

INTERVALLES ET FONCTIONS

Cours — Seconde

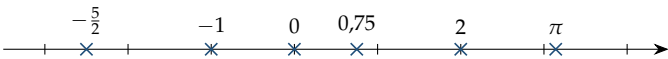
Comment utiliser ce cours

Chaque partie commence par ce qu’il faut **savoir** (définitions, propriétés), puis vient ce qu’il faut **savoir faire** : une méthode, avec des **exemples corrigés** faits en classe, puis des exercices « **À vous de jouer** » à chercher seul.

I — Droite numérique, intervalles fermés

Définition 1 — Droite numérique

Sur une droite graduée, chaque point a une abscisse, et chaque nombre est l’abscisse d’un seul point. Les nombres ainsi repérés sont les **nombres réels** ; leur ensemble est noté $\mathbb{R}$, et la droite graduée s’appelle la **droite numérique**.



Définition 2 — Symboles de comparaison

On écrit	On lit	Cela veut dire
$a < b$	a est strictement inférieur à b	a est plus petit que b , sans lui être égal
$a \leq b$	a est inférieur ou égal à b	$a < b$ ou $a = b$
$a > b$	a est strictement supérieur à b	a est plus grand que b , sans lui être égal
$a \geq b$	a est supérieur ou égal à b	$a > b$ ou $a = b$

Le petit trait sous $\leq$ et $\geq$ dit que l’égalité est permise : $4 \leq 4$ est vrai, $4 < 4$ est faux ; $-1 \geq -6$ est vrai.

Exemple — l’intervalle $[-1;3]$

Les nombres x compris entre -1 et 3 , ces deux nombres compris, vérifient $-1 \leq x \leq 3$. Leur ensemble est l’**intervalle** $[-1;3]$; -1 et 3 en sont les **bornes**.



On écrit $0 \in [-1;3]$, $3 \in [-1;3]$ et $4 \notin [-1;3]$: $\in$ se lit « appartient à », $\notin$ « n’appartient pas à ».

Définition 3 — Intervalle fermé

Pour deux réels $a < b$, l’intervalle $[a;b]$ est l’ensemble des réels x tels que $a \leq x \leq b$. Ses deux bornes lui appartiennent : les crochets sont **tournés vers l’intervalle**. On dit que l’intervalle est **fermé**.

Méthode 1 — Représenter un intervalle fermé

Exemples corrigés

Représenter sur une droite graduée :

- a) $I = [-2;3]$
- b) $J = [-\frac{3}{2};\frac{1}{2}]$

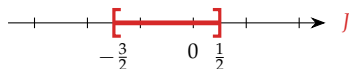
a)



On place les bornes -2 et 3 , on trace les crochets tournés vers l'intérieur, puis on épaissit le trait entre les deux.

les bornes sont dans I

b)



$-\frac{3}{2} = -1,5$ est au milieu de -2 et -1 ; $\frac{1}{2} = 0,5$ au milieu de 0

une fraction se place par son écriture décimale

et 1 .

À vous de jouer

Représenter sur une droite graduée : $[1; 6]$ $[-5; -2]$ $[-\frac{1}{2}; \frac{5}{2}]$

Méthode 2 — Dire si un nombre appartient à un intervalle

Exemples corrigés

Pour chaque nombre 1 ; $\frac{2}{3}$; $\frac{1}{2}$; π ; $4,01$, dire s'il appartient à $I = [\frac{2}{3}; 4]$.

Résolution

$1 \in I$, car $\frac{2}{3} \leq 1 \leq 4$.

on compare aux deux bornes

$\frac{2}{3} \in I$: c'est une borne, et le crochet est fermé.

crochet tourné vers l'intervalle

$\frac{1}{2} \notin I$, car $\frac{1}{2} = 0,5$ et $\frac{2}{3} \simeq 0,67$.

on passe aux écritures décimales

$\pi \in I$, car $\pi \simeq 3,14$.

$4,01 \notin I$, car $4,01 > 4$.

À vous de jouer

1°) Avec $J = [-3; \frac{5}{2}]$, compléter par $\in$ ou $\notin$: $-3 \dots J$ $\frac{5}{2} \dots J$ $2,6 \dots J$ $\pi \dots J$
 $-3,1 \dots J$

2°) Même question avec $K = [-1; \pi]$: $-1 \dots K$ $3 \dots K$ $3,2 \dots K$ $-1,5 \dots K$

Réponses : 1°) $-3 \in J$; $\frac{5}{2} \in J$; $2,6 \notin J$; $\pi \notin J$; $-3,1 \notin J$. 2°) $-1 \in K$; $3 \notin K$; $3,2 \notin K$ ($\pi \simeq 3,14$); $-1,5 \notin K$.

► **À faire** : fiche d'exercices du chapitre, exercices 1 à 3.

