

INTERVALLES ET FONCTIONS

Cours — Seconde
Version élève

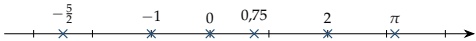
Comment utiliser ce cours

Chaque partie commence par ce qu’il faut **savoir** (définitions, propriétés), puis vient ce qu’il faut **savoir faire** : une méthode, avec des **exemples** faits en classe, puis des exercices « **À vous de jouer** » à chercher seul.
Sur cette feuille, seuls les **énoncés** des exemples figurent : la résolution, signalée par la mention *(au tableau)*, est à rédiger dans le cahier.

I — Droite numérique, intervalles fermés

Définition 1 — Droite numérique

Sur une droite graduée, chaque point a une abscisse, et chaque nombre est l’abscisse d’un seul point. Les nombres ainsi repérés sont les **nombres réels** ; leur ensemble est noté $\mathbb{R}$, et la droite graduée s’appelle la **droite numérique**.



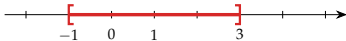
Définition 2 — Symboles de comparaison

On écrit	On lit	Cela veut dire
$a < b$	a est strictement inférieur à b	a est plus petit que b , sans lui être égal
$a \leq b$	a est inférieur ou égal à b	$a < b$ ou $a = b$
$a > b$	a est strictement supérieur à b	a est plus grand que b , sans lui être égal
$a \geq b$	a est supérieur ou égal à b	$a > b$ ou $a = b$

Le petit trait sous $\leq$ et $\geq$ dit que l’égalité est permise : $4 \leq 4$ est vrai, $4 < 4$ est faux ; $-1 \geq -6$ est vrai.

Exemple — l’intervalle $[-1;3]$

Les nombres x compris entre -1 et 3 , ces deux nombres compris, vérifient $-1 \leq x \leq 3$. Leur ensemble est l’**intervalle** $[-1;3]$; -1 et 3 en sont les **bornes**.



On écrit $0 \in [-1;3]$, $3 \in [-1;3]$ et $4 \notin [-1;3]$: $\in$ se lit « appartient à », $\notin$ « n’appartient pas à ».

Définition 3 — Intervalle fermé

Pour deux réels $a < b$, l’intervalle $[a;b]$ est l’ensemble des réels x tels que $a \leq x \leq b$. Ses deux bornes lui appartiennent : les crochets sont **tournés vers l’intervalle**. On dit que l’intervalle est **fermé**.

Méthode 1 — Représenter un intervalle fermé

Exemples

Représenter sur une droite graduée :

a) $I = [-2;3]$

b) $J = [-\frac{3}{2};\frac{1}{2}]$

À vous de jouer

Représenter sur une droite graduée : $[1;6]$ $[-5;-2]$ $[-\frac{1}{2};\frac{5}{2}]$

(au tableau)

Méthode 2 — Dire si un nombre appartient à un intervalle

Exemples

Pour chaque nombre $1; \frac{2}{3}; \frac{1}{2}; \pi; 4,01$, dire s’il appartient à $I = [\frac{2}{3};4]$.

À vous de jouer

1°) Avec $J = [-3;\frac{5}{2}]$, compléter par $\in$ ou $\notin$: $-3 \dots J$ $\frac{5}{2} \dots J$ $2,6 \dots J$ $\pi \dots J$
 $-3,1 \dots J$

2°) Même question avec $K = [-1;\pi]$: $-1 \dots K$ $3 \dots K$ $3,2 \dots K$ $-1,5 \dots K$

(au tableau)

► **À faire** : fiche d’exercices du chapitre, exercices 1 à 3.

