

POLYNÔMES DU SECOND DEGRÉ

Cours — Première STI2D

Version élève

Comment utiliser ce cours

Chaque partie commence par ce qu'il faut **savoir** (définitions, théorèmes), puis vient ce qu'il faut **savoir faire** : une méthode, avec des **exemples** faits en classe, puis des exercices « **À vous de jouer** » à chercher seul.

Sur cette feuille, seuls les **énoncés** des exemples figurent : la résolution, signalée par la mention (*au tableau*), est à rédiger dans le cahier.

I — Fonction polynôme du second degré

Définition 1 — Fonction polynôme du second degré

Une **fonction polynôme de degré 2**, ou **trinôme**, est une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = ax^2 + bx + c \quad \text{avec } a \neq 0.$$

Les nombres a , b et c sont ses **coefficients**. Si $a = 0$, il reste $bx + c$: c'est une fonction affine.

Exemples et contre-exemple

$f(x) = 2x^2 - 5x + 1$ et $g(x) = 7 - 3x^2$ sont des trinômes. En revanche, $h(x) = 4x + 1$ n'en est pas un : il n'y a pas de x^2 .

Méthode 1 — Identifier les coefficients a , b et c

Exemples

(au tableau)

Donner, quand c'est possible, les coefficients a , b et c :

a) $P(x) = 4x^2 - 3x + 7$; $R(x) = -x^2 + \frac{3}{4}x$; $T(x) = \frac{2}{3}x^2 - 5$

b) $U(x) = (x + 3)^2 - 2(x - 1)$

c) $V(x) = (x + 2)^2 - x^2$

À vous de jouer

Donner, quand c'est possible, les coefficients a , b et c :

$$f(x) = 3 - 2x^2 \quad g(x) = (3x - 1)(x + 2) \quad h(x) = 3(x - 1)^2 - 3x^2$$

► **À faire** : fiche d'exercices du chapitre, exercices 1 à 4.

II — Forme factorisée et racines

Définition 2 — Forme factorisée, racines

Une fonction $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$, avec $a \neq 0$, est un trinôme écrit sous **forme factorisée**.

Les **racines** d'un polynôme f sont les solutions de $f(x) = 0$: ce sont les abscisses des points où sa courbe coupe l'axe des abscisses.

Exemple

Soit $f(x) = 3(x - 1)(x - 2)$. On développe :

$$f(x) = 3(x^2 - 2x - x + 2) \quad \text{on développe d'abord les deux parenthèses}$$

$$f(x) = 3(x^2 - 3x + 2)$$

$$f(x) = 3x^2 - 9x + 6 \quad \text{puis on multiplie par 3}$$

f est bien un trinôme : $a = 3, b = -9, c = 6$. partie I

Avec la forme développée, on calcule $f(1)$, $f(2)$ et $f(3)$:

$$f(1) = 3 - 9 + 6 = 0 \quad 1 \text{ est une racine de } f$$

$$f(2) = 12 - 18 + 6 = 0 \quad 2 \text{ est une racine de } f$$

$$f(3) = 27 - 27 + 6 = 6 \quad f(3) \neq 0 : 3 \text{ n'est pas une racine}$$

Les racines 1 et 2 se lisaient déjà dans la forme factorisée $3(x - 1)(x - 2)$.

Propriété 1 — Racines et forme factorisée

Les racines de $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$ sont x_1 et x_2 (éventuellement égales) : elles se lisent sans calcul, en changeant le signe. Dans $(x - 4)$, la racine est 4 ; dans $(x + 2)$, elle est -2 .

Démonstration. Un produit est nul si et seulement si l'un de ses facteurs est nul ; comme $a \neq 0$, $a(x - x_1)(x - x_2) = 0$ équivaut à $x = x_1$ ou $x = x_2$.

Remarque

Tous les trinômes ne se factorisent pas : $x^2 + 4$ n'a pas de racine, car $x^2 + 4 \geq 4$ pour tout x . Le **discriminant** (partie III) dira lesquels se factorisent.