II — Intervalles ouverts, inégalités

Définition 4 — Bornes exclues, infini

- Un crochet **tourné vers l'extérieur** indique que la borne **n'appartient pas** à l'intervalle.
- Un intervalle sans aucune de ses bornes est **ouvert**; avec une seule de ses bornes, il est **semi-ouvert**.
- Quand l'intervalle n'est pas limité d'un côté, on écrit $+\infty$ (« plus l'infini ») ou $-\infty$ (« moins l'infini »); de ce côté, le crochet est toujours tourné vers l'extérieur. L'infini n'est pas un nombre : on ne peut jamais l'atteindre.

Exemples

Inégalité(s)	Représentation	Intervalle
$-2 < x < 3$		$x \in]-2; 3[$ (ouvert)
$-2 < x \leq 3$		$x \in]-2; 3]$ (-2 exclu, 3 inclus)
$x > 1$		$x \in]1; +\infty[$
$x \leq 4$		$x \in]-\infty; 4]$
tous les réels		$x \in]-\infty; +\infty[$, c'est-à-dire $x \in \mathbb{R}$

Propriété 1 — À retenir

Réels x tels que	Notation	Représentation
$a \leq x < b$	$x \in [a; b[$	
$x > a$	$x \in]a; +\infty[$	
$x \leq b$	$x \in]-\infty; b]$	

$\leq$ ou $\geq$: crochet **fermé**; $<$, $>$, $+\infty$ ou $-\infty$: crochet **ouvert**.

Méthode 3 — Passer d'une inégalité à un intervalle, et inversement

Exemples corrigés

a) Écrire avec un intervalle, puis représenter : $-1 < x \leq 4$ $x \geq -2$ $x < \frac{3}{2}$

b) Écrire avec une inégalité : $x \in [-5; 1[$ $x \in]2; +\infty[$

a)

$-1 < x \leq 4$: $x \in]-1; 4]$	
$x \geq -2$: $x \in [-2; +\infty[$	
$x < \frac{3}{2}$: $x \in]-\infty; \frac{3}{2}[$	

Les crochets suivent les symboles : fermé pour $\leq$ et $\geq$, ouvert pour $<$, $>$ et du côté de l'infini.

on écrit toujours la plus petite borne à gauche

b)
 $x \in [-5; 1[$ s'écrit $-5 \leq x < 1$.
 $x \in]2; +\infty[$ s'écrit $x > 2$.

*-5 inclus, 1 exclu
 2 exclu*

À vous de jouer

- 1°) Écrire avec un intervalle, puis représenter : $2 \leq x < 7$ $x > -3$ $x \leq 1,5$ $-2 < x < \frac{1}{2}$
 2°) Écrire avec une inégalité : $x \in]-\infty; 4[$ $x \in]-3; 2]$ $x \in [0; +\infty[$

Réponses : 1°) $[2; 7[$; $] -3; +\infty[$; $] -\infty; 1,5]$; $] -2; \frac{1}{2}[$. 2°) $x < 4$; $-3 < x \leq 2$; $x \geq 0$.

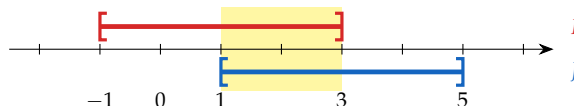
► **À faire** : fiche d'exercices du chapitre, exercices 4 à 8.

III — Intersection, réunion, complémentaire

Définition 5 — Intersection

L'**intersection** de deux intervalles I et J , notée $I \cap J$ (« I inter J »), est l'ensemble des nombres qui appartiennent à la fois à I et à J . S'il n'y en a aucun, l'intersection est l'**ensemble vide**, noté $\emptyset$.

Exemple — $I = [-1; 3]$ et $J = [1; 5]$

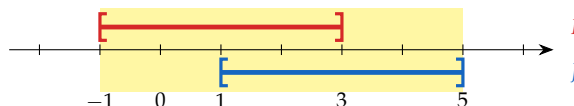


Les deux intervalles se superposent de 1 à 3 (zone surlignée), et 1 et 3 sont dans I et dans J : $I \cap J = [1; 3]$.

Définition 6 — Réunion

La **réunion** de deux intervalles I et J , notée $I \cup J$ (« I union J »), est l'ensemble des nombres qui appartiennent à I ou à J : à I seulement, à J seulement, ou aux deux.

Exemple — $I = [-1; 3]$ et $J = [1; 5]$



À eux deux, les intervalles couvrent la droite de -1 à 5 (zone surlignée) : $I \cup J = [-1; 5]$.

