

CORRIGÉ — VECTEURS

Chapitre 3 : fiche d'exercices — Seconde

Les résultats sont encadrés ; les remarques en bleu signalent les erreurs fréquentes et les méthodes à retenir. Sur un quadrillage, on lit chaque vecteur comme un déplacement : tant de carreaux à droite ou à gauche, tant vers le haut ou le bas.

I) Caractéristiques d'un vecteur

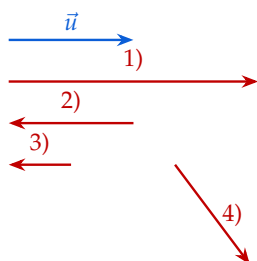
Exercice 1 — Égaux ou non

- a) $\vec{KL} \equiv \vec{NP}$ b) $\vec{KN} \equiv \vec{LP}$
 c) $\vec{KP} \equiv \vec{LQ}$ d) $\vec{NL} \neq \vec{KN}$
 e) $\vec{KM} \equiv \vec{NQ}$ f) $\vec{PQ} \neq \vec{PN}$
 f) Même direction, même norme, mais sens contraires :
 $\vec{PN} = -\vec{PQ}$.

Exercice 2 — Lire sur la figure

- 1) $\vec{KN} = \vec{LP} = \vec{MQ}$; $\vec{LM} = \vec{KL} = \vec{NP} = \vec{PQ}$.
 2) Opposés à $\vec{KN}$: $\vec{NK}$, $\vec{PL}$, $\vec{QM}$; à $\vec{KL}$: $\vec{LK}$, $\vec{PN}$, $\vec{QP}$...
 3) Par exemple : $\vec{KL}$ et $\vec{KM}$; $\vec{KL}$ et $\vec{PN}$; $\vec{KM}$ et $\vec{LK}$.

Exercice 3 — Construire un représentant



- 1) et 3) : on mesure la longueur demandée sur la même direction.
 4) Toute flèche de 3 cm dans une autre direction convient.

Exercice 4 — Vrai ou faux

- 1) **Vrai** : EFGH est un parallélogramme, donc $\vec{GF} = \vec{HE}$, et la translation de vecteur $\vec{HE}$ envoie H sur E.
 2) **Vrai** : HGKL est un parallélogramme, donc $(GK) \parallel (HL)$.
 3) **Faux** : $\vec{GK} = \vec{HL}$, donc $\vec{KG} = -\vec{HL}$: les vecteurs sont opposés.
 4) **Vrai** : $\vec{EF} = \vec{HG}$ et $\vec{HG} = \vec{LK}$.

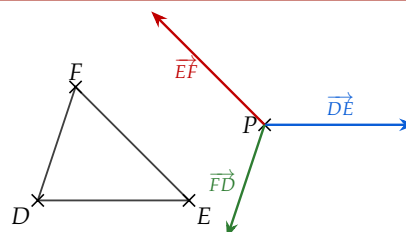
Exercice 5 — Dans un parallélogramme

- 1) $\vec{RS} = \vec{UT}$; $\vec{TU} = \vec{SR}$; $\vec{RU} = \vec{ST}$.
 2) $\vec{RO} = \vec{OT}$; $\vec{UO} = \vec{OS}$; $\vec{SO} = \vec{OU}$.

Les diagonales [RT] et [SU] se coupent en leur milieu O.

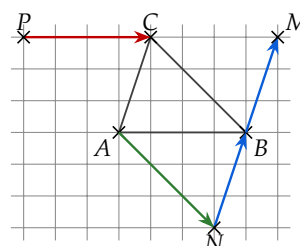
II) Translation

Exercice 6 — Représentants d'origine donnée



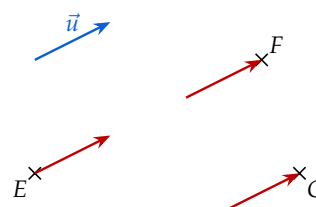
Chaque flèche part de P, avec la direction, le sens et la longueur du côté.

Exercice 7 — Quatre points à placer



Q est confondu avec N : $\vec{AQ} = \vec{CB}$ et $\vec{NB} = \vec{AC}$ donnent le même point. ABMC, ANBC et APCB sont des parallélogrammes.

Exercice 8 — Origine ou extrémité



Pour un représentant d'extrémité F, on part de F en reculant du déplacement de $\vec{u}$, puis on trace la flèche vers F.