Méthode 2 — Développer une forme factorisée, lire les racines**Exemples**

(au tableau)

a) Développer $f(x) = -2(x - 3)(x + 1)$ et donner ses racines.

b) Même question pour $g(x) = -2(x + 5)(x + 3)$.

c) Résoudre $-2(x - 3)(x + 1) = 0$, puis $-2(x + 5)(x + 3) = 0$.

À vous de jouer

Développer, puis donner les racines :

$$f(x) = (x - 4)(x + 1) \quad g(x) = -3(x + 2)(x - 5) \quad h(x) = 2(x + 1)(x + 3)$$

► **À faire** : fiche d'exercices du chapitre, exercices 5 à 8.

III — Le discriminant**Définition 3 — Discriminant**

Le **discriminant** du trinôme $ax^2 + bx + c$ est le nombre

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

(lire « delta »). Son signe va dire si le trinôme a deux racines, une seule ou aucune.

Méthode 3 — Calculer un discriminant**Exemples**

(au tableau)

Pour chaque trinôme P, Q, R, S , calculer le discriminant et donner son signe :

$$P(x) = 2x^2 + 3x - 2 \quad Q(x) = x^2 - 6x + 9 \quad R(x) = -3x^2 + 2x - 4 \quad S(x) = 9x^2 - 4$$

À vous de jouer

Calculer le discriminant et donner son signe :

$$f(x) = 4x^2 - 4x + 1 \quad g(x) = 3x^2 + 2x + 1 \quad h(x) = -x^2 + 2x + 8$$

► **À faire** : fiche d'exercices du chapitre, exercices 9 à 11.

IV — Racines du trinôme et équations du second degré**Théorème 1 — Les trois cas**

Pour l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ (avec $a \neq 0$) et $\Delta = b^2 - 4ac$:

- si $\Delta > 0$: deux solutions, $x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$;
- si $\Delta = 0$: une seule solution, la racine double $x_0 = \frac{-b}{2a}$;
- si $\Delta < 0$: aucune solution ($\sqrt{\Delta}$ n'existe pas).

Méthode 4 — Résoudre une équation du second degré**Exemples**

(au tableau)

Résoudre dans $\mathbb{R}$:

- $2x^2 + 5x - 3 = 0$
- $x^2 + 6x + 9 = 0$
- $2x^2 - 3x + 4 = 0$
- $3x^2 + x - 5 = 2x^2 + 7$
- $x^2 - 9 = 0$; $2x^2 + 10x = 0$; $x^2 = 5$

À vous de jouer

Résoudre dans $\mathbb{R}$:

$$x^2 - 7x + 10 = 0 \quad 3x^2 - 2x + 2 = 0 \quad 9x^2 + 6x + 1 = 0 \quad x^2 - 6x = 0$$

► **À faire** : fiche d'exercices du chapitre, exercices 12 à 16.

V — Factoriser un trinôme**Théorème 2 — Factorisation**

Pour le trinôme $P(x) = ax^2 + bx + c$ et $\Delta = b^2 - 4ac$:

- si $\Delta > 0$: $P(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$;
- si $\Delta = 0$: $P(x) = a(x - x_0)^2$;
- si $\Delta < 0$: P ne se factorise pas.

On n'oublie pas le coefficient a devant les parenthèses.

Méthode 5 — Factoriser un trinôme

Exemples

(au tableau)

Factoriser, quand c'est possible :

a) $f(x) = 3x^2 - 3x - 6$

b) $g(x) = -2x^2 - 7x - 3$

c) $h(x) = x^2 + 8x + 16$ et $k(x) = x^2 - 2x + 5$

À vous de jouer

Factoriser, quand c'est possible :

$$f(x) = x^2 + x - 12 \quad g(x) = -3x^2 + 12x - 12 \quad h(x) = 2x^2 + x + 1$$

Racine évidente

Parfois une racine se voit : dans $f(x) = 3x^2 + 2x - 5$, $3 + 2 - 5 = 0$, donc $f(1) = 0$. On écrit $f(x) = 3(x - 1)(x - x_2)$; en $x = 0$: $-5 = 3 \times (-1) \times (-x_2)$, donc $x_2 = -\frac{5}{3}$ et $f(x) = 3(x - 1)(x + \frac{5}{3})$, sans calculer Δ .

