2 + 4x$ sur $[-1; 5]$. Où coupe-t-elle l'axe des abscisses ?

Réponses : $h(-1) = -5$, $h(0) = 0$, $h(1) = 3$, $h(2) = 4$, $h(3) = 3$, $h(4) = 0$, $h(5) = -5$; elle coupe l'axe en 0 et en 4.

► **À faire** : fiche d'exercices du chapitre, exercices 21 à 24.

VII — Sommet et variations de la parabole

Théorème 3 — Sommet et variations

La parabole de $f(x) = ax^2 + bx + c$ a pour **sommet** le point

$$S(\alpha; \beta) \quad \text{avec} \quad \alpha = -\frac{b}{2a} \quad \text{et} \quad \beta = f(\alpha)$$

La droite d'équation $x = \alpha$ est son axe de symétrie.

$a > 0$: β est le **minimum**

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	β	$+\infty$

$a < 0$: β est le **maximum**

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	β	$-\infty$

Remarque

Quand le trinôme a deux racines, l'axe de symétrie passe par leur milieu : $\alpha = \frac{x_1 + x_2}{2}$.

Méthode 7 — Trouver le sommet, dresser le tableau de variations

Exemples corrigés

Donner le sommet de la parabole et le tableau de variations de :

a) $f(x) = 2x^2 - 8x + 3$

b) $g(x) = -3x^2 - 6x + 4$

a)

$$\alpha = -\frac{-8}{2 \times 2}$$

$$\alpha = -\frac{b}{2a}, \text{ avec } a = 2 \text{ et } b = -8$$

$$\alpha = 2$$

$$\beta = 2 \times 2^2 - 8 \times 2 + 3 \quad \beta = f(\alpha) : \text{on remplace } x \text{ par } 2$$

$$\beta = -5$$

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	-5	$+\infty$

Sommet $S(2; -5)$: f admet un minimum, -5 , atteint en $x = 2$.

$a = 2 > 0$: un creux, donc un minimum

b)

$$\alpha = -\frac{-6}{2 \times (-3)}$$

$$\alpha = -1$$

$$-\frac{-6}{-6} = -1 : \text{attention aux signes}$$

$$\beta = -3 \times (-1)^2 - 6 \times (-1) + 4$$

$$\beta = 7$$

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$g(x)$	$-\infty$	7	$-\infty$

Sommet $S(-1;7)$: g admet un maximum, 7, atteint en $x = -1$.

$$a = -3 < 0 : \text{une bosse}$$

À vous de jouer

Donner le sommet et le tableau de variations de :

$$f_1(x) = x^2 + 6x + 4 \quad f_2(x) = -x^2 + 4x + 1 \quad f_3(x) = 2x^2 - 4x + 7$$

Réponses : $f_1 : S(-3; -5)$, minimum ; $f_2 : S(2; 5)$, maximum ; $f_3 : S(1; 5)$, minimum.

► **À faire** : fiche d'exercices du chapitre, exercices 25 à 28.

VIII — Synthèse : étudier et tracer une parabole

L'étude complète d'un trinôme, demandée dans les exercices et les devoirs, rassemble tout ce qui précède : sens de la parabole, sommet, racines, variations, puis tracé.

Méthode 8 — Étude complète d'une fonction du second degré

Exemples corrigés

Étudier la fonction $f(x) = -x^2 + x + 2$ sur $[-2; 3]$, puis tracer sa courbe.