Exercice 9 — Image d'un triangle

On reporte le vecteur $\overrightarrow{BC}$ depuis A , B et C ; l'image de B est C . Les triangles ABC et $A'B'C'$ sont superposables : une translation conserve les longueurs ($A'B' = 5$ cm, $B'C' = 4$ cm, $A'C' = 3$ cm).

Exercice 10 — Neuf points

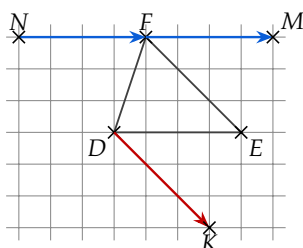
- 1) Égaux à $\overrightarrow{AB}$: $\overrightarrow{BC}$; $\overrightarrow{DE}$; $\overrightarrow{EF}$; $\overrightarrow{GH}$; $\overrightarrow{HI}$
- 2) Égaux à $\overrightarrow{AE}$: $\overrightarrow{BF}$; $\overrightarrow{DH}$; $\overrightarrow{EI}$
- 3) Par exemple $\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{CB}$.

III) Parallélogramme et égalité de vecteurs

Exercice 11 — Deux parallélogrammes

- 1) $EFGH$ est un parallélogramme, donc $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{HG}$; $EFIJ$ en est un, donc $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{JI}$.
- 2) Ainsi $\overrightarrow{HG} = \overrightarrow{JI}$; d'après le théorème 1, $HGIJ$ est un parallélogramme.
 $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ donne $ABDC$: ici $\overrightarrow{HG} = \overrightarrow{JI}$ donne $HGIJ$.

Exercice 12 — Autour d'un triangle



- 3) C'est M : $\overrightarrow{ME} = \overrightarrow{FD}$ car $FDEM$ est un parallélogramme.
- 4) Par exemple $\overrightarrow{NF} = \overrightarrow{FM}$; $\overrightarrow{DK} = \overrightarrow{FE}$; $\overrightarrow{DF} = \overrightarrow{EM}$.

Exercice 13 — Un milieu à démontrer

$RSTU$ est un parallélogramme, donc $\overrightarrow{RS} = \overrightarrow{UT}$. $RSUV$ en est un, donc $\overrightarrow{RS} = \overrightarrow{VU}$. Ainsi $\overrightarrow{VU} = \overrightarrow{UT}$: U est le milieu de $[TV]$.

Exercice 14 — Vrai ou faux

- 1) **Faux** : c'est $\overrightarrow{CF} = \overrightarrow{DE}$ (le vecteur va de C vers son image).
- 2) **Vrai** : $\overrightarrow{KL} = \overrightarrow{NM}$ donne le parallélogramme $KLMN$ (théorème 1).
- 3) **Vrai** : $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$, donc la translation envoie B sur C .

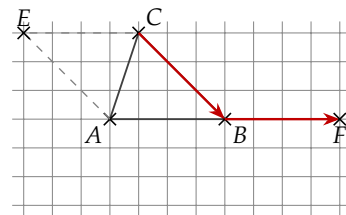
IV) Somme de deux vecteurs

Exercice 15 — Trois points à construire

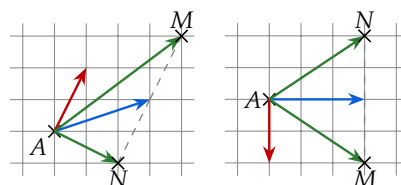
$$\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{BA} :$$

$$\overrightarrow{D} = \overrightarrow{A}.$$

On reporte $\overrightarrow{BC}$ à la suite de $\overrightarrow{BA}$, depuis A : E ; $BAEC$ est un parallélogramme.
 $\overrightarrow{CF} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{AB}$: on met bout à bout.

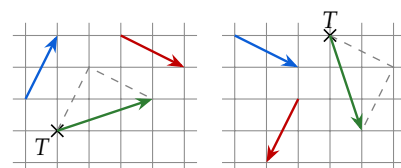


Exercice 16 — Somme et différence sur un quadrillage



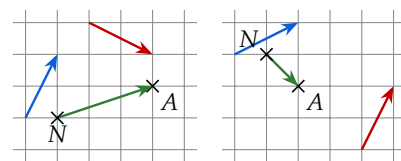
Gauche : $\vec{u} + \vec{v}$ fait 4 à droite et 3 vers le haut; $\vec{u} - \vec{v}$, 2 à droite et 1 vers le bas.