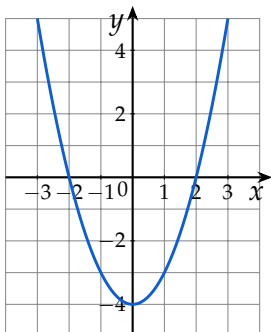
► À faire : fiche d'exercices du chapitre, exercices 17 à 20.

VI — Représentation graphique des fonctions du second degré

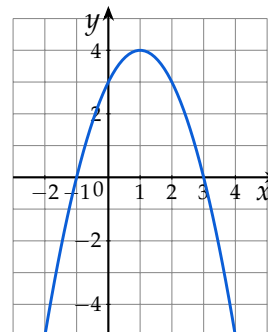
Propriété 2 — La parabole et son sens

La courbe d'un trinôme est une **parabole**. Son sens dépend du signe de a : si $a > 0$, elle est tournée vers le haut (un « creux »); si $a < 0$, vers le bas (une « bosse »).

$$a > 0 : f(x) = x^2 - 4$$



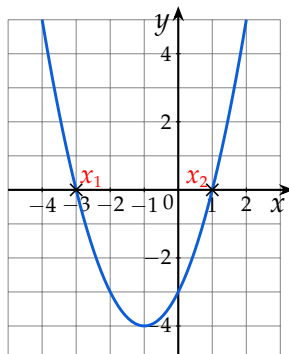
$$a < 0 : g(x) = -x^2 + 2x + 3$$



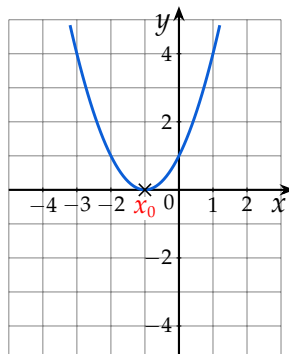
Propriété 3 — Racines et axe des abscisses

Les racines sont les abscisses des points où la parabole coupe l'axe des abscisses : deux points si $\Delta > 0$; un seul si $\Delta = 0$ (la parabole touche l'axe); aucun si $\Delta < 0$.

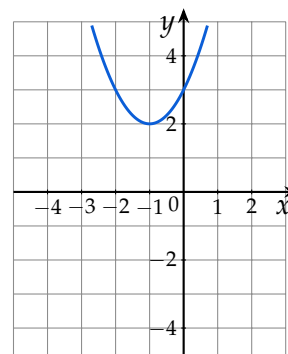
$$\Delta > 0 : x^2 + 2x - 3$$



$$\Delta = 0 : x^2 + 2x + 1$$



$$\Delta < 0 : x^2 + 2x + 3, \text{ aucune racine}$$



Méthode 6 — Tracer une parabole à partir d'un tableau de valeurs**Exemples**

(au tableau)

Dresser un tableau de valeurs, puis tracer la courbe de :

a) $f(x) = -x^2 - 2x + 3$ sur $[-4; 2]$;

b) $g(x) = x^2 - 4x$ sur $[-1; 5]$.