II — Intervalles ouverts, inégalités

Définition 4 — Bornes exclues, infini

- Un crochet **tourné vers l’extérieur** indique que la borne **n’appartient pas** à l’intervalle.
- Un intervalle sans aucune de ses bornes est **ouvert** ; avec une seule de ses bornes, il est **semi-ouvert**.
- Quand l’intervalle n’est pas limité d’un côté, on écrit $+\infty$ (« plus l’infini ») ou $-\infty$ (« moins l’infini ») ; de ce côté, le crochet est toujours tourné vers l’extérieur. L’infini n’est pas un nombre : on ne peut jamais l’atteindre.

Exemples

Inégalité(s)	Représentation	Intervalle
$-2 < x < 3$		$x \in]-2;3[$ (ouvert)
$-2 < x \leq 3$		$x \in]-2;3]$ (-2 exclu, 3 inclus)
$x > 1$		$x \in]1;+\infty[$
$x \leq 4$		$x \in]-\infty;4]$
tous les réels		$x \in]-\infty;+\infty[$, c’est-à-dire $x \in \mathbb{R}$

Propriété 1 — À retenir

Réels x tels que	Notation	Représentation
$a \leq x < b$	$x \in [a; b[$	
$x > a$	$x \in]a; +\infty[$	
$x \leq b$	$x \in]-\infty; b]$	

≤ ou ≥ : crochet **fermé**; <, >, +∞ ou −∞ : crochet **ouvert**.

Méthode 3 — Passer d’une inégalité à un intervalle, et inversement

Exemples

a) Écrire avec un intervalle, puis représenter : $-1 < x \leq 4$ $x \geq -2$ $x < \frac{3}{2}$

b) Écrire avec une inégalité : $x \in [-5; 1[$ $x \in]2; +\infty[$

À vous de jouer

1°) Écrire avec un intervalle, puis représenter : $2 \leq x < 7$ $x > -3$ $x \leq 1,5$ $-2 < x < \frac{1}{2}$

2°) Écrire avec une inégalité : $x \in]-\infty; 4[$ $x \in]-3; 2]$ $x \in [0; +\infty[$

► À faire : fiche d’exercices du chapitre, exercices 4 à 8.

III — Intersection, réunion, complémentaire

Définition 5 — Intersection

L’**intersection** de deux intervalles I et J , notée $I \cap J$ (« I inter J »), est l’ensemble des nombres qui appartiennent **à la fois** à I et à J . S’il n’y en a aucun, l’intersection est l’**ensemble vide**, noté $\emptyset$.

Exemple — $I = [-1; 3]$ et $J = [1; 5]$

Les deux intervalles se superposent de 1 à 3 (zone surlignée), et 1 et 3 sont dans I et dans J : $I \cap J = [1; 3]$.

Définition 6 — Réunion

La **réunion** de deux intervalles I et J , notée $I \cup J$ (« I union J »), est l’ensemble des nombres qui appartiennent à I **ou** à J : à I seulement, à J seulement, ou aux deux.

Exemple — $I = [-1; 3]$ et $J = [1; 5]$

À eux deux, les intervalles couvrent la droite de −1 à 5 (zone surlignée) : $I \cup J = [-1; 5]$.

Méthode 4 — Trouver l’intersection et la réunion

Exemples

Déterminer $I \cap J$ et $I \cup J$:

a) $I = [-2; 2]$ et $J =]0; 5[$

b) $I =]-\infty; -2]$ et $J = [1; 3]$

À vous de jouer

Déterminer $I \cap J$ et $I \cup J$:

a) $I = [-3; 2[$ et $J = [-1; +\infty[$

b) $I =]-\infty; 1]$ et $J =]1; 4]$

c) $I = [0; 5]$ et $J =]1; 3[$

Définition 7 — Complémentaire

Le **complémentaire** dans $\mathbb{R}$ d’un intervalle I , noté $\complement_{\mathbb{R}} I$, est l’ensemble des réels qui **n’appartiennent pas** à I .

Exemple — $I = [2; 4[$

Le complémentaire est tout le reste de la droite. $2 \in I$, donc 2 n’est pas dans le complémentaire ; $4 \notin I$, donc 4 y est : $\complement_{\mathbb{R}} I =]-\infty; 2[\cup [4; +\infty[$.

