

VECTEURS

Cours — Seconde

Comment utiliser ce cours

Chaque partie commence par ce qu'il faut **savoir** (définitions, propriétés), puis vient ce qu'il faut **savoir faire** : une méthode, avec des **exemples corrigés** faits en classe, puis des exercices « **À vous de jouer** » à chercher seul. Les figures se font au crayon et à la règle : un vecteur mal tracé est un vecteur faux.

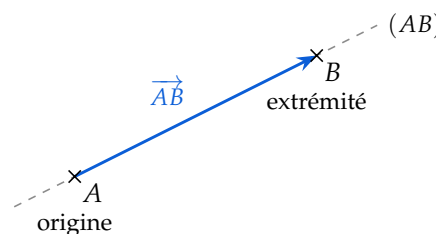
I — Caractéristiques d'un vecteur

Définition 1 — Vecteur

Deux points A et B définissent le **vecteur** $\overrightarrow{AB}$: il va de son **origine** A à son **extrémité** B . On le représente par une flèche de A vers B . Il a trois caractéristiques :

- une **direction**, celle de la droite (AB) ;
- un **sens**, de A vers B ;
- une **longueur**, appelée **norme** et notée $\|\overrightarrow{AB}\| = AB$.

On nomme aussi un vecteur par une seule lettre : $\vec{u}$, $\vec{v}$...



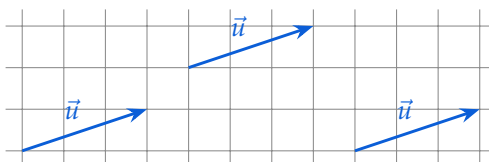
Deux confusions à éviter

- La **direction** n'est pas le **sens** : une direction a deux sens. $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BA}$ ont la même direction et des sens contraires.
- AB est un nombre (une distance), $\overrightarrow{AB}$ est un vecteur : on écrit $\|\overrightarrow{AB}\| = 3$, jamais $\overrightarrow{AB} = 3$.

Définition 2 — Vecteurs égaux, nul, opposés

- Deux vecteurs sont **égaux** s'ils ont même direction, même sens et même norme. Un vecteur peut donc être copié et déplacé : on dit qu'il a une infinité de **représentants**.
- Le vecteur $\overrightarrow{AA}$ est le **vecteur nul**, noté $\vec{0}$.
- Deux vecteurs sont **opposés** s'ils ont même direction, même norme et des sens contraires : $\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$.

Exemple — Trois représentants d'un même vecteur



Les trois flèches font le même déplacement (3 carreaux à droite et 1 vers le haut) : ce sont trois représentants du même vecteur $\vec{u}$.

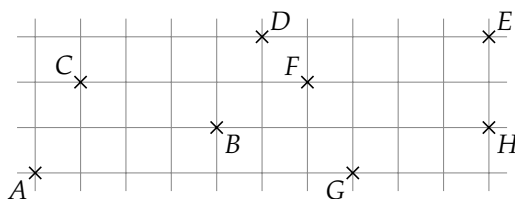
Méthode 1 — Reconnaître des vecteurs égaux ou opposés

Sur un quadrillage, on lit le **déplacement** de chaque flèche : tant de carreaux horizontalement, tant de carreaux verticalement.

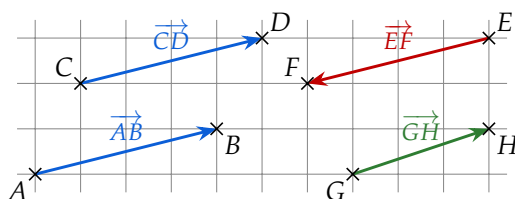
Exemples corrigés

1°) Tracer les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{EF}$ et $\overrightarrow{GH}$.

2°) Pour chaque vecteur $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{EF}$ et $\overrightarrow{GH}$, dire s'il est égal à $\overrightarrow{AB}$, opposé à $\overrightarrow{AB}$, ou ni l'un ni l'autre.



1°)



Pour $\overrightarrow{AB}$, on trace une flèche qui part de A et dont la pointe est en B.

l'origine est la première lettre

De même, $\overrightarrow{CD}$ va de C à D, $\overrightarrow{EF}$ de E à F, $\overrightarrow{GH}$ de G à H.

la pointe est sur la seconde lettre

2°)

$\overrightarrow{AB}$: 4 carreaux à droite et 1 vers le haut.

le vecteur de référence

$\overrightarrow{CD}$: 4 à droite, 1 vers le haut, donc $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB}$.