Résolution

$a = -1 < 0$: une bosse.

sens

$$\alpha = -\frac{1}{2 \times (-1)} = \frac{1}{2}$$

sommet

$$\beta = -\frac{1}{4} + \frac{1}{2} + 2 = \frac{9}{4}$$

$$\beta = f\left(\frac{1}{2}\right) = 2,25$$

$$\Delta = 1^2 - 4 \times (-1) \times 2 = 9$$

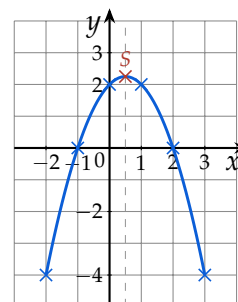
racines

$$x_1 = \frac{-1 - 3}{-2} = 2$$

$$x_2 = \frac{-1 + 3}{-2} = -1$$

x	-2	$\frac{1}{2}$	3
$f(x)$	-4	$\frac{9}{4}$	-4

x	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$	-4	0	2	2	0	-4



On place les points et le sommet, *tracé (méthode 6)*, puis on relie, symétriquement par rapport à $x = \frac{1}{2}$.

À vous de jouer

Faire la même étude pour $g(x) = x^2 - x - 2$ sur $[-2; 3]$, puis tracer sa courbe.

Réponses : $a > 0$; $S\left(\frac{1}{2}; -\frac{9}{4}\right)$, minimum; racines -1 et 2 ; $g(-2) = 4$, $g(0) = -2$, $g(1) = -2$, $g(3) = 4$.

► **À faire** : fiche d'exercices du chapitre, exercices 29 à 31.

IX — Signe d'un trinôme

Exemple — signe de $f(x) = -3(x - 2)(x + 1)$

On dresse le tableau de signes du produit ; le facteur -3 est toujours négatif.

x	$-\infty$	-1	2	$+\infty$	
-3	$-$	$-$	$-$		
$x + 1$	$-$	0	$+$	$+$	
$x - 2$	$-$	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$

$f(x)$ est positif entre les racines, négatif à l'extérieur : le contraire du signe de $a = -3$ entre les racines, le signe de a ailleurs.

Théorème 4 — Signe d'un trinôme

- Si $\Delta > 0$: le trinôme a le signe de a à l'**extérieur** des racines, le signe contraire **entre** les racines.
- Si $\Delta = 0$: il a le signe de a , et s'annule en x_0 .
- Si $\Delta < 0$: il a **toujours** le signe de a .

$\Delta > 0$ et $a > 0$

x	$-\infty$	x_1	x_2	$+\infty$	
$ax^2 + bx + c$	$+$	0	$-$	0	$+$

$\Delta > 0$ et $a < 0$

x	$-\infty$	x_1	x_2	$+\infty$	
$ax^2 + bx + c$	$-$	0	$+$	0	$-$

Méthode 9 — Dresser le tableau de signes d'un trinôme

Exemples corrigés

Dresser le tableau de signes de :

a) $f(x) = 2x^2 + x - 3$

b) $g(x) = -2x^2 + 5x + 3$

c) $h(x) = -x^2 + 6x - 9$ et $k(x) = x^2 - x + 2$

a)

$$\Delta = 1^2 - 4 \times 2 \times (-3) = 25$$

$$x_1 = \frac{-1-5}{4} = -\frac{3}{2}$$

$$x_2 = \frac{-1+5}{4} = 1$$

x	$-\infty$	$-\frac{3}{2}$	1	$+\infty$	
$f(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

 $a = 2 > 0$: positif à l'extérieur des racines.

théorème 4

b)

$$\Delta = 5^2 - 4 \times (-2) \times 3 = 49$$

$$x_1 = \frac{-5-7}{-4} = 3$$

$$x_2 = \frac{-5+7}{-4} = -\frac{1}{2}$$

on range les racines : $-\frac{1}{2} < 3$

x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	3	$+\infty$	
$g(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$

 $a = -2 < 0$: négatif à l'extérieur, positif entre les racines.

c)

 $h : \Delta = 36 - 36 = 0, x_0 = 3; a = -1 < 0 : h$ est négatif, nul en 3.

$$\Delta = 0$$

 $k : \Delta = 1 - 8 = -7 < 0; a = 1 > 0 : k$ est toujours positif.

