

FRACTIONS ET PUISSANCES

Cours — Seconde

Version élève

Comment utiliser ce cours

Chaque partie commence par ce qu'il faut **savoir** (définitions, propriétés), puis vient ce qu'il faut **savoir faire** : une méthode, avec des **exemples** faits en classe, puis des exercices « **À vous de jouer** » à chercher seul.

Sur cette feuille, seuls les **énoncés** des exemples figurent : la résolution, signalée par la mention (*au tableau*), est à rédiger dans le cahier.

I — Nombres relatifs et priorités

Définition 1 — Les sens du signe moins

Le signe $-$ a trois sens :

- une **soustraction** : $9 - 2$ se lit « neuf moins deux » ;
- un **nombre négatif** : -6 se lit « moins six » ;
- l'**opposé** : $-(-4)$ se lit « l'opposé de moins quatre », et vaut 4.

Propriété 1 — Règles des signes

Somme

- deux nombres de même signe : on ajoute leurs distances à zéro et on garde le signe : $-5 - 3 = -8$;
- de signes contraires : on soustrait les distances à zéro, le signe est celui du plus éloigné de zéro : $-5 + 3 = -2$.

Soustraire un nombre, c'est ajouter son opposé : $4 - (-7) = 4 + 7$.

Produit et quotient

- deux nombres de même signe : le résultat est positif : $(-5) \times (-3) = 15$;
- de signes contraires : le résultat est négatif : $(-6) \div 3 = -2$.

Méthode 1 — Calculer avec des nombres relatifs

Exemples

Calculer :

- $A = -7 - 9$
- $B = 15 - (-6)$
- $C = 3 \times (-8)$
- $D = \frac{-(-18)}{-6}$

À vous de jouer

Calculer :

$$E = -5 - 12 \quad F = 8 - (-14) \quad G = -4 \times (-9) \quad H = \frac{-(-35)}{-7} \quad I = -6 - (-10)$$

(au tableau)

Propriété 2 — Priorités de calcul

On effectue, dans cet ordre :

1. les calculs entre **parenthèses**, en commençant par les plus intérieures ;
2. les **puissances** ;
3. les **multiplications et divisions**, de gauche à droite ;
4. les **additions et soustractions**, de gauche à droite.

Méthode 2 — Respecter les priorités de calcul**Exemples**

(au tableau)

Calculer, en écrivant une étape par ligne :

- a) $A = 6^2 - 5 \times (-3)$
- b) $B = -8 - 2^4$
- c) $C = 7 + (-10 + 4) \times 3$
- d) $D = -24 \div (-4) \times 3^2$

Erreur à éviter

Dans D , on ne commence pas par $(-4) \times 9$: la division et la multiplication ont la même priorité, on les fait dans l'ordre où elles sont écrites.

À vous de jouer

Calculer :

$$E = 4^2 - 2 \times (-7) \quad F = -12 - 3^2 \quad G = 9 + (-6 + 1) \times 2 \quad H = -30 \div (-5) \times 2^3$$

► **À faire** : fiche d'exercices du chapitre, exercices 1 à 3.

II — Additionner et soustraire des fractions**Propriété 3 — Le signe d'une fraction**

Pour $b \neq 0$: $\frac{-a}{b} = \frac{a}{-b} = -\frac{a}{b}$ et $\frac{-a}{-b} = \frac{a}{b}$.

On écrit le signe moins d'une fraction au numérateur ou devant le trait de fraction, jamais au dénominateur. Un signe moins devant une fraction s'applique à **tout** le numérateur : on le met entre parenthèses.

Exemple

$$\begin{aligned} 3 - \frac{x-1}{5} &= \frac{3 \times 5}{1 \times 5} - \frac{x-1}{5} & 3 &= \frac{3}{1}, \text{ écrit avec le dénominateur } 5 \\ 3 - \frac{x-1}{5} &= \frac{15}{5} - \frac{x-1}{5} \\ 3 - \frac{x-1}{5} &= \frac{15 - (x-1)}{5} & \text{parenthèses : le moins porte sur } x \text{ et sur } -1 \\ 3 - \frac{x-1}{5} &= \frac{16-x}{5} & -(x-1) &= -x+1 \end{aligned}$$

Propriété 4 — Somme de fractions

Pour additionner (ou soustraire) des fractions, on les écrit avec le **même dénominateur**, puis on additionne

(ou on soustrait) les numérateurs ; le dénominateur ne change pas :

$$\frac{a}{d} + \frac{b}{d} = \frac{a+b}{d} \qquad \frac{a}{d} - \frac{b}{d} = \frac{a-b}{d}$$

Méthode 3 — Additionner et soustraire des fractions

Exemples

(au tableau)

Calculer et donner le résultat sous forme simplifiée :

a) $A = \frac{-7}{-6} + \frac{-3}{12}$

b) $B = \frac{4}{5} - \frac{-2}{3}$

c) $C = \frac{1}{3} - \frac{1}{6} + \frac{1}{9} - \frac{1}{18}$

À vous de jouer

Calculer et donner le résultat sous forme simplifiée :

$$D = \frac{-2}{-3} + \frac{-5}{6} \qquad E = \frac{5}{6} - \frac{-3}{4} \qquad F = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{10} \qquad G = 4 - \frac{7}{3}$$

► **À faire** : fiche d'exercices du chapitre, exercices 4 à 7.