À vous de jouerDresser un tableau de valeurs, puis tracer la courbe de $h(x) = -x^2 + 4x$ sur $[-1; 5]$. Où coupe-t-elle l'axe des abscisses ?► **À faire** : fiche d'exercices du chapitre, exercices 21 à 24.**VII — Sommet et variations de la parabole****Théorème 3 — Sommet et variations**La parabole de $f(x) = ax^2 + bx + c$ a pour **sommet** le point

$$S(\alpha; \beta) \quad \text{avec} \quad \alpha = -\frac{b}{2a} \quad \text{et} \quad \beta = f(\alpha)$$

La droite d'équation $x = \alpha$ est son axe de symétrie. $a > 0$: β est le **minimum**

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	β	$+\infty$

 $a < 0$: β est le **maximum**

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	β	$-\infty$

RemarqueQuand le trinôme a deux racines, l'axe de symétrie passe par leur milieu : $\alpha = \frac{x_1 + x_2}{2}$.**Méthode 7 — Trouver le sommet, dresser le tableau de variations****Exemples**

(au tableau)

Donner le sommet de la parabole et le tableau de variations de :

a) $f(x) = 2x^2 - 8x + 3$

b) $g(x) = -3x^2 - 6x + 4$

À vous de jouer

Donner le sommet et le tableau de variations de :

$$f_1(x) = x^2 + 6x + 4 \quad f_2(x) = -x^2 + 4x + 1 \quad f_3(x) = 2x^2 - 4x + 7$$

► **À faire** : fiche d'exercices du chapitre, exercices 25 à 28.

VIII — Synthèse : étudier et tracer une parabole

L'étude complète d'un trinôme, demandée dans les exercices et les devoirs, rassemble tout ce qui précède : sens de la parabole, sommet, racines, variations, puis tracé.

Méthode 8 — Étude complète d'une fonction du second degré

Exemples

(au tableau)

Étudier la fonction $f(x) = -x^2 + x + 2$ sur $[-2; 3]$, puis tracer sa courbe.

À vous de jouer

Faire la même étude pour $g(x) = x^2 - x - 2$ sur $[-2; 3]$, puis tracer sa courbe.

► **À faire** : fiche d'exercices du chapitre, exercices 29 à 31.

IX — Signe d'un trinôme

Exemple — signe de $f(x) = -3(x - 2)(x + 1)$

On dresse le tableau de signes du produit ; le facteur -3 est toujours négatif.

x	$-\infty$	-1	2	$+\infty$	
-3	$-$	$-$	$-$		
$x + 1$	$-$	0	$+$	$+$	
$x - 2$	$-$	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$

$f(x)$ est positif entre les racines, négatif à l'extérieur : le contraire du signe de $a = -3$ entre les racines, le signe de a ailleurs.

Théorème 4 — Signe d'un trinôme

- Si $\Delta > 0$: le trinôme a le signe de a à l'**extérieur** des racines, le signe contraire **entre** les racines.
- Si $\Delta = 0$: il a le signe de a , et s'annule en x_0 .
- Si $\Delta < 0$: il a **toujours** le signe de a .

 $\Delta > 0$ et $a > 0$

x	$-\infty$	x_1	x_2	$+\infty$	
$ax^2 + bx + c$	$+$	0	$-$	0	$+$

 $\Delta > 0$ et $a < 0$

x	$-\infty$	x_1	x_2	$+\infty$	
$ax^2 + bx + c$	$-$	0	$+$	0	$-$

Méthode 9 — Dresser le tableau de signes d'un trinôme

Exemples

(au tableau)

Dresser le tableau de signes de :

a) $f(x) = 2x^2 + x - 3$

b) $g(x) = -2x^2 + 5x + 3$

c) $h(x) = -x^2 + 6x - 9$ et $k(x) = x^2 - x + 2$

À vous de jouer

Dresser le tableau de signes de :

$$f(x) = x^2 - 9 \quad g(x) = -x^2 + 3x - 2 \quad h(x) = 2x^2 - x + 3$$

► **À faire** : fiche d'exercices du chapitre, exercices 32 à 35.

X — Inéquations du second degré

Pour résoudre une inéquation du second degré, on met tout dans le membre de gauche, on dresse le tableau de signes du trinôme, puis on lit les solutions : crochets fermés en une racine pour $\leq$ ou $\geq$, ouverts pour $<$ ou $>$.