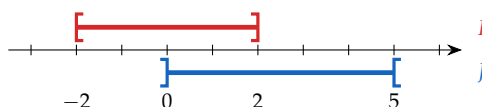
Méthode 4 — Trouver l'intersection et la réunion

Exemples corrigés

Déterminer $I \cap J$ et $I \cup J$:

- a) $I = [-2; 2]$ et $J =]0; 5[$
- b) $I =]-\infty; -2]$ et $J = [1; 3]$

a)



Les intervalles se superposent de 0 à 2 ; $0 \notin J$ et $2 \in I \cap J$:

on représente I et J sur le même axe

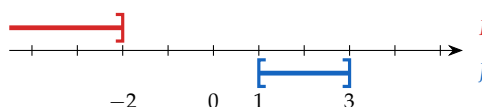
$$I \cap J =]0; 2]$$

Ils couvrent de -2 ($-2 \in I$) à 5 (5 n'est ni dans I ni dans J) :

une borne de $I \cup J$ est dans I ou dans J

$$I \cup J = [-2; 5[$$

b)



Aucune zone commune : $I \cap J = \emptyset$.

La réunion ne s'écrit pas avec un seul intervalle :

il y a un trou entre -2 et 1

$$I \cup J =]-\infty; -2] \cup [1; 3]$$

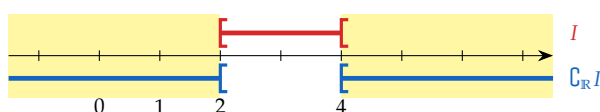
À vous de jouerDéterminer $I \cap J$ et $I \cup J$:

- a) $I = [-3; 2[$ et $J = [-1; +\infty[$
 b) $I =]-\infty; 1]$ et $J =]1; 4]$
 c) $I = [0; 5]$ et $J =]1; 3[$

Réponses : a) $I \cap J = [-1; 2[$, $I \cup J = [-3; +\infty[$; b) $I \cap J = \emptyset$ ($1 \notin J$), $I \cup J =]-\infty; 4]$; c) $I \cap J =]1; 3[$, $I \cup J = [0; 5]$ (J est dans I).

Définition 7 — Complémentaire

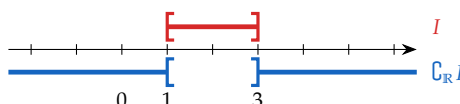
Le **complémentaire** dans $\mathbb{R}$ d'un intervalle I , noté $\complement_{\mathbb{R}} I$, est l'ensemble des réels qui **n'appartiennent pas** à I .

Exemple — $I = [2; 4[$ 

Le complémentaire est tout le reste de la droite. $2 \in I$, donc 2 n'est pas dans le complémentaire; $4 \notin I$, donc 4 y est : $\complement_{\mathbb{R}} I =]-\infty; 2[\cup [4; +\infty[$.

Méthode 5 — Trouver le complémentaire d'un intervalle**Exemples corrigés**Déterminer le complémentaire dans $\mathbb{R}$ de :

- a) $I = [1; 3]$
 b) $K =]-\infty; 2[$

a)

1 et 3 sont dans I , donc pas dans son complémentaire :

chaque crochet se retourne

$$\complement_{\mathbb{R}} I =]-\infty; 1[\cup]3; +\infty[.$$

b)

$2 \notin K$, donc 2 est dans le complémentaire : $\complement_{\mathbb{R}} K = [2; +\infty[$.

le crochet en 2 se retourne

À vous de jouer

Déterminer le complémentaire dans $\mathbb{R}$ de : $L =]-2; +\infty[$ $M = [1; 4[$ $N =]-\infty; 3]$

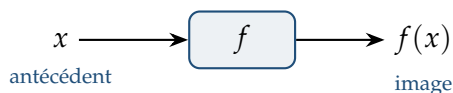
Réponses : $\complement_{\mathbb{R}} L =]-\infty; -2]$; $\complement_{\mathbb{R}} M =]-\infty; 1[\cup [4; +\infty[$; $\complement_{\mathbb{R}} N =]3; +\infty[$.

► **À faire** : fiche d'exercices du chapitre, exercices 9 à 13.

IV — Image et antécédent**Définition 8 — Fonction, image, antécédent**

Une **fonction** f associe à chaque nombre x de départ **un seul** nombre, noté $f(x)$ (on lit « f de x »).

- $f(x)$ est l'**image** de x par f ;
- x est un **antécédent** de $f(x)$ par f .



Exemple : avec $f(x) = 3x - 2$, on a $f(4) = 3 \times 4 - 2 = 10$; 10 est l'image de 4, et 4 est un antécédent de 10. On écrit aussi $f : 4 \mapsto 10$.

Méthode 6 — Calculer une image

On remplace x par le nombre, **entre parenthèses** s'il est négatif, puis on calcule en respectant les priorités.

