

# CORRIGÉ — INTERVALLES ET FONCTIONS

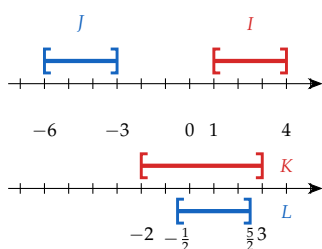
## Chapitre 2 : fiche d'exercices — Seconde

Les résultats sont encadrés ; les remarques en bleu signalent les erreurs fréquentes et les méthodes à retenir. Une équation se conclut par des accolades, une inéquation par des intervalles.

### I) Droite numérique, intervalles fermés

#### Exercice 1 — Représenter des intervalles fermés

1)



Une droite par intervalle, ou deux couleurs sur une même droite.

2)  $[-2; 5]$ 

3) a)  $4 \in [0; 4]$  (borne incluse); b)  $9 \notin [3; 8,9]$ ; c)  $-3 \in [-4; -2]$ ; d)  $-50 \notin [-49; -5]$  ( $-50 < -49$ ).

#### Exercice 2 — Appartenance

- a)  $2 \in [-3; 7]$       b)  $-4 \notin [-3; 5]$   
 c)  $10^{-2} \in [0; 1]$       d)  $\pi \in [3,1; 3,2]$   
 e)  $-3 \in [-6; -3]$       f)  $1,5 \notin [1,6; 2]$

c)  $10^{-2} = 0,01$ ; d)  $\pi \simeq 3,14$ .

#### Exercice 3 — Nombres dans un intervalle

- 1)  $\frac{7}{2} = 3,5$  : les entiers positifs ou nuls de l'intervalle sont  $0; 1; 2; 3$ .  
 2) Par exemple  $3,72$  et  $3,75$ .  
 3)  $3 < \pi < 4$  :  $[3; 4]$ .

### II) Intervalles ouverts, inégalités

#### Exercice 4 — D'un intervalle à une inégalité

- a)  $2 \leq x \leq 7$ , fermé      b)  $x > -1,5$ , ouvert  
 c)  $-4 < x \leq 0$ , semi-ouvert      d)  $x < 5$ , ouvert  
 e)  $-3 \leq x < 8$ , semi-ouvert      f)  $0 < x < 1$ , ouvert

#### Exercice 5 — D'une phrase à un intervalle

- 1)  $x \geq -1$  :  $[-1; +\infty[$   
 2)  $-3 < x < 2$  :  $] -3; 2[$

3)  $x < 4$  :  $] -\infty; 4[$

4)  $0 \leq x < 6$  :  $[0; 6[$

« Positifs ou nuls » : 0 est inclus; « strictement » : la borne est exclue.

#### Exercice 6 — D'une inégalité à un intervalle

- a)  $[-4; 2]$       b)  $] -\infty; 3[$   
 c)  $] 5; +\infty[$       d)  $] 2; 3[$   
 e)  $[1,5; +\infty[$       f)  $] -\infty; 10^{-2}]$

Les représentations se font comme à l'exercice 1 : crochet tourné vers l'extérieur pour une borne exclue et du côté de l'infini.

#### Exercice 7 — Tableau à compléter

- 1)  $[\frac{1}{4}; \frac{2}{3}]$ ;  $] \pi; +\infty[$ ;  $] -\infty; -1[$   
 2)

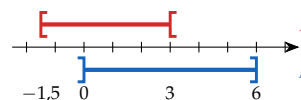
| Inégalité(s)       | Intervalle      |
|--------------------|-----------------|
| $-1 \leq x \leq 4$ | $[-1; 4]$       |
| $1 < x \leq 5$     | $] 1; 5]$       |
| $-3 \leq x < 2$    | $[-3; 2[$       |
| $0 < x < 3$        | $] 0; 3[$       |
| $x > 2$            | $] 2; +\infty[$ |
| $x \leq 1$         | $] -\infty; 1]$ |
| $-2 \leq x < 6$    | $[-2; 6[$       |

#### Exercice 8 — Bornes incluses ou exclues ?

- a)  $6 \in ] -2; 6]$       b)  $-2 \notin ] -2; 4[$   
 c)  $10^{-2} \in ] 0; +\infty[$       d)  $\pi \in ] 3,1; 3,2[$   
 e)  $-4 \notin ] -\infty; -4[$       f)  $-1,5 \in [-1,5; 1,5[$   
 g)  $0 \in ] -\infty; +\infty[$       h)  $-1 \notin ] -1; 3]$

### III) Intersection, réunion, complémentaire

#### Exercice 9 — Premières intersections et réunions



a)  $I \cap J = [0; 3]$ ;  $I \cup J = [-1,5; 6]$

b)  $I \cap J = [1; 3[$ ;  $I \cup J = \mathbb{R}$

En a),  $0 \notin J$  et  $3 \notin I$  : les deux bornes de  $I \cap J$  sont exclues.