Méthode 5 — Trouver le complémentaire d’un intervalle

Exemples

Déterminer le complémentaire dans $\mathbb{R}$ de :

a) $I = [1; 3]$

b) $K =]-\infty; 2[$

À vous de jouer

Déterminer le complémentaire dans $\mathbb{R}$ de : $L =]-2; +\infty[$ $M = [1; 4[$ $N =]-\infty; 3]$

► À faire : fiche d’exercices du chapitre, exercices 9 à 13.

IV — Image et antécédent

Définition 8 — Fonction, image, antécédent

Une **fonction** f associe à chaque nombre x de départ **un seul** nombre, noté $f(x)$ (on lit « f de x »).

- $f(x)$ est l’**image** de x par f ;
- x est un **antécédent** de $f(x)$ par f .

Exemple : avec $f(x) = 3x - 2$, on a $f(4) = 3 \times 4 - 2 = 10$; 10 est l’image de 4, et 4 est un antécédent de 10. On écrit aussi $f : 4 \mapsto 10$.

Méthode 6 — Calculer une image

On remplace x par le nombre, **entre parenthèses** s'il est négatif, puis on calcule en respectant les priorités.

Exemples

(au tableau)

- a) Soit $f(x) = 4x - 3$. Calculer $f(3)$ et $f(-2)$.
 b) Soit $h(x) = 2x^2 - 3x + 1$. Calculer $h(3)$, $h(-2)$ et $h(\frac{1}{2})$.

À vous de jouer

- 1°) Soit $g(x) = \frac{2}{3}x + 1$. Calculer $g(6)$, $g(0)$ et $g(\frac{3}{4})$.
 2°) Soit $k(x) = -x^2 + 3x + 2$. Calculer $k(2)$, $k(-1)$ et $k(\frac{1}{2})$.

Méthode 7 — Chercher ou vérifier un antécédent

Chercher les antécédents de b , c'est **résoudre l'équation** $f(x) = b$. Vérifier que a est un antécédent de b , c'est **calculer** $f(a)$ et regarder si l'on trouve b .

Exemples

(au tableau)

- a) Soit $f(x) = 3x + 2$. Déterminer l'antécédent de -10 par f .
 b) Soit $p(x) = x^2 + 2x$. Le nombre -3 est-il un antécédent de 3 par p ? Et le nombre 2 ?

À vous de jouer

- 1°) Soit $u(x) = 4x - 7$. Déterminer l'antécédent de 9 par u .
 2°) Soit $k(x) = -x^2 + 3x + 2$. Le nombre -1 est-il un antécédent de -2 par k ? Et le nombre 3 ?

► À faire : fiche d'exercices du chapitre, exercices 14 à 17.

V — Ensemble de définition

Deux calculs impossibles

Certains nombres n'ont pas d'image, parce que le calcul est impossible : ce sont des **valeurs interdites**.

- Avec $f(x) = \frac{1}{x}$, $f(0) = 1 \div 0$ n'existe pas : **on ne divise pas par zéro**. Le nombre 0 est une valeur interdite.
- Avec $g(x) = \sqrt{x}$, $g(-4) = \sqrt{-4}$ n'existe pas : **un nombre négatif n'a pas de racine carrée**. Tous les nombres strictement négatifs sont interdits.

Définition 9 — Ensemble de définition

L'**ensemble de définition** d'une fonction f , noté D_f , est l'ensemble des nombres qui ont une image par f . On note $f : D_f \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x)$.

Exemples : $D_f =]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[$ pour $f(x) = \frac{1}{x}$; $D_g = [0; +\infty[$ pour $g(x) = \sqrt{x}$.