III — Multiplier et diviser des fractions

Propriété 5 — Produit et quotient

Pour b, c et d non nuls :

$$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{a \times c}{b \times d} \qquad \frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c}$$

Diviser par une fraction, c'est multiplier par son **inverse**.

Méthode 4 — Multiplier et diviser des fractions

Exemples

(au tableau)

Calculer et donner le résultat sous forme simplifiée :

a) $A = \frac{3}{-4} \times \frac{-5}{7}$

b) $B = 6 \times \frac{4}{5}$

c) $C = \frac{5}{6} \div \frac{-10}{9}$

À vous de jouer

Calculer et donner le résultat sous forme simplifiée :

$$D = \frac{2}{-7} \times \frac{-3}{5} \qquad E = 4 \times \frac{2}{9} \qquad F = \frac{3}{10} \div \frac{-9}{5} \qquad G = \frac{-4}{9} \div 8$$

Simplifier : seulement des produits

Dans un quotient de **produits**, on peut barrer un même facteur en haut et en bas. Jamais dans une **somme** : dans $\frac{-2+9}{5+9}$, on ne barre pas les 9. Quand on barre tout le numérateur, il reste 1, et non 0.

Méthode 5 — Simplifier avant de calculer**Exemples**

(au tableau)

Simplifier, puis calculer :

a) $A = \frac{-9 \times 10}{6 \times 25}$

b) $B = \frac{3 \times (-4) \times (-5)}{(-6) \times 7}$

c) $C = \frac{-2 + 9}{5 + 9}$

d) $D = \frac{28}{15} \times \frac{25}{14}$

e) $E = \frac{6 \times 5}{10 \times 9}$

À vous de jouer

Simplifier, puis calculer :

$$F = \frac{-8 \times 15}{12 \times 10} \quad G = \frac{6 + 4}{5 + 4} \quad H = \frac{5 \times (-2) \times 3}{3 \times 5} \quad I = \frac{21}{20} \times \frac{8}{35} \quad J = \frac{18}{35} \times \frac{14}{27} \times \frac{5}{4}$$

► **À faire** : fiche d'exercices du chapitre, exercices 8 à 11.**IV — Fractions et priorités de calcul****Propriété 6 — Fraction de fractions**

Pour b, c et d non nuls : $\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c}$.

Quand le numérateur ou le dénominateur est un calcul, on le calcule à part, puis on divise.

Méthode 6 — Mener un calcul avec des fractions**Exemples**

(au tableau)

Calculer et donner le résultat sous forme simplifiée :

a) $A = \frac{5}{6} - \frac{-2}{3} \times \frac{3}{2^2}$

b) $B = \frac{-5}{3 + \frac{3}{2^2}}$

c) $C = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) \div \left(\frac{3}{4} - \frac{1}{6}\right)$

d) $D = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \div \frac{3}{4} - \frac{1}{6}$

À vous de jouer

Calculer et donner le résultat sous forme simplifiée :

$$E = \left(2 + \frac{1}{3} - \frac{3}{4}\right) \times \left(\frac{1}{2} - \frac{2}{3}\right) \quad F = \frac{\frac{1}{3} + \frac{1}{4}}{\frac{5}{6} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3}}$$

$$G = -\frac{3}{7} \times \left[\left(\frac{1}{2} + \frac{5}{4}\right) - \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{6}\right)\right] \quad H = \left(\frac{-3}{4} + \frac{1}{2}\right) \div \left(\frac{2}{3} + \frac{5}{-6}\right)$$

► **À faire** : fiche d'exercices du chapitre, exercices 12 à 14.

V — Produit en croix

Propriété 7 — Produit en croix

Pour $b \neq 0$ et $d \neq 0$: si $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, alors $a \times d = b \times c$.

Pourquoi ?

On écrit les deux fractions avec le dénominateur commun $b \times d$: $\frac{a \times d}{b \times d} = \frac{c \times b}{d \times b}$. Deux fractions égales de même dénominateur ont le même numérateur : $a \times d = b \times c$.