**Exercice 10 — Attention aux bornes**

a)  $I \cap J = [-2; 1[$ ;  $I \cup J = ]-3; +\infty[$

b)  $I \cap J = \emptyset$ ;  $I \cup J = ]1; 6, 5[$

c)  $I \cap J = ]-\infty; 2[$ ;  $I \cup J = ]-\infty; 4[$

d)  $I \cap J = \{5\}$ ;  $I \cup J = \mathbb{R}$

e)  $I \cap J = \emptyset$ ;  $I \cup J = \mathbb{R}$

b)  $3 \in I$  mais  $3 \notin J$  : pas de nombre commun, et la réunion n'a pas de trou. d) Seul 5 est dans les deux intervalles.

**Exercice 11 — Plusieurs intervalles**

1)  $I = [-2; 6]$ ;  $J = [-4; -1[$ ;  $L = ]-\infty; 6]$ ;  
 $M = ]2; +\infty[$ .

2)  
 $I \cap J = [-2; -1[$        $I \cup J = [-4; 6]$   
 $J \cap K = \emptyset$        $K \cup L = ]-\infty; 10]$   
 $I \cap L = [-2; 6]$        $K \cup M = ]1; +\infty[$

$I$  est contenu dans  $L$  :  $I \cap L = I$ .

**Exercice 12 — Complémentaire**

a)  $] -\infty; 3]$       b)  $]4; +\infty[$

c)  $] -\infty; -2[$       d)  $[6; +\infty[$

e)  $] -\infty; 1[ \cup ]2; +\infty[$

f)  $] -\infty; -5] \cup [8; +\infty[$

Chaque crochet se retourne : une borne incluse devient exclue, et inversement.

**Exercice 13 — Inégalités et intervalles : « et », « ou »**

a)  $] -3; -1] \cup [2; 5[$

b)  $-2 \leq x \leq 0$  ou  $x \geq 3$

c)  $] -\infty; -1[ \cup ]4; +\infty[$

d)  $x \leq -3$  ou  $x > 2$

e)  $] -2; +\infty[ \cap ]-\infty; 3] = [-2; 3]$

f)  $x \geq 1$  et  $x < 5$ , soit  $1 \leq x < 5$  :  $[1; 5[$

g)  $[-4; +\infty[ \cap [1; +\infty[ = [1; +\infty[$

h)  $] -\infty; 0[ \cup ]-\infty; 2] = ]-\infty; 2]$

i)  $] -\infty; -1[ \cap ]3; +\infty[ = \emptyset$

« et » : les deux conditions à la fois (intersection); « ou » : au moins l'une des deux (réunion). En g) et h), un intervalle contient l'autre; en i), aucun nombre n'est à la fois inférieur à  $-1$  et supérieur à  $3$ .

**IV) Image et antécédent**
**Exercice 14 — Calculer des images**

1)

$f(1) = 2 - 3 = -1$

$f(-2) = -4 - 3 \times 4 = -16$

$f\left(\frac{1}{2}\right) = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$

2)  $f(2) = 4 - 12 = -8$  : oui, 2 est un antécédent de  $-8$ .

$-3x^2$  pour  $x = -2$  :  $-3 \times (-2)^2 = -12$ , le carré d'abord.

**Exercice 15 — Image et antécédent**

1)

$g(-3) = -12 - 5 = -17$

$g(5) = 20 - 5 = 15$

$g\left(\frac{3}{4}\right) = 3 - 5 = -2$

2)  $g\left(\frac{1}{2}\right) = 2 - 5 = -3 \neq 3$  : non.