Propriété 2 — À retenir

- Une **fonction affine** $f(x) = ax + b$ est définie sur $\mathbb{R}$, comme toute expression sans quotient ni racine carrée (par exemple $x^2 + 5x - 3$).
- Un **dénominateur** ne doit pas être nul : les nombres qui l'annulent sont des valeurs interdites.
- Sous une **racine carrée**, le nombre doit être **positif ou nul**.

Méthode 8 — Trouver la valeur interdite d'un quotient

On résout l'équation « dénominateur = 0 ».

Exemples

(au tableau)

Trouver la valeur interdite de $h(x) = \frac{1}{3x-2}$ et de $u(x) = \frac{x+1}{x-4}$.

À vous de jouer

Trouver la valeur interdite de $p(x) = \frac{x-2}{2x+8}$ et de $v(x) = \frac{3}{x+5}$.

Méthode 9 — Déterminer un ensemble de définition

Sans quotient ni racine : $D_f = \mathbb{R}$. Avec un quotient : on retire de $\mathbb{R}$ la valeur interdite. Avec une racine : on résout « nombre sous la racine ≥ 0 » comme une équation (on ajoute ou on retranche un même nombre, on divise par un même nombre positif).

Exemples

(au tableau)

Déterminer l'ensemble de définition de :

$$f(x) = 2x + 7 \quad h(x) = \frac{1}{3x-2} \quad i(x) = \sqrt{x-4} \quad j(x) = \sqrt{3x+6}$$

À vous de jouer

Déterminer l'ensemble de définition de :

$$g(x) = -2x + 9 \quad p(x) = \frac{x-2}{2x+8} \quad q(x) = \sqrt{x+3} \quad r(x) = \sqrt{2x-10} \quad s(x) = 4x - 1$$

► À faire : fiche d'exercices du chapitre, exercices 18 à 21.

VI — Tableau de valeurs

Définition 10 — Tableau de valeurs

Un **tableau de valeurs** d'une fonction f donne sur la première ligne des valeurs de x (des **antécédents**) et sur la seconde leurs **images** $f(x)$. Une image se lit de haut en bas, un antécédent de bas en haut.

Le **pas** est l'écart entre deux valeurs de x qui se suivent. De -2 à 2 avec un pas de 1 : $-2; -1; 0; 1; 2$. Avec un pas de $0,5$: $-2; -1,5; -1; \dots; 2$.

Méthode 10 — Dresser et lire un tableau de valeurs

Exemples

(au tableau)

- a) Soit $f(x) = 3x - 2$. Dresser le tableau de valeurs de f de -3 à 3 avec un pas de 1 . Donner l'image de -3 et un antécédent de 4 .
 b) Même travail avec $g(x) = x^2 - 1$, de -3 à 3 avec un pas de 1 . Combien le nombre 3 a-t-il d'antécédents dans le tableau?

À retenir

Un nombre de départ n'a **qu'une seule image**; un nombre peut avoir **plusieurs antécédents**, ou aucun.

À vous de jouer

Soit $u(x) = -x^2 + 4x$.

- 1°) Dresser le tableau de valeurs de u de -1 à 5 avec un pas de 1 .
 2°) Donner l'image de 2 , puis les antécédents de 0 et de 3 lus dans le tableau.

► À faire : fiche d'exercices du chapitre, exercices 22 à 24.

VII — Courbe représentative

Définition 11 — Courbe d’une fonction

Dans un repère, la **courbe représentative** C_f d’une fonction f est formée des points de coordonnées $(x; f(x))$: antécédents en abscisse, images en ordonnée. Un point $M(x; y)$ est sur C_f lorsque $y = f(x)$.

Méthode 11 — Tracer une courbe, lire images et antécédents

On place les points d’un tableau de valeurs et on les relie à main levée par une courbe **sans angle**. L’image de a se lit en ordonnée, au-dessus (ou au-dessous) de a ; les **antécédents** de b sont les abscisses des points de la courbe situés sur la droite horizontale $y = b$.