Exemples corrigés

- a) Soit $f(x) = 4x - 3$. Calculer $f(3)$ et $f(-2)$.
 b) Soit $h(x) = 2x^2 - 3x + 1$. Calculer $h(3)$, $h(-2)$ et $h(\frac{1}{2})$.

a)

$$f(3) = 4 \times 3 - 3 \quad \text{on remplace } x \text{ par } 3$$

$$f(3) = 9$$

$$f(-2) = 4 \times (-2) - 3 \quad -2 \text{ entre parenthèses}$$

$$f(-2) = -11$$

b)

$$h(3) = 2 \times 3^2 - 3 \times 3 + 1 \quad \text{on remplace } x \text{ par } 3$$

$$h(3) = 18 - 9 + 1 \quad \text{la puissance d'abord : } 3^2 = 9$$

$$h(3) = 10$$

$$h(-2) = 2 \times (-2)^2 - 3 \times (-2) + 1 \quad (-2)^2 = 4, \text{ et non } -4$$

$$h(-2) = 8 + 6 + 1$$

$$h(-2) = 15$$

$$h\left(\frac{1}{2}\right) = 2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 3 \times \frac{1}{2} + 1 \quad \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

$$h\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} - \frac{3}{2} + 1$$

$$h\left(\frac{1}{2}\right) = 0 \quad \frac{1}{2} - \frac{3}{2} = -1$$

À vous de jouer

- 1°) Soit $g(x) = \frac{2}{3}x + 1$. Calculer $g(6)$, $g(0)$ et $g(\frac{3}{4})$.
 2°) Soit $k(x) = -x^2 + 3x + 2$. Calculer $k(2)$, $k(-1)$ et $k(\frac{1}{2})$.

Réponses : 1°) $g(6) = 5$; $g(0) = 1$; $g(\frac{3}{4}) = \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2}$. 2°) $k(2) = -4 + 6 + 2 = 4$; $k(-1) = -1 - 3 + 2 = -2$; $k(\frac{1}{2}) = -\frac{1}{4} + \frac{3}{2} + 2 = \frac{13}{4}$.

Méthode 7 — Chercher ou vérifier un antécédent

Chercher les antécédents de b , c'est **résoudre l'équation** $f(x) = b$. Vérifier que a est un antécédent de b , c'est **calculer** $f(a)$ et regarder si l'on trouve b .

Exemples corrigés

- a) Soit $f(x) = 3x + 2$. Déterminer l'antécédent de -10 par f .
 b) Soit $p(x) = x^2 + 2x$. Le nombre -3 est-il un antécédent de 3 par p ? Et le nombre 2?

a)

$$3x + 2 = -10 \quad \text{on résout } f(x) = -10$$

$$3x = -12 \quad \text{on retranche 2}$$

$$x = -4 \quad \text{on divise par 3}$$

L'antécédent de -10 par f est -4 .

$$\text{vérification : } 3 \times (-4) + 2 = -10$$

b)

$$p(-3) = (-3)^2 + 2 \times (-3) \quad \text{on calcule l'image de } -3$$

$$p(-3) = 9 - 6 = 3$$

$$p(2) = 2^2 + 2 \times 2 = 8$$

$p(-3) = 3$: -3 est un antécédent de 3 ; $p(2) = 8 \neq 3$: 2 n'en est pas un.

À vous de jouer

1°) Soit $u(x) = 4x - 7$. Déterminer l'antécédent de 9 par u .

2°) Soit $k(x) = -x^2 + 3x + 2$. Le nombre -1 est-il un antécédent de -2 par k ? Et le nombre 3 ?

Réponses : 1°) $4x - 7 = 9$, donc $x = 4$. 2°) $k(-1) = -2$: oui; $k(3) = -9 + 9 + 2 = 2 \neq -2$: non.

► **À faire** : fiche d'exercices du chapitre, exercices 14 à 17.

V — Ensemble de définition

Deux calculs impossibles

Certains nombres n'ont pas d'image, parce que le calcul est impossible : ce sont des **valeurs interdites**.

- Avec $f(x) = \frac{1}{x}$, $f(0) = 1 \div 0$ n'existe pas : **on ne divise pas par zéro**. Le nombre 0 est une valeur interdite.
- Avec $g(x) = \sqrt{x}$, $g(-4) = \sqrt{-4}$ n'existe pas : **un nombre négatif n'a pas de racine carrée**. Tous les nombres strictement négatifs sont interdits.

Définition 9 — Ensemble de définition

L'**ensemble de définition** d'une fonction f , noté D_f , est l'ensemble des nombres qui ont une image par f . On note $f : D_f \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto f(x)$.

Exemples : $D_f =]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[$ pour $f(x) = \frac{1}{x}$; $D_g = [0; +\infty[$ pour $g(x) = \sqrt{x}$.

Propriété 2 — À retenir

- Une **fonction affine** $f(x) = ax + b$ est définie sur $\mathbb{R}$, comme toute expression sans quotient ni racine carrée (par exemple $x^2 + 5x - 3$).
- Un **dénominateur** ne doit pas être nul : les nombres qui l'annulent sont des valeurs interdites.
- Sous une **racine carrée**, le nombre doit être **positif ou nul**.

Méthode 8 — Trouver la valeur interdite d'un quotient

On résout l'équation « dénominateur = 0 ».

Exemples corrigés

Trouver la valeur interdite de $h(x) = \frac{1}{3x-2}$ et de $u(x) = \frac{x+1}{x-4}$.