Exercice 17 — Origine imposée



Gauche : $\vec{w}$ fait 3 à droite et 1 vers le haut; droite : 1 à droite et 3 vers le bas.

Exercice 18 — Quand c'est l'origine qui manque

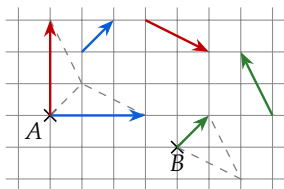


On construit le vecteur à partir de A en reculant : N est à l'autre bout. Gauche : $\vec{u} + \vec{v}$ fait 3 à droite et 1 vers le haut, donc N est 3 carreaux à gauche et 1 plus bas que A . Droite : $\vec{u} - \vec{v}$ fait 1 à droite et 1 vers le bas.

Exercice 19 — Avec des longueurs

- 1) On reporte $\overrightarrow{AC}$ à la suite de $\overrightarrow{AB}$, depuis B : on arrive en D .
- 2) $\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$, soit $\overrightarrow{AC}$: on reporte $\overrightarrow{AC}$ depuis B .
- 3) Par construction, $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AC}$: $ABDC$ est un parallélogramme (théorème 1); ses côtés mesurent 6 cm et 5 cm.

Exercice 20 — Trois vecteurs



$\vec{u} + \vec{v}$: 3 à droite ; $\vec{u} + \vec{w}$: 3 vers le haut ; $\vec{v} + \vec{w}$: 1 à droite et 1 vers le haut.

V) Milieu d'un segment

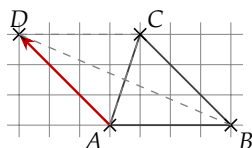
Exercice 21 — Une différence, un parallélogramme

1) $\vec{AC} - \vec{AB} = \vec{BA} + \vec{AC}$, soit $\vec{BC}$. Donc $\vec{AD} = \vec{BC}$:

$ADCB$ est un parallélogramme, et ses diagonales $[AC]$ et $[DB]$ ont le même milieu.

2) $\vec{CE} = \vec{CB} + \vec{BA} = \vec{CA}$:

$E = A$.

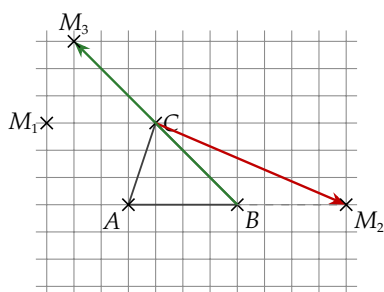


Exercice 22 — Trois points à construire

1) $\vec{AM} = \vec{BC}$ ($ABCM$ est un parallélogramme).

2) $\vec{CM} = \vec{CB} + \vec{AB}$: bout à bout depuis C.

3) $\vec{AC} + \vec{BA} - \vec{CB} = \vec{BA} + \vec{AC} + \vec{BC}$, soit $\vec{BC} + \vec{BC}$, donc $\vec{BM} = 2\vec{BC}$.



Les indices 1, 2, 3 distinguent les points des trois questions.

Exercice 23 — Symétrie centrale

1) G est le milieu de $[EE']$ et de $[FF']$: les diagonales $[FF']$ et $[EE']$ de $FEF'E'$ ont le même milieu, donc $FEF'E'$ est un parallélogramme.

2) a) Dans ce parallélogramme, $\vec{FE} = \vec{E'F'}$.

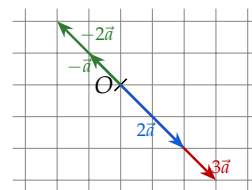
b) Deux vecteurs égaux ont la même norme :

$E'F' = EF$.

c) La symétrie centrale conserve les longueurs.

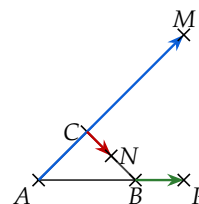
VI) Multiplier un vecteur par un réel

Exercice 24 — Multiples d'un vecteur



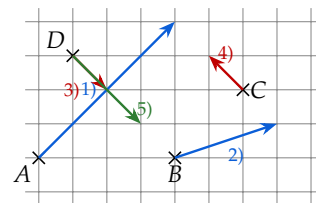
$\vec{a}$ fait 1 à droite et 1 vers le bas ; $-2\vec{a}$ fait 2 à gauche et 2 vers le haut.