Exemples (au tableau)

Soit $f(x) = x^2 - 4$, de -3 à 3 .

a) Dresser le tableau de valeurs de f de -3 à 3 avec un pas de 1, puis tracer la courbe de f .

b) Lire les antécédents de 5, puis ceux de -5 .

Remarque

Une courbe représente une fonction seulement si chaque droite verticale la coupe **au plus une fois** : un nombre n’a qu’une image.

Méthode 12 — Savoir si un point est sur une courbe

On calcule l’image de l’abscisse du point et on la compare à son ordonnée : $M(x_M; y_M)$ est sur C_f lorsque $f(x_M) = y_M$.

Exemples (au tableau)

Avec $f(x) = x^2 - 4$: les points $A(2,5; 2,25)$ et $B(-1; 3)$ sont-ils sur C_f ?

À vous de jouer

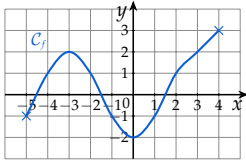
1°) Ci-contre, la courbe d’une fonction f . Lire :

a) l’ensemble de définition de f ;

b) l’image de -3 , de 0 et de 4 ;

c) les antécédents de 1, de -1 , de 2 et de 4.

2°) Soit $u(x) = 2x^2 - 5$. Les points $A(-2; 3)$, $B(1,5; -0,5)$ et $C(0; 5)$ sont-ils sur la courbe de u ?



► **À faire** : fiche d’exercices du chapitre, exercices 25 à 28.

VIII — Calculatrice NumWorks

Application Calculs

Pour	On tape	On obtient
une puissance	3 x^y 4	$3^4 = 81$
une fraction	la touche $\div$ crée une fraction	$\frac{3}{4} + \frac{2}{5} = \frac{23}{20}$
reprendre un calcul	flèche $\uparrow$, puis OK	le calcul revient dans la ligne de saisie
effacer l’historique	shift puis $\leftarrow$ (clear)	écran vide
une puissance de 10	touche $\times 10^x$: $3 \times 10^2 + 1,5 \times 10^3$	1 800
décomposer un entier	toolbox , Arithmétique, factor (360)	$2^3 \times 3^2 \times 5$
le nombre π	shift $\times 10^x$: $2 \times \pi \times 3$	$\simeq 18,85$

Un nombre négatif se tape entre parenthèses : $2 \times (-3)^2$ vaut 18, mais 2×-3^2 est compris comme $2 \times (-9) = -18$. Les intitulés peuvent varier selon la version du logiciel.

Application Grapheur

Pour	On fait
entrer une fonction	Onglet Expressions, Ajouter un élément, puis par exemple $f(x) = x^2 - 2$ (x avec la touche $[x, n, i]$) et OK .
afficher un tableau	Onglet Tableau, Régler l’intervalle : X début, X fin, Pas.
tracer la courbe	Onglet Graphique, menu Axes pour régler $X_{\min}$, $X_{\max}$, $Y_{\min}$, $Y_{\max}$.
lire une image	Sur la courbe : OK , Aller à, puis la valeur de x .
chercher des antécédents	Sur la courbe : OK , Calculer, Antécédent, puis la valeur ; les flèches passent d’un antécédent à l’autre.
couper deux courbes	Sur l’une des courbes : OK , Calculer, Intersection.

Méthode 13 — Étudier une fonction à la calculatrice

On entre la fonction, on règle le tableau (début, fin, pas), puis les axes d’après le tableau ; on lit enfin images et antécédents.

Exemples (au tableau)

Soit $f(x) = x^2 - 2$.

a) Afficher le tableau de valeurs de f de -4 à 4 avec un pas de 1.

b) Tracer la courbe de f avec des axes adaptés.

c) Lire $f(3)$ et $f(1,5)$, puis les antécédents de 3 arrondis à 0,01.

À vous de jouer

Soit $g(x) = (x + 1)^2$.