3)

$4x - 5 = 3$

$4x = 8$

$x = 2$

**Exercice 16 — Calculer des antécédents**

a)  $x - 4 = -2$ , donc  $x = 2$ .

b)  $x^2 = 36$  : deux antécédents,  $-6$  et  $6$ .

c)  $\frac{1}{x} = 4$ , donc  $x = \frac{1}{4}$ .

d)  $x(x - 3) = 0$  : un produit est nul si l'un de ses facteurs est nul :  $0$  et  $3$ .

b)  $(-6)^2 = 36$  aussi : ne pas oublier l'antécédent négatif.

**Exercice 17 — Deux fonctions égales**

1)  $f(2) = 6 \times 1 + 4 - 10 = 0$  et  $g(2) = 0$ .

2) Par exemple  $f(0) = 12 - 10 = 2$  et  $g(0) = 2$ .

3)

$f(x) = 3x - x^2 + 12 - 4x + x^2 - 10$

$f(x) = 2 - x$

Donc  $f(x) = g(x)$  pour tout nombre  $x$ .

**V) Ensemble de définition**
**Exercice 18 — Un nombre sans image**

$f_1$  :  $0$  (division par zéro);  $f_2$  :  $2$  ( $2 - 2 = 0$ );  $f_3$  :  $-5$  (racine carrée d'un nombre négatif).

**Exercice 19 — Valeurs interdites**

a)  $x - 6 = 0$  :  $6$

b)  $x + 5 = 0$  :  $-5$

c)  $3x = 0$  :  $0$

d)  $2x - 8 = 0$  :  $4$

e)  $2x + 6 = 0$  :  $-3$

f)  $4x - 12 = 0$  :  $3$

Seul le dénominateur compte : le numérateur peut être nul.

**Exercice 20 — Racines carrées**

a)  $[0; +\infty[$

b)  $x \geq 2$  :  $[2; +\infty[$

c)  $x \geq -4$  :  $[-4; +\infty[$

d)  $x \geq 5$  :  $[5; +\infty[$

- e)  $3x - 9 \geq 0$  donne  $3x \geq 9$  puis  $x \geq 3$  :  $[3; +\infty[$   
 f)  $2x + 8 \geq 0$  donne  $2x \geq -8$  puis  $x \geq -4$  :  $[-4; +\infty[$

**Exercice 21 — Pour s'entraîner**

- a)  $\mathbb{R}$  b)  $\mathbb{R}$  (affine)  
 c) valeur interdite 1 :  $] -\infty; 1[ \cup ] 1; +\infty[$   
 d)  $5x + 15 = 0$  pour  $x = -3$  :  $] -\infty; -3[ \cup ] -3; +\infty[$   
 e)  $4x - 8 \geq 0$  donne  $x \geq 2$  :  $[2; +\infty[$

**VI) Tableau de valeurs**
**Exercice 22 — Lire un tableau**

- 1)  $f(-1) = 0$ ;  $f(1) = -1$ ;  $f(-2) = 2$ .  
 2)  $f(2) = 4 \neq -1$  : non. Le tableau donne  $f(1) = -1$  : 1 est un antécédent de  $-1$ .

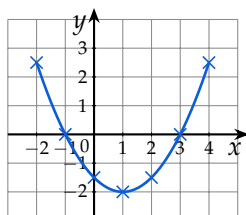
**Exercice 23 — Lire un tableau (suite)**

- 1)  $g(4) = 5$ ;  $g(2) = 0$ ;  $g(-1) = -2$ .  
 2) Antécédents de 5 : 4; de  $-2$  :  $-1$ ; de 4 :  $-3$  et 6.

**Exercice 24 — Construire un tableau**

- 1) Par exemple  
 $f(-2) = 0,5 \times (-3)^2 - 2 = 2,5$ .

|        |     |    |      |    |      |   |     |
|--------|-----|----|------|----|------|---|-----|
| $x$    | -2  | -1 | 0    | 1  | 2    | 3 | 4   |
| $f(x)$ | 2,5 | 0  | -1,5 | -2 | -1,5 | 0 | 2,5 |



- 2) Antécédents de 0 :  $-1$  et 3; de 2,5 :  $-2$  et 4.  
 3) Ci-contre.

**VII) Courbe représentative**
**Exercice 25 — Lecture graphique**

- a)  $D_f = [-4; 5]$   
 b)  $f(3) = 0$  et  $f(-1) = 0$   
 c)  $f(-2) = 2$  et  $f(-4) = 2$   
 d) Antécédents de 2 :  $-4; -2; 4$ ; de 0 :  $-1; 3$ ; de  $-2$  : 1;  $-3$  n'a aucun antécédent.  
 e)  $-3$  et 5.