Exercice 25 — Avec des coefficients



M est sur la demi-droite $[AC]$ avec $AM = 3AC$; N est le milieu de $[CB]$; P est sur la droite (AB) , au-delà de B, avec $BP = \frac{1}{2}AB$.

Exercice 26 — Sur un quadrillage



$\vec{BC}$: 2 à droite, 2 vers le haut ; $\vec{AC}$: 6 à droite, 2 vers le haut ; $\vec{BD}$: 3 à gauche, 3 vers le haut ; $\vec{AB} - \vec{BC}$: 2 à droite, 2 vers le bas.

VII) Relation de Chasles

Exercice 27 — Un seul vecteur, si c'est possible

a) $\vec{BG}$

b) impossible

c) $\vec{KT} + \vec{TU} = \vec{KU}$

d) $\vec{FS}$

e) $\vec{0}$

f) impossible

b) Même origine D : Chasles ne s'applique pas. f) B et C sont différents.

Exercice 28 — Simplifier

$$\vec{u} = \vec{BC} + \vec{CA} + \vec{AB} = \vec{BB}$$

$$\vec{u} = \vec{0}$$

$$\vec{v} = \vec{CA} + \vec{BC} + \vec{AC}$$

$$\vec{v} = \vec{BC} + \vec{CA} + \vec{AC} = \vec{BC}$$

$$\vec{w} = \vec{MC} + \vec{AM} + \vec{CB}$$

$$\vec{w} = \vec{AM} + \vec{MC} + \vec{CB} = \vec{AB}$$

$$\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CC} = \vec{0}.$$

Exercice 29 — Compléter

$$1) \overrightarrow{A\boxed{C}} \quad 2) \overrightarrow{\boxed{B}A} \quad 3) \overrightarrow{A\boxed{B}} \quad 4) \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA} = \boxed{\overrightarrow{BA}}$$

Exercice 30 — Peut-on réduire ?

$$\begin{array}{ll} \text{a) } \boxed{\overrightarrow{MP}} & \text{b) non (même origine)} \\ \text{c) } \boxed{\overrightarrow{RS}} & \text{d) } \overrightarrow{SR} + \overrightarrow{RO} = \boxed{\overrightarrow{SO}} \\ \text{e) } \boxed{\vec{0}} & \text{f) } \overrightarrow{AK} + \overrightarrow{KB} = \boxed{\overrightarrow{AB}} \end{array}$$

Exercice 31 — Une égalité à démontrer

$$\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BC}$$

$$\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{BC} = \boxed{\overrightarrow{AC}}$$

$$-\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{AO}, \text{ puis on range : } A \rightarrow O \rightarrow B \rightarrow C.$$

Exercice 32 — Exprimer avec deux vecteurs

1) a)

$$\vec{u} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB}$$

$$\vec{u} = \boxed{\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}}$$

b)

$$\vec{u} = 3(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}) - \overrightarrow{AB}$$

$$\vec{u} = \boxed{2\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{AC}}$$

2) a)

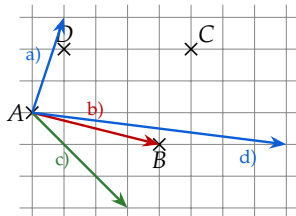
$$\vec{v} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CA}$$

$$\vec{v} = \boxed{\overrightarrow{BC} + 2\overrightarrow{CA}}$$

$$\text{b) } \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} = -\overrightarrow{CA} - \overrightarrow{BC} \text{ et } \overrightarrow{AC} = -\overrightarrow{CA} :$$

$$\vec{v} = -\overrightarrow{CA} - \overrightarrow{BC} + 2\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{CA}$$

$$\vec{v} = \boxed{\overrightarrow{BC} - 2\overrightarrow{CA}}$$

Exercice 33 — Différences sur un quadrillage


$$\text{a) } \overrightarrow{BC}; \text{ b) } \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DB} = \overrightarrow{AB} : \text{on arrive en B}; \text{ c) } \overrightarrow{DB}; \text{ d) } \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{DB} : 8 \text{ à droite et } 1 \text{ vers le bas.}$$