Méthode 10 — Résoudre une inéquation du second degré**Exemples**

(au tableau)

Résoudre dans $\mathbb{R}$:

a) $-x^2 + 5x - 4 > 0$

b) $x^2 - 2x - 8 \leq 0$

c) $2x^2 - x \leq 3$

d) $x^2 + 2x + 5 > 0$

À vous de jouer

Résoudre dans $\mathbb{R}$:

$$x^2 - x - 6 < 0 \quad -x^2 - 2x + 8 \geq 0 \quad 2x^2 + x + 1 < 0 \quad x^2 \geq 16$$

► **À faire** : fiche d'exercices du chapitre, exercices 36 à 39.

XI — Intersection d'une parabole et d'une droite**Propriété 4 — Points d'intersection**

Les abscisses des points communs à la parabole $\mathcal{P} : y = f(x)$ et à la droite $\mathcal{D} : y = g(x)$ sont les solutions de l'équation $f(x) = g(x)$. Il y a 2, 1 ou 0 point commun, selon le signe du discriminant.

Méthode 11 — Trouver les points d'intersection**Exemples**

(au tableau)

$\mathcal{P}$ est la parabole d'équation $y = -x^2 + 2x + 3$. Trouver ses points d'intersection avec chacune des droites $\mathcal{D}_1 : y = x + 1$, $\mathcal{D}_2 : y = 2x + 3$ et $\mathcal{D}_3 : y = 2x + 4$.

À vous de jouer

Trouver les points d'intersection, s'il y en a :

1°) $\mathcal{P} : y = x^2 + 2x - 1$ et $\mathcal{D} : y = 3x + 1$;

2°) $\mathcal{P} : y = x^2 - 4x + 5$ et $\mathcal{D} : y = 2x - 4$;

3°) $\mathcal{P} : y = x^2 + x + 2$ et $\mathcal{D} : y = x + 1$.

► **À faire** : fiche d'exercices du chapitre, exercices 40 à 43.

XII — Position relative de deux courbes

Propriété 5 — Position relative

Pour comparer les courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$, on étudie le signe de la différence $d(x) = f(x) - g(x)$: là où $d(x) > 0$, $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de $\mathcal{C}_g$; là où $d(x) < 0$, elle est au-dessous; là où $d(x) = 0$, les courbes se coupent.

Méthode 12 — Étudier la position relative de deux courbes

Exemples

(au tableau)

Étudier la position relative des courbes de f et de g :

- a) $f(x) = -x^2 + 6x - 5$ et $g(x) = x - 1$;
- b) $f(x) = -x^2 + 4x + 2$ et $g(x) = x^2 - 2x - 6$.

À vous de jouer

Étudier la position relative des courbes de f et de g :

- 1°) $f(x) = x^2 + x - 1$ et $g(x) = 3x - 1$;
- 2°) $f(x) = 3x^2 + 2x - 5$ et $g(x) = 3x^2 - 4x + 1$.

► **À faire** : fiche d'exercices du chapitre, exercices 44 à 46.

XIII — Problèmes du second degré

Méthode 13 — Résoudre un problème du second degré

Exemples

(au tableau)

- a) **Un enclos.** Contre un mur, on clôt un enclos rectangulaire avec 20 m de grillage, le mur formant un côté. Quelles dimensions donnent la plus grande aire ?
- b) **Une fusée de modélisme.** Lancée du sol, elle est à la hauteur $h(t) = -5t^2 + 40t$ (en mètres) au bout de t secondes. Quelle hauteur maximale atteint-elle ? Quand retombe-t-elle ? Combien de temps reste-t-elle à plus de 60 m ?

À vous de jouer

- 1°) Contre un mur, on clôt un enclos rectangulaire avec 32 m de grillage, le mur formant un côté. Quelles dimensions donnent la plus grande aire ?
- 2°) Un projectile est à la hauteur $h(t) = -5t^2 + 10t + 15$ (en m) au bout de t secondes. Quelle est sa hauteur maximale ? Quand touche-t-il le sol ? Combien de temps reste-t-il à plus de 15 m ?

► **À faire** : fiche d'exercices du chapitre, exercices 47 à 49.