Pour les antécédents de 2, on trace la droite  $y = 2$  et on lit toutes les abscisses des points de la courbe sur cette droite.

**Exercice 26 — Points et courbes**

- 1) Les points  $(0; -3)$ ;  $(-4; 0)$ ;  $(2; 1)$  et  $(6; 1)$  appartiennent à  $\mathcal{C}_f$ .  
 2) a)  $f(3) = -2$ ; b)  $f(0) = 4$ ; c)  $f(-1) = 0$  et  $f(5) = 0$ .  
 3) a)  $f(-2) = 1$  :  $A \in \mathcal{C}_f$ ;  $f(3) = 6 \neq 5$  :  $B \notin \mathcal{C}_f$ ;  
 $f(1,5) = 2,25 - 3 = -0,75$  :  $C \in \mathcal{C}_f$ . Autres points :  $(0; -3)$ ,  $(1; -2)$ .

- b)  $f(-2) = -5$  :  $A \in \mathcal{C}_f$ ;  $f(2) = 7 \neq 6$  :  $B \notin \mathcal{C}_f$ ;  
 $f\left(\frac{1}{3}\right) = 2$  :  $C \in \mathcal{C}_f$ . Autres points :  $(0; 1)$ ,  $(1; 4)$ .

**Exercice 27 — Trois antécédents**

- a)  $[-3; 3]$  b)  $f(2) = 0$  c)  $-3$   
 d) 0 (antécédents  $-2, 0$  et  $2$ ); tout nombre strictement compris entre  $-1$  et  $2$  convient aussi.  
 e) Par exemple 5 : aucun point de la courbe n'a une ordonnée supérieure à 4.

**Exercice 28 — Quelle courbe passe par ce point ?**

|         | $f$ | $g$ | $h$ | $k$ |
|---------|-----|-----|-----|-----|
| $x = 4$ | 6   | 6   | 6   | 8   |
| $x = 6$ | 4   | 4   | 2   | 8   |
| $x = 8$ | 2   | 3   | -2  | 4   |

- 1)  $A(4; 6)$  : courbes de  $f$ ,  $g$  et  $h$ .  
 2)  $B(6; 4)$  : courbes de  $f$  et  $g$ ;  $C(8; 4)$  : courbe de  $k$ .

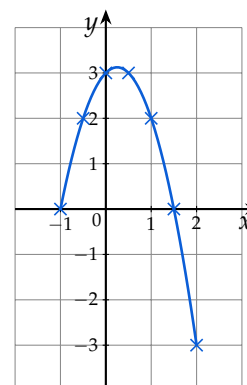
**VIII) Calculatrice**
**Exercice 29 — Antécédents à la calculatrice**

- 1) Tableau : 7; 3,5; 1;  $-0,5$ ;  $-1$ ;  $-0,5$ ; 1; 3,5; 7. Axes :  $x$  de  $-2$  à 6,  $y$  de  $-2$  à 8.  
 2) Antécédents de 2 :  $x \simeq -0,4$  et  $x \simeq 4,4$ .  
 3) Oui, deux :  $x \simeq 0,6$  et  $x \simeq 3,4$ .

**Exercice 30 — Tableau avec un pas de 0,5**

1)

|        |    |      |   |     |   |     |    |
|--------|----|------|---|-----|---|-----|----|
| $x$    | -1 | -0,5 | 0 | 0,5 | 1 | 1,5 | 2  |
| $g(x)$ | 0  | 2    | 3 | 3   | 2 | 0   | -3 |



- 2) Ci-contre.  
 3)  $g(0,25) = 3,125$ ;  
 antécédents de 2 :  $-0,5$  et 1; de 0 :  $-1$  et  $1,5$ .

**Exercice 31 — Une fonction quotient**

- 1)  $-1; 0; 0,25; 0,32; 0,33; 0,33; 0,31; 0,30; 0,28; 0,26; 0,25$ .  
 3) Antécédents de 0,25 : 1 et 5.  
 4)  $f(x) = 0$  :  $S = \{0,5\}$ ;  $f(x) \geq 0,25$  :  $S = [1; 5]$ .  
 5) Les deux courbes se coupent en deux points :  $S \simeq \{0; 1,30\}$ .  
 $f(0) = -1$  et  $0 - 1 = -1$  : 0 est une solution exacte.