$$\Delta < 0$$

À vous de jouer

Dresser le tableau de signes de :

$$f(x) = x^2 - 9 \quad g(x) = -x^2 + 3x - 2 \quad h(x) = 2x^2 - x + 3$$

Réponses : f : racines -3 et 3 , positif à l'extérieur ; g : racines 1 et 2 , $a < 0$, positif entre les racines ; $h : \Delta = -23 < 0$, toujours positif.► **À faire** : fiche d'exercices du chapitre, exercices 32 à 35.**X — Inéquations du second degré**Pour résoudre une inéquation du second degré, on met tout dans le membre de gauche, on dresse le tableau de signes du trinôme, puis on lit les solutions : crochets fermés en une racine pour $\leq$ ou $\geq$, ouverts pour $<$ ou $>$.**Méthode 10 — Résoudre une inéquation du second degré****Exemples corrigés**Résoudre dans $\mathbb{R}$:

a) $-x^2 + 5x - 4 > 0$

b) $x^2 - 2x - 8 \leq 0$

c) $2x^2 - x \leq 3$

d) $x^2 + 2x + 5 > 0$

a)

$$\Delta = 25 - 16 = 9; \text{ racines } \frac{-5-3}{-2} = 4 \text{ et } \frac{-5+3}{-2} = 1.$$

x	$-\infty$	1	4	$+\infty$	
$-x^2 + 5x - 4$	$-$	0	$+$	0	$-$

$$S =]1; 4[.$$

 $a < 0$: positif entre les racines ; inégalité stricte, racines exclues

b)

$$\Delta = 4 + 32 = 36; \text{ racines } -2 \text{ et } 4; a > 0 : \text{ négatif entre les racines.}$$

$$S = [-2; 4].$$

« ou nul » : racines comprises

c)

$$2x^2 - x \leq 3$$

$$2x^2 - x - 3 \leq 0 \quad \text{tout dans le membre de gauche}$$

$$\Delta = 1 + 24 = 25; \text{ racines } \frac{1-5}{4} = -1 \text{ et } \frac{1+5}{4} = \frac{3}{2}; a > 0.$$

$$S = [-1; \frac{3}{2}].$$

négatif entre les racines

d)

$$\Delta = 4 - 20 = -16 < 0 \text{ et } a = 1 > 0 : \text{ le trinôme est toujours positif; } S = \mathbb{R}.$$

*pas de racine : signe de a partout***À vous de jouer**Résoudre dans $\mathbb{R}$:

$$x^2 - x - 6 < 0 \quad -x^2 - 2x + 8 \geq 0 \quad 2x^2 + x + 1 < 0 \quad x^2 \geq 16$$

Réponses : $S =]-2; 3[$; racines -4 et 2 : $S = [-4; 2]$; $\Delta = -7$ et $a > 0$: $S = \emptyset$; $x^2 - 16 \geq 0$: $S =]-\infty; -4] \cup [4; +\infty[$.► **À faire** : fiche d'exercices du chapitre, exercices 36 à 39.**XI — Intersection d'une parabole et d'une droite****Propriété 4 — Points d'intersection**Les abscisses des points communs à la parabole $\mathcal{P} : y = f(x)$ et à la droite $\mathcal{D} : y = g(x)$ sont les solutions de l'équation $f(x) = g(x)$. Il y a 2, 1 ou 0 point commun, selon le signe du discriminant.**Méthode 11 — Trouver les points d'intersection****Exemples corrigés** $\mathcal{P}$ est la parabole d'équation $y = -x^2 + 2x + 3$. Trouver ses points d'intersection avec chacune des droites $\mathcal{D}_1 : y = x + 1$, $\mathcal{D}_2 : y = 2x + 3$ et $\mathcal{D}_3 : y = 2x + 4$.

Avec $\mathcal{D}_1$

$$-x^2 + 2x + 3 = x + 1$$

$$-x^2 + x + 2 = 0 \quad f(x) = g(x), \text{ puis tout à gauche}$$

$\Delta = 1 + 8 = 9$: deux solutions, $\frac{-1-3}{-2} = 2$ et $\frac{-1+3}{-2} = -1$. *les abscisses des points communs*

Points $A(-1;0)$ et $B(2;3)$.