Méthode 7 — Résoudre une équation par le produit en croix

Exemples

(au tableau)

Résoudre les équations suivantes :

a) $\frac{x}{3} = \frac{5}{4}$

b) $\frac{x}{4} = \frac{x+3}{6}$

c) $\frac{x+3}{2} = \frac{2x-1}{3}$

d) $\frac{2x+1}{4} = \frac{3x-2}{-2}$

Vérifier une solution

On remplace x par la valeur trouvée dans chaque membre. Pour b) : $\frac{6}{4} = \frac{3}{2}$ et $\frac{6+3}{6} = \frac{9}{6} = \frac{3}{2}$; les deux membres sont égaux, donc 6 est bien la solution.

À vous de jouer

Résoudre, puis vérifier :

e) $\frac{3}{7} = \frac{x}{14}$

f) $\frac{3x}{4} = \frac{7-x}{2}$

g) $\frac{2x+1}{3} = \frac{x+4}{2}$

h) $\frac{3x-2}{4} = \frac{5-x}{8}$

i) $\frac{5x+2}{3} = \frac{4-x}{-2}$

► **À faire** : fiche d'exercices du chapitre, exercices 15 à 17.

Méthode 8 — Résoudre une équation à plusieurs fractions

Quand un membre contient une somme de fractions, le produit en croix ne s'applique pas : on multiplie **chaque terme** des deux membres par un dénominateur commun.

Exemples

(au tableau)

Résoudre les équations suivantes :

a) $x + \frac{x}{3} = 12$

b) $\frac{t}{4} - \frac{t+1}{6} = 1$

c) $\frac{z-1}{2} - \frac{z-3}{6} = \frac{2z+1}{9}$

À vous de jouer

Résoudre :

d) $\frac{x}{3} - \frac{x}{5} = 4$

e) $\frac{3t-1}{2} + \frac{t-3}{4} = t$

f) $\frac{y}{2} + \frac{2y}{3} = \frac{y}{4} + 11$

$$g) \frac{y+6}{4} = \frac{y-2}{3} - \frac{y}{6} \quad h) \frac{3z+1}{4} - \frac{5z-2}{3} = \frac{1-13z}{12}$$

► **À faire** : fiche d'exercices du chapitre, exercices 18 et 19.

VI — Fractions et problèmes

Propriété 8 — Fraction d'une quantité

Prendre les $\frac{a}{b}$ de quelque chose, c'est **multiplier** par $\frac{a}{b}$: les $\frac{2}{3}$ de 60 font $\frac{2}{3} \times 60 = 40$.

Une fraction prise « du reste » porte sur ce qui reste, pas sur le total : on calcule d'abord ce reste.

Méthode 9 — Résoudre un problème de fractions

Exemples

(au tableau)

- Un train de 360 places part de Lille avec les trois quarts de ses places occupées. À Arras, des voyageurs occupent les deux tiers des places restées libres. Combien de places sont encore libres ?
- Malo a un forfait mobile de 60 Go. Il en utilise le quart pour les vidéos, puis les deux cinquièmes de ce qui reste pour les réseaux sociaux. Quelle fraction du forfait lui reste-t-il ? Combien de gigaoctets cela fait-il ?
- Une boutique en ligne vend les deux tiers de son stock de casques audio le premier jour des soldes, puis les trois cinquièmes du reste le deuxième jour. Il reste alors 20 casques. Combien en a-t-elle vendu ?

À vous de jouer

- Une cuve de 240 L est remplie aux cinq sixièmes. On en vide les trois quarts. Combien de litres reste-t-il dans la cuve ?
- Sami dépense le quart de ses économies pour un téléphone, puis les deux tiers de ce qui reste pour un vélo. Il lui reste 75 €. Combien avait-il économisé ?

► **À faire** : fiche d'exercices du chapitre, exercices 20 à 23.

VII — Puissances

Définition 2 — Puissance d'un nombre

Pour un nombre a et un entier $n \geq 1$:

$$a^n = \underbrace{a \times a \times \cdots \times a}_{n \text{ facteurs}} \quad a^0 = 1 \quad a^{-n} = \frac{1}{a^n} \quad (a \neq 0)$$

Un exposant positif compte des multiplications, un exposant négatif des divisions : $5^{-2} = \frac{1}{5 \times 5} = \frac{1}{25}$.

En particulier, $a^{-1} = \frac{1}{a}$: a^{-1} est l'**inverse** de a .

Définition 3 — Puissances de 10

$$10^n = 1 \underbrace{0 \dots 0}_{n \text{ zéros}} \quad \text{et} \quad 10^{-n} = \frac{1}{10^n} = 0, \underbrace{0 \dots 0}_{n-1 \text{ zéros}} 1 \quad (n \text{ chiffres après la virgule}).$$

Exemples : $10^6 = 1\,000\,000$; $10^{-4} = 0,0001$.