## Exercice 32 — Intersections de courbes

1) Les courbes se coupent en  $x = -1$ ,  $x = 1$  et  $x = 2$ ;  $\mathcal{C}_f$  est sur  $\mathcal{C}_g$  ou au-dessous pour  $S = [-2; -1] \cup [1; 2]$ .

2) Un seul point commun,  $(1; 9)$ . Par le calcul :

$$3x^2 + x + 5 = 3x^2 - 2x + 8$$

$$3x = 3$$

$$x = 1$$

et  $3 + 1 + 5 = 9$ .

3)  $\frac{1}{x} = \frac{1+2x}{x}$  donne  $1 = 1 + 2x$ , soit  $x = 0$ , valeur interdite : aucun point commun.

## IX) Résolution graphique

## Exercice 33 — Équations

1) a)  $S = \{5\}$  b)  $S = \{4; 6\}$  c)  $S = \{0; 3; 8\}$

d)  $S = \{1\}$  e)  $S = \emptyset$

2) La droite  $y = -1$  coupe la courbe en 3 points (entre 0 et 1, en 2 et en 10) : trois solutions.

## Exercice 34 — Inéquations

a)  $S = [0; 1[ \cup ]1; 10]$

b)  $S = [0; 4[ \cup ]6; 10]$

c)  $S = [0; 10]$

d)  $S = [4; 6]$

a)  $f(1) = -2$  : 1 est exclu, car l'inégalité est stricte. c) La courbe ne monte jamais au-dessus de  $y = 2$ .

## Exercice 35 — Équation et inéquations

a)  $S = \{-4; 0; 4\}$

b)  $S = [-4; 0] \cup [4; 5]$

c)  $S = ]-3; -1[$

## Exercice 36 — Avec la formule

1) 0; 6; 6; 3; 0; 0; 6.

2)  $f(0) = 3$ ;  $f(x) = 6$  :  $S = \{-2; -1; 3\}$ .

3)

$$(x+1)(x+2) = x^2 + 3x + 2$$

$$(x^2 + 3x + 2)(x-3) = x^3 - 7x - 6$$

$f(x) = 6$  revient à  $x^3 - 7x + 6 = 12$ , soit

$x^3 - 7x - 6 = 0$ , c'est-à-dire  $(x+1)(x+2)(x-3) = 0$  : les solutions exactes sont  $-1$ ,  $-2$  et  $3$ .

4)  $f(x) \geq 6$  :  $S = [-2; -1] \cup \{3\}$ ;  $f(x) < 0$  :

$$S = ]1; 2[.$$

5)  $f(x) = 0$  : 3 solutions  $(-3, 1, 2)$ ;  $f(x) = 4$  : 3;

$$f(x) = -1 : 0.$$

## X) Comparer deux fonctions

## Exercice 37 — Deux courbes

a)  $S = \{-2; 2; 6\}$

b)  $S = ]-2; 2[ \cup ]6; 7]$

c)  $S = [-3; -2] \cup [2; 6]$

On regarde quelle courbe est au-dessus entre deux points d'intersection qui se suivent.

## Exercice 38 — Une droite et une courbe

a) La droite est sur  $y = 2$  ou au-dessous à partir de  $x = 0$  :  $S = [0; 6]$

b)  $S = ]3; 6]$  c)  $S = [-4; -2]$

d)  $S = \{-4; 2; 6\}$  e)  $S = ]-4; 2[$

## Exercice 39 — Graphique et calcul

1)

|        |    |    |    |    |   |   |
|--------|----|----|----|----|---|---|
| $x$    | -2 | -1 | 0  | 1  | 2 | 3 |
| $f(x)$ | 2  | -1 | -2 | -1 | 2 | 7 |
| $g(x)$ | -2 | -1 | 0  | 1  | 2 | 3 |

3)  $S = \{-1; 2\}$ ;

$f(x) < g(x)$  :  $S = ]-1; 2[$ .

4)  $(x+1)(x-2) = x^2 - 2x + x - 2 = x^2 - x - 2$ ;

$f(x) = g(x)$  revient à  $(x+1)(x-2) = 0$  :  $x = -1$  ou  $x = 2$ .

5)  $f(1,5) = 0,25$  :  $P \in \mathcal{C}_f$ ;

$g(1,5) = 1,5 \neq 0,25$  :  $P \notin \mathcal{C}_g$ .