*ordonnées par l'équation de la droite : $-1 + 1 = 0$
et $2 + 1 = 3$*

Avec $\mathcal{D}_2$

$$-x^2 + 2x + 3 = 2x + 3$$

$$-x^2 = 0$$

Une seule solution, 0 : la droite touche la parabole en $C(0;3)$. *$\mathcal{D}_2$ est tangente à $\mathcal{P}$*

Avec $\mathcal{D}_3$

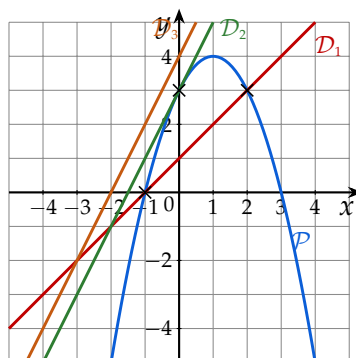
$$-x^2 + 2x + 3 = 2x + 4$$

$$-x^2 - 1 = 0$$

$$x^2 = -1$$

Aucune solution : $\mathcal{D}_3$ ne coupe pas $\mathcal{P}$.

un carré n'est jamais négatif

**À vous de jouer**

Trouver les points d'intersection, s'il y en a :

1°) $\mathcal{P} : y = x^2 + 2x - 1$ et $\mathcal{D} : y = 3x + 1$;

2°) $\mathcal{P} : y = x^2 - 4x + 5$ et $\mathcal{D} : y = 2x - 4$;

3°) $\mathcal{P} : y = x^2 + x + 2$ et $\mathcal{D} : y = x + 1$.

Réponses : 1°) $x^2 - x - 2 = 0$: $(-1; -2)$ et $(2; 7)$; 2°) $x^2 - 6x + 9 = 0$: un seul point, $(3; 2)$; 3°) $x^2 + 1 = 0$: aucun point.

► **À faire** : fiche d'exercices du chapitre, exercices 40 à 43.

XII — Position relative de deux courbes**Propriété 5 — Position relative**

Pour comparer les courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$, on étudie le signe de la différence $d(x) = f(x) - g(x)$: là où $d(x) > 0$, $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de $\mathcal{C}_g$; là où $d(x) < 0$, elle est au-dessous; là où $d(x) = 0$, les courbes se coupent.

Méthode 12 — Étudier la position relative de deux courbes**Exemples corrigés**

Étudier la position relative des courbes de f et de g :

- a) $f(x) = -x^2 + 6x - 5$ et $g(x) = x - 1$;
 b) $f(x) = -x^2 + 4x + 2$ et $g(x) = x^2 - 2x - 6$.

a)

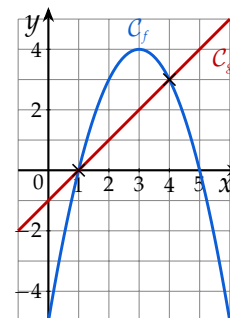
$$d(x) = -x^2 + 6x - 5 - (x - 1) \quad \text{on soustrait toute l'expression de } g$$

$$d(x) = -x^2 + 5x - 4$$

$$\Delta = 25 - 16 = 9; \text{ racines } 1 \text{ et } 4;$$

$$a < 0.$$

x	$-\infty$	1	4	$+\infty$		
$d(x)$		-	0	+	0	-



C_f est au-dessus de la droite sur $]1; 4[$, au-dessous ailleurs; elles se coupent en $(1; 0)$ et $(4; 3)$.

b)

$$d(x) = -x^2 + 4x + 2 - (x^2 - 2x - 6)$$

$$d(x) = -2x^2 + 6x + 8 \quad \text{le } - \text{ change tous les signes de } g(x)$$

$$\Delta = 36 + 64 = 100; \text{ racines } \frac{-6 - 10}{-4} = 4 \text{ et } \frac{-6 + 10}{-4} = -1;$$

$$a < 0.$$

C_f est au-dessus de C_g sur $] -1; 4[$, au-dessous ailleurs; elles se coupent en $x = -1$ et $x = 4$.