Résolution

$$3x - 2 = 0 \quad \text{le dénominateur de } h \text{ s'annule}$$

$$3x = 2$$

$$x = \frac{2}{3}$$

$$x - 4 = 0 \quad \text{le dénominateur de } u \text{ s'annule}$$

$$x = 4$$

La valeur interdite de h est $\frac{2}{3}$, celle de u est 4.

$h(\frac{2}{3})$ et $u(4)$ n'existent pas

À vous de jouer

Trouver la valeur interdite de $p(x) = \frac{x-2}{2x+8}$ et de $v(x) = \frac{3}{x+5}$.

Réponses : $2x+8=0$: valeur interdite -4 ; $x+5=0$: valeur interdite -5 .

Méthode 9 — Déterminer un ensemble de définition

Sans quotient ni racine : $D_f = \mathbb{R}$. Avec un quotient : on retire de $\mathbb{R}$ la valeur interdite. Avec une racine : on résout « nombre sous la racine ≥ 0 » comme une équation (on ajoute ou on retranche un même nombre, on divise par un même nombre positif).

Exemples corrigés

Déterminer l'ensemble de définition de :

$$f(x) = 2x + 7 \quad h(x) = \frac{1}{3x-2} \quad i(x) = \sqrt{x-4} \quad j(x) = \sqrt{3x+6}$$

Résolution

f est affine : $D_f = \mathbb{R}$.

ni quotient ni racine

La valeur interdite de h est $\frac{2}{3}$ (méthode 8) :

on retire $\frac{2}{3}$

$$D_h =]-\infty; \frac{2}{3}[\cup]\frac{2}{3}; +\infty[.$$

$$x - 4 \geq 0 \quad \text{le nombre sous la racine de } i \text{ est positif ou nul}$$

$$x \geq 4 \quad \text{on ajoute 4}$$

$$3x + 6 \geq 0 \quad \text{même travail pour } j$$

$$3x \geq -6 \quad \text{on retranche 6}$$

$$x \geq -2 \quad \text{on divise par 3, qui est positif}$$

$$D_i = [4; +\infty[\text{ et } D_j = [-2; +\infty[.$$

on conclut avec des intervalles

À vous de jouer

Déterminer l'ensemble de définition de :

$$g(x) = -2x + 9 \quad p(x) = \frac{x-2}{2x+8} \quad q(x) = \sqrt{x+3} \quad r(x) = \sqrt{2x-10} \quad s(x) = 4x - 1$$

Réponses : $D_g = \mathbb{R}$; $D_p =]-\infty; -4[\cup]-4; +\infty[$; $D_q = [-3; +\infty[$; $D_r = [5; +\infty[$; $D_s = \mathbb{R}$.

► **À faire** : fiche d'exercices du chapitre, exercices 18 à 21.

VI — Tableau de valeurs

Définition 10 — Tableau de valeurs

Un **tableau de valeurs** d'une fonction f donne sur la première ligne des valeurs de x (des **antécédents**) et sur la seconde leurs **images** $f(x)$. Une image se lit de haut en bas, un antécédent de bas en haut.

Le **pas** est l'écart entre deux valeurs de x qui se suivent. De -2 à 2 avec un pas de 1 : $-2; -1; 0; 1; 2$. Avec un pas de $0,5$: $-2; -1,5; -1; \dots; 2$.

Méthode 10 — Dresser et lire un tableau de valeurs

Exemples corrigés

- a) Soit $f(x) = 3x - 2$. Dresser le tableau de valeurs de f de -3 à 3 avec un pas de 1 . Donner l'image de -3 et un antécédent de 4 .
- b) Même travail avec $g(x) = x^2 - 1$, de -3 à 3 avec un pas de 1 . Combien le nombre 3 a-t-il d'antécédents dans le tableau ?

a)

$f(-3) = 3 \times (-3) - 2 = -11$, $f(-2) = -8$, et ainsi de suite. *on calcule chaque image (méthode 6)*

x	-3	-2	-1	0	1	2	3	← antécédents
$f(x)$	-11	-8	-5	-2	1	4	7	← images

L'image de -3 est -11 ; un antécédent de 4 est 2 .

haut vers bas, puis bas vers haut

b)

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$g(x)$	8	3	0	-1	0	3	8

$g(-2) = 3$ et $g(2) = 3$: le nombre 3 a deux antécédents, -2 et 2 . *un nombre peut avoir plusieurs antécédents*

À retenir

Un nombre de départ n'a **qu'une seule image**; un nombre peut avoir **plusieurs antécédents**, ou aucun.

À vous de jouer

Soit $u(x) = -x^2 + 4x$.

1°) Dresser le tableau de valeurs de u de -1 à 5 avec un pas de 1 .

2°) Donner l'image de 2 , puis les antécédents de 0 et de 3 lus dans le tableau.