Signe d'une puissance

Un nombre négatif élevé à une puissance **paire** donne un résultat positif; à une puissance **impaire**, un résultat négatif : $(-2)^4 = 16$, $(-2)^3 = -8$. Attention aux parenthèses : $(-3)^2 = 9$, mais $-3^2 = -(3 \times 3) = -9$.

Méthode 10 — Calculer avec des puissances**Exemples**

(au tableau)

Calculer :

a) $A = (3^2 - 4) \times (-1)^7$

b) $B = (-2)^3 + (-3)^2 \times (-2)$

c) $C = -3^2 + (-3)^2 - (-3)^3$

À vous de jouer

Calculer :

$$D = (2^3 - 5) \times (-1)^6 \quad E = (-1)^9 + (-2)^4 \times (-3) \quad F = (-6)^2 - 6^2 + (-2)^3$$

Méthode 11 — Passer d'un exposant négatif à une fraction**Exemples**

(au tableau)

a) Écrire sous forme de fraction : $A = (-3)^{-2}$ et $B = -4^{-2}$.

b) Écrire sous la forme a^n : $C = \frac{1}{9}$, $D = \frac{1}{2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2}$ et $E = \frac{1}{(-4) \times (-4) \times (-4)}$.

À vous de jouer

1°) Écrire sous forme de fraction : $F = (-2)^{-3}$ $G = -3^{-2}$ $H = \left(\frac{1}{5}\right)^{-1}$

2°) Écrire sous la forme a^n : $I = \frac{1}{6}$ $J = \frac{1}{5 \times 5 \times 5 \times 5}$ $K = \frac{1}{(-7) \times (-7)}$

► **À faire** : fiche d'exercices du chapitre, exercices 24 à 29.**VIII — Règles de calcul sur les puissances****Propriété 9 — Règles de calcul**Pour a et b non nuls, n et p entiers relatifs :

$$a^n \times a^p = a^{n+p}$$

exemple : $5^4 \times 5^{-6} = 5^{4+(-6)} = 5^{-2}$

$$\frac{a^n}{a^p} = a^{n-p}$$

exemple : $\frac{(-2)^9}{(-2)^4} = (-2)^{9-4} = (-2)^5$

$$(a^n)^p = a^{n \times p}$$

exemple : $(4^3)^5 = 4^{3 \times 5} = 4^{15}$

$$(a \times b)^n = a^n \times b^n$$

exemple : $(3x)^2 = 3^2 \times x^2 = 9x^2$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$

exemple : $\left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{3^2}{5^2} = \frac{9}{25}$

Méthode 12 — Simplifier avec les règles sur les puissances

Exemples

(au tableau)

Simplifier, puis calculer :

a) $A = \frac{(2^2)^{-3} \times 3}{(2 \times 3)^{-2}}$

b) $B = \frac{3^4 \times 10^{-5} \times (3^2)^3 \times (10^{-1})^2}{3^8 \times 10^{-4}}$

À vous de jouer

Simplifier, puis calculer :

$$C = \frac{(3^2)^{-2} \times 2}{(3 \times 2)^{-3}} \quad D = \frac{2^5 \times 10^{-4}}{2^3 \times 10^{-6}} \quad E = \frac{a^4 \times (a^{-3})^2}{(a^2)^3} \quad (a \neq 0)$$

► À faire : fiche d'exercices du chapitre, exercices 30 à 34.

IX — Notation scientifique

Définition 4 — Notation scientifique

La **notation scientifique** d'un nombre décimal non nul est son écriture $a \times 10^n$, où a a **un seul chiffre non nul avant la virgule** et n est un entier relatif.

Exemples : $27\,800 = 2,78 \times 10^4$; $-40\,500\,000 = -4,05 \times 10^7$; $0,000\,000\,63 = 6,3 \times 10^{-7}$.

Pour ne pas se tromper d'exposant

Le produit $a \times 10^n$ ne doit pas changer de valeur : quand la virgule de a recule de k rangs (le nombre devient plus petit), l'exposant augmente de k ; quand elle avance, l'exposant diminue.

Méthode 13 — Écrire un nombre en notation scientifique

Exemples

(au tableau)

Donner la notation scientifique de :

a) $A = 5\,600\,000$ et $B = 0,000\,47$

b) $C = 318,2 \times 10^{-6}$

c) $D = \frac{4 \times 10^2 \times 9 \times 10^5}{60 \times 10^3}$

d) $E = 6 \times 10^3 + 47 \times 10^{-2}$

À vous de jouer

Donner la notation scientifique de :

$$F = 3\,470\,000 \quad G = 0,000\,902 \quad H = 72,6 \times 10^{-5} \quad I = \frac{8 \times 10^5 \times 3 \times 10^{-3}}{6 \times 10^4}$$

► À faire : fiche d'exercices du chapitre, exercices 35 à 39.