À vous de jouer

Étudier la position relative des courbes de f et de g :

1°) $f(x) = x^2 + x - 1$ et $g(x) = 3x - 1$;

2°) $f(x) = 3x^2 + 2x - 5$ et $g(x) = 3x^2 - 4x + 1$.

Réponses : 1°) $d(x) = x^2 - 2x = x(x - 2)$: C_f au-dessous sur $]0; 2[$, au-dessus ailleurs; 2°) $d(x) = 6x - 6$: C_f au-dessus pour $x > 1$, au-dessous pour $x < 1$.

► **À faire** : fiche d'exercices du chapitre, exercices 44 à 46.

XIII — Problèmes du second degré

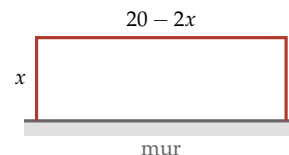
Méthode 13 — Résoudre un problème du second degré

Exemples corrigés

- a) **Un enclos.** Contre un mur, on clôt un enclos rectangulaire avec 20 m de grillage, le mur formant un côté. Quelles dimensions donnent la plus grande aire ?
- b) **Une fusée de modélisme.** Lancée du sol, elle est à la hauteur $h(t) = -5t^2 + 40t$ (en mètres) au bout de t secondes. Quelle hauteur maximale atteint-elle ? Quand retombe-t-elle ? Combien de temps reste-t-elle à plus de 60 m ?

a)

Soit x (en m) un côté perpendiculaire au mur ; l'autre côté mesure $20 - 2x$, avec $0 < x < 10$. *inconnue, et ses valeurs possibles*



$$A(x) = x(20 - 2x) = -2x^2 + 20x \quad \text{l'aire en fonction de } x$$

$$\alpha = -\frac{20}{2 \times (-2)} = 5 \quad a < 0 : \text{maximum au sommet}$$

$$A(5) = -50 + 100 = 50$$

L'enclos le plus grand mesure 5 m sur 10 m : 50 m².

retour à l'énoncé : 5 est bien entre 0 et 10

b)

$$\alpha = -\frac{40}{2 \times (-5)} = 4 \quad a = -5 < 0 : \text{maximum au sommet}$$

$$h(4) = -80 + 160 = 80$$

Hauteur maximale : 80 m, au bout de 4 s.

$$-5t^2 + 40t = 0$$

$$-5t(t - 8) = 0 \quad \text{au sol : } h(t) = 0$$

Elle retombe au bout de 8 s.

t = 0 est l'instant du lancement

$$-5t^2 + 40t > 60$$

$$-5t^2 + 40t - 60 > 0$$

$$t^2 - 8t + 12 < 0 \quad \text{on divise par } -5 < 0 : \text{le sens change}$$

Racines 2 et 6 : $t \in]2; 6[$, soit 4 s au-dessus de 60 m.

a = 1 > 0 : négatif entre les racines

À vous de jouer

1°) Contre un mur, on clôt un enclos rectangulaire avec 32 m de grillage, le mur formant un côté. Quelles dimensions donnent la plus grande aire ?

2°) Un projectile est à la hauteur $h(t) = -5t^2 + 10t + 15$ (en m) au bout de t secondes. Quelle est sa hauteur maximale ? Quand touche-t-il le sol ? Combien de temps reste-t-il à plus de 15 m ?

Réponses : 1°) $A(x) = -2x^2 + 32x$, maximum en $x = 8$: 8 m sur 16 m, soit 128 m² ; 2°) maximum 20 m au bout de 1 s ; $t^2 - 2t - 3 = 0$ donne 3 (on rejette -1) : au sol au bout de 3 s ; $t(t - 2) < 0$: plus de 15 m pendant 2 s.

► **À faire** : fiche d'exercices du chapitre, exercices 47 à 49.