1°) Afficher le tableau de valeurs de g de -3 à 3 avec un pas de 0,5, et le recopier.

2°) Tracer la courbe de g avec des axes adaptés.

3°) Lire $g(0,25)$, puis les antécédents de 3 arrondis à 0,01.

► **À faire** : fiche d’exercices du chapitre, exercices 29 à 32.

IX — Résolution graphique

Propriété 3 — Résoudre graphiquement

- Les solutions de $f(x) = k$ sont les **abscisses** des points de $\mathcal{C}_f$ situés sur la droite horizontale $y = k$: ce sont les antécédents de k .
- Les solutions de $f(x) > k$ sont les abscisses des points de $\mathcal{C}_f$ situés **strictement au-dessus** de cette droite ; pour $f(x) < k$, **strictement au-dessous**.
- Pour $f(x) \geq k$ ou $f(x) \leq k$, on garde aussi les points sur la droite : crochets fermés.

Une équation se conclut par des **accolades**, une inéquation par des **intervalles**.

Méthode 14 — Résoudre graphiquement une équation ou une inéquation

Exemples

(au tableau)

Un rectangle a un périmètre de 12 cm ; un de ses côtés mesure x cm, avec $0 \leq x \leq 6$. Son aire est $f(x) = 6x - x^2$.

- Dresser le tableau de valeurs de f de 0 à 6 avec un pas de 1, puis tracer la courbe de f .
- Résoudre graphiquement $f(x) = 5$, puis $f(x) = 10$.
- Résoudre graphiquement $f(x) \geq 5$, puis $f(x) < 5$.

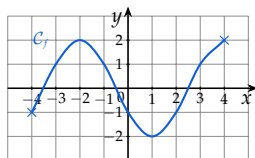
Remarque

Une lecture graphique donne en général des valeurs **approchées** ; ici, le calcul confirme les valeurs lues : $f(1) = 6 - 1 = 5$ et $f(5) = 30 - 25 = 5$. On ne conclut que sur la partie tracée de la courbe.

À vous de jouer

Ci-contre, la courbe d'une fonction f définie sur $[-4; 4]$.

- Résoudre graphiquement : $f(x) = 1$ $f(x) = 2$
 $f(x) = -2$ $f(x) = 3$
- Résoudre graphiquement : $f(x) \geq 1$ $f(x) < 2$
 $f(x) > -2$



► À faire : fiche d'exercices du chapitre, exercices 33 à 36.

X — Comparer deux fonctions

Propriété 4 — Deux courbes

Soit f et g deux fonctions définies sur un même intervalle.

- Les solutions de $f(x) = g(x)$ sont les abscisses des **points d'intersection** de $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$.
- Les solutions de $f(x) < g(x)$ sont les abscisses des points où $\mathcal{C}_f$ est **strictement au-dessous** de $\mathcal{C}_g$; pour $f(x) > g(x)$, **strictement au-dessus**.

Pour $f(x) \leq g(x)$ ou $f(x) \geq g(x)$, on ajoute les abscisses des points d'intersection.

Méthode 15 — Comparer graphiquement deux fonctions

Exemples

(au tableau)

Sur $[-1; 4]$, on considère $f(x) = x^2 - 2x$ et $g(x) = x$, tracées ci-contre. Résoudre graphiquement :

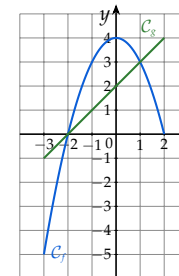
- $f(x) = g(x)$
- $f(x) < g(x)$

c) $f(x) \geq g(x)$

À vous de jouer

Sur $[-3; 2]$, on considère $f(x) = 4 - x^2$ et $g(x) = x + 2$, tracées ci-contre. Résoudre graphiquement :

- $f(x) = g(x)$
- $f(x) \leq g(x)$
- $f(x) > g(x)$



► À faire : fiche d'exercices du chapitre, exercices 37 à 39.