Réponses : 1°) $u(-1) = -5$; $u(0) = 0$; $u(1) = 3$; $u(2) = 4$; $u(3) = 3$; $u(4) = 0$; $u(5) = -5$. 2°) $u(2) = 4$; antécédents de 0 : 0 et 4 ; de 3 : 1 et 3 .

► **À faire** : fiche d'exercices du chapitre, exercices 22 à 24.

VII — Courbe représentative

Définition 11 — Courbe d'une fonction

Dans un repère, la **courbe représentative** $\mathcal{C}_f$ d'une fonction f est formée des points de coordonnées $(x; f(x))$: antécédents en abscisse, images en ordonnée. Un point $M(x; y)$ est sur $\mathcal{C}_f$ lorsque $y = f(x)$.

Méthode 11 — Tracer une courbe, lire images et antécédents

On place les points d'un tableau de valeurs et on les relie à main levée par une courbe **sans angle**. L'**image** de a se lit en ordonnée, au-dessus (ou au-dessous) de a ; les **antécédents** de b sont les abscisses des points de la courbe situés sur la droite horizontale $y = b$.

Exemples corrigés

Soit $f(x) = x^2 - 4$, de -3 à 3 .

- Dresser le tableau de valeurs de f de -3 à 3 avec un pas de 1, puis tracer la courbe de f .
- Lire les antécédents de 5, puis ceux de -5 .

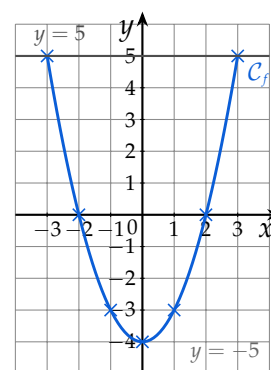
a)

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$	5	0	-3	-4	-3	0	5

On place les sept points, puis on les relie : la courbe obtenue est une **parabole**.

b)

La droite $y = 5$ coupe la courbe aux points d'abscisses -3 et 3 : les antécédents de 5 sont -3 et 3 . La droite $y = -5$ ne coupe pas la courbe : -5 n'a pas d'antécédent.

**Remarque**

Une courbe représente une fonction seulement si chaque droite verticale la coupe **au plus une fois** : un nombre n a qu'une image.

Méthode 12 — Savoir si un point est sur une courbe

On calcule l'image de l'abscisse du point et on la compare à son ordonnée : $M(x_M; y_M)$ est sur C_f lorsque $f(x_M) = y_M$.

Exemples corrigés

Avec $f(x) = x^2 - 4$: les points $A(2,5; 2,25)$ et $B(-1; 3)$ sont-ils sur C_f ?

Point A

$$f(2,5) = 2,5^2 - 4 \quad \text{l'image de l'abscisse de A}$$

$$f(2,5) = 6,25 - 4$$

$$f(2,5) = 2,25$$

$$f(2,5) = 2,25, \text{ l'ordonnée de A : } A \in C_f.$$

on compare à l'ordonnée

Point B

$$f(-1) = (-1)^2 - 4 \quad \text{l'image de l'abscisse de B}$$

$$f(-1) = 1 - 4$$

$$f(-1) = -3$$

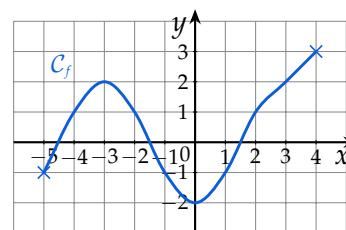
$$f(-1) = -3, \text{ alors que l'ordonnée de B est 3 : } B \notin C_f.$$

$$-3 \neq 3$$

À vous de jouer

1°) Ci-contre, la courbe d'une fonction f . Lire :

- l'ensemble de définition de f ;
- l'image de -3 , de 0 et de 4 ;
- les antécédents de 1 , de -1 , de 2 et de 4 .



2°) Soit $u(x) = 2x^2 - 5$. Les points $A(-2; 3)$, $B(1,5; -0,5)$ et $C(0; 5)$ sont-ils sur la courbe de u ?

Réponses : 1°) a) $D_f = [-5; 4]$; b) $f(-3) = 2$, $f(0) = -2$, $f(4) = 3$; c) antécédents de 1 : -4 , -2 et 2 ; de -1 : -5 , -1 et 1 ; de 2 : -3 et 3 ; 4 n'en a pas. 2°) $u(-2) = 3$: A oui; $u(1,5) = -0,5$: B oui; $u(0) = -5 \neq 5$: C non.

► **À faire** : fiche d'exercices du chapitre, exercices 25 à 28.