même déplacement

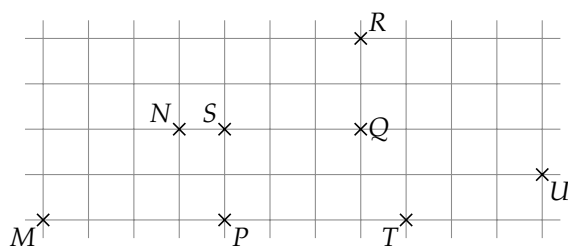
$\overrightarrow{EF}$: 4 à gauche, 1 vers le bas, donc $\overrightarrow{EF} = -\overrightarrow{AB}$.

déplacement contraire

$\overrightarrow{GH}$: 3 à droite, 1 vers le haut : ni égal, ni opposé.

autre déplacement

À vous de jouer



1°) Tracer les vecteurs $\overrightarrow{MN}$, $\overrightarrow{PQ}$, $\overrightarrow{RS}$ et $\overrightarrow{TU}$.

2°) Pour chaque vecteur $\overrightarrow{PQ}$, $\overrightarrow{RS}$ et $\overrightarrow{TU}$, dire s'il est égal à $\overrightarrow{MN}$, opposé à $\overrightarrow{MN}$, ou ni l'un ni l'autre.

3°) Comparer $\overrightarrow{SR}$ et $\overrightarrow{MN}$.

4°) Tracer le représentant de $\overrightarrow{MN}$ d'origine T.

Réponses : 2°) $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{MN}$, $\overrightarrow{RS} = -\overrightarrow{MN}$, $\overrightarrow{TU}$ ni l'un ni l'autre. 3°) $\overrightarrow{SR} = \overrightarrow{MN}$: échanger les lettres change le sens. 4°) depuis T, 3 carreaux à droite et 2 vers le haut.

► **À faire** : fiche d'exercices du chapitre, exercices 1 à 5.

II — Translation

Définition 3 — Translation de vecteur $\vec{u}$

La **translation de vecteur** $\vec{u}$, notée $t_{\vec{u}}$, fait glisser chaque point M jusqu'au point M' tel que $\overrightarrow{MM'} = \vec{u}$. Le point M' est l'**image** de M par $t_{\vec{u}}$.

Propriété 1

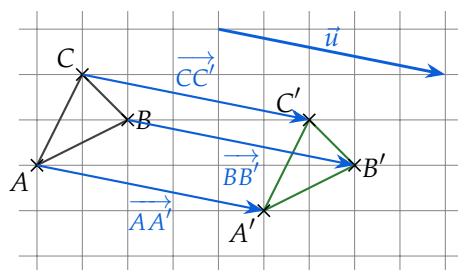
Une translation conserve les longueurs, les angles et les aires : une figure et son image sont superposables.
Une droite a pour image une droite **parallèle**.

Méthode 2 — Construire l'image d'un point, d'une figure

On reporte le déplacement de $\vec{u}$ à partir du point à transformer ; pour une figure, on transforme chaque sommet, puis on relie les images dans le même ordre.

Exemples corrigés

Construire l'image $A'B'C'$ du triangle ABC par la translation de vecteur $\vec{u}$.



Résolution

$\vec{u}$: 5 carreaux à droite et 1 vers le bas.

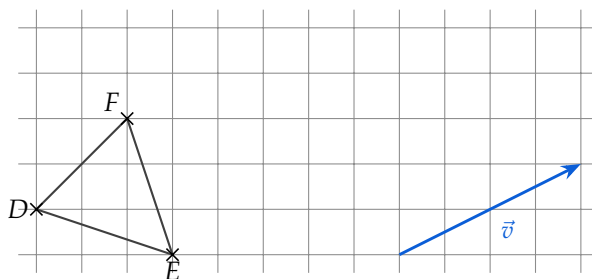
on lit le déplacement

On le reporte depuis A , depuis B et depuis C : $\overrightarrow{AA'}$, $\overrightarrow{BB'}$ et $\overrightarrow{CC'}$ sont égaux à $\vec{u}$.

chaque sommet glisse de la même façon

À vous de jouer

Construire l'image $D'E'F'$ du triangle DEF par la translation de vecteur $\vec{v}$.



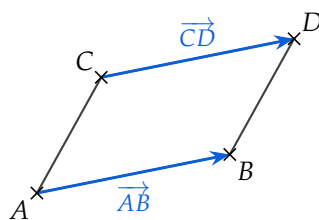
Réponses : $\vec{v}$: 4 carreaux à droite et 2 vers le haut ; on le reporte depuis D , E et F .

► **À faire** : fiche d'exercices du chapitre, exercices 6 à 10.

III — Parallélogramme et égalité de vecteurs

Théorème 1 — Parallélogramme

Pour quatre points A, B, C, D : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ équivaut à $ABDC$ est un parallélogramme (éventuellement aplati, si les points sont alignés).



L'ordre des lettres