VIII — Calculatrice NumWorks

Application Calculs

Pour	On tape	On obtient
une puissance	$3 \boxed{x^y} 4$	$3^4 = 81$
une fraction	la touche $\boxed{\div}$ crée une fraction	$\frac{3}{4} + \frac{2}{5} = \frac{23}{20}$
reprendre un calcul	flèche $\boxed{\uparrow}$, puis $\boxed{OK}$	le calcul revient dans la ligne de saisie
effacer l'historique	$\boxed{shift}$ puis $\boxed{\leftarrow}$ (clear)	écran vide
une puissance de 10	touche $\boxed{\times 10^x}$: $3 \times 10^2 + 1,5 \times 10^3$	1 800
décomposer un entier	$\boxed{toolbox}$, Arithmétique, factor(360)	$2^3 \times 3^2 \times 5$
le nombre π	$\boxed{shift}$ $\boxed{\times 10^x}$: $2 \times \pi \times 3$	$\simeq 18,85$

Un nombre négatif se tape entre parenthèses : $2 \times (-3)^2$ vaut 18, mais 2×-3^2 est compris comme $2 \times (-9) = -18$. Les intitulés peuvent varier selon la version du logiciel.

Application Grapheur

Pour	On fait
entrer une fonction	Onglet Expressions, Ajouter un élément, puis par exemple $f(x) = x^2 - 2$ (x avec la touche $\boxed{x, n, t}$) et $\boxed{OK}$.
afficher un tableau	Onglet Tableau, Régler l'intervalle : X début, X fin, Pas.
tracer la courbe	Onglet Graphique, menu Axes pour régler $X_{\min}$, $X_{\max}$, $Y_{\min}$, $Y_{\max}$.
lire une image	Sur la courbe : $\boxed{OK}$, Aller à, puis la valeur de x .
chercher des antécédents	Sur la courbe : $\boxed{OK}$, Calculer, Antécédent, puis la valeur; les flèches passent d'un antécédent à l'autre.
couper deux courbes	Sur l'une des courbes : $\boxed{OK}$, Calculer, Intersection.

Méthode 13 — Étudier une fonction à la calculatrice

On entre la fonction, on règle le tableau (début, fin, pas), puis les axes d'après le tableau; on lit enfin images et antécédents.

Exemples corrigés

Soit $f(x) = x^2 - 2$.

- Afficher le tableau de valeurs de f de -4 à 4 avec un pas de 1.

- b) Tracer la courbe de f avec des axes adaptés.
 c) Lire $f(3)$ et $f(1,5)$, puis les antécédents de 3 arrondis à 0,01.

a)

Régler l'intervalle : X début -4 , X fin 4 , Pas 1 .*début, fin et pas*

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$f(x)$	14	7	2	-1	-2	-1	2	7	14

b)

Axes : $X_{\min} = -4$, $X_{\max} = 4$, $Y_{\min} = -3$, $Y_{\max} = 15$.*un peu au-delà de la plus petite et de la plus grande image*

c)

Aller à : $f(3) = 7$ et $f(1,5) = 0,25$.*lecture d'une image*Calculer, Antécédent, valeur 3 : $x \simeq -2,24$ et $x \simeq 2,24$.*deux antécédents, donnés arrondis***À vous de jouer**Soit $g(x) = (x + 1)^2$.1°) Afficher le tableau de valeurs de g de -3 à 3 avec un pas de $0,5$, et le recopier.2°) Tracer la courbe de g avec des axes adaptés.3°) Lire $g(0,25)$, puis les antécédents de 3 arrondis à 0,01.

Réponses : 1°) $4; 2,25; 1; 0,25; 0; 0,25; 1; 2,25; 4; 6,25; 9; 12,25; 16$. 2°) par exemple x de -3 à 3 , y de -1 à 17 . 3°) $g(0,25) = 1,5625$; antécédents de 3 : $\simeq -2,73$ et $\simeq 0,73$.

► **À faire** : fiche d'exercices du chapitre, exercices 29 à 32.**IX — Résolution graphique****Propriété 3 — Résoudre graphiquement**

- Les solutions de $f(x) = k$ sont les **abscisses** des points de $\mathcal{C}_f$ situés sur la droite horizontale $y = k$: ce sont les antécédents de k .
- Les solutions de $f(x) > k$ sont les abscisses des points de $\mathcal{C}_f$ situés **strictement au-dessus** de cette droite ; pour $f(x) < k$, **strictement au-dessous**.
- Pour $f(x) \geq k$ ou $f(x) \leq k$, on garde aussi les points sur la droite : crochets fermés.

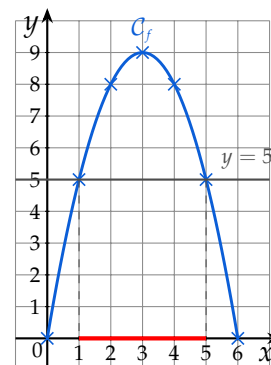
Une équation se conclut par des **accolades**, une inéquation par des **intervalles**.**Méthode 14 — Résoudre graphiquement une équation ou une inéquation****Exemples corrigés**

Un rectangle a un périmètre de 12 cm ; un de ses côtés mesure x cm, avec $0 \leq x \leq 6$. Son aire est $f(x) = 6x - x^2$.

- a) Dresser le tableau de valeurs de f de 0 à 6 avec un pas de 1 , puis tracer la courbe de f .
 b) Résoudre graphiquement $f(x) = 5$, puis $f(x) = 10$.
 c) Résoudre graphiquement $f(x) \geq 5$, puis $f(x) < 5$.

a)

x	0	1	2	3	4	5	6
$f(x)$	0	5	8	9	8	5	0



b)

La droite $y = 5$ coupe C_f aux points d'abscisses 1 et 5 :
 $S = \{1; 5\}$. La droite $y = 10$ ne coupe pas C_f : $S = \emptyset$.

c)

C_f est sur la droite $y = 5$ ou au-dessus entre 1 et 5 : $S = [1; 5]$
 (en rouge sur l'axe). C_f est strictement au-dessous au début et
 à la fin : $S = [0; 1[\cup]5; 6]$.

Le rectangle a une aire d'au moins 5 cm^2 quand son côté
 mesure entre 1 et 5 cm.

on revient au problème

Remarque

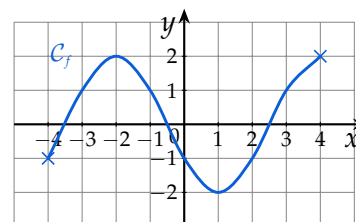
Une lecture graphique donne en général des valeurs **approchées** ; ici, le calcul confirme les valeurs lues :
 $f(1) = 6 - 1 = 5$ et $f(5) = 30 - 25 = 5$. On ne conclut que sur la partie tracée de la courbe.

À vous de jouer

Ci-contre, la courbe d'une fonction f définie sur $[-4; 4]$.

1°) Résoudre graphiquement : $f(x) = 1$ $f(x) = 2$
 $f(x) = -2$ $f(x) = 3$

2°) Résoudre graphiquement : $f(x) \geq 1$ $f(x) < 2$
 $f(x) > -2$



Réponses : 1°) $S = \{-3; -1; 3\}$; $S = \{-2; 4\}$; $S = \{1\}$; $S = \emptyset$. 2°) $S = [-3; -1] \cup [3; 4]$; $S = [-4; -2[\cup]-2; 4[$; $S = [-4; 1[\cup]1; 4]$.

► **À faire** : fiche d'exercices du chapitre, exercices 33 à 36.

X — Comparer deux fonctions

Propriété 4 — Deux courbes

Soit f et g deux fonctions définies sur un même intervalle.

- Les solutions de $f(x) = g(x)$ sont les abscisses des **points d'intersection** de C_f et C_g .
- Les solutions de $f(x) < g(x)$ sont les abscisses des points où C_f est **strictement au-dessous** de C_g ; pour $f(x) > g(x)$, **strictement au-dessus**.

Pour $f(x) \leq g(x)$ ou $f(x) \geq g(x)$, on ajoute les abscisses des points d'intersection.

Méthode 15 — Comparer graphiquement deux fonctions

Exemples corrigés

Sur $[-1; 4]$, on considère $f(x) = x^2 - 2x$ et $g(x) = x$, tracées ci-contre. Résoudre graphiquement :

- $f(x) = g(x)$
- $f(x) < g(x)$
- $f(x) \geq g(x)$

a)

Les courbes se coupent aux points d'abscisses 0 et 3 :

$$S = \{0; 3\}.$$

b)

C_f est strictement au-dessous de C_g entre 0 et 3, bornes exclues : $S =]0; 3[$ (en rouge sur l'axe).

c)

C_f est au-dessus de C_g , ou la coupe, sur le reste de l'intervalle :

$$S = [-1; 0] \cup [3; 4].$$

Vérification : $f(0) = 0$ et $g(0) = 0$; $f(3) = 9 - 6 = 3$ et $g(3) = 3$.

À vous de jouer

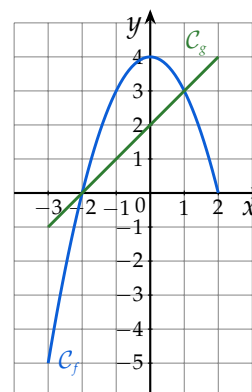
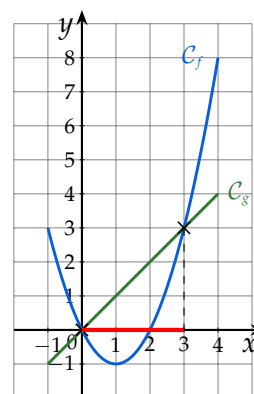
Sur $[-3; 2]$, on considère $f(x) = 4 - x^2$ et $g(x) = x + 2$, tracées ci-contre. Résoudre graphiquement :

1°) $f(x) = g(x)$

2°) $f(x) \leq g(x)$

3°) $f(x) > g(x)$

Réponses : 1°) $S = \{-2; 1\}$; 2°) $S = [-3; -2] \cup [1; 2]$; 3°) $S =]-2; 1[$.



► **À faire** : fiche d'exercices du chapitre, exercices 37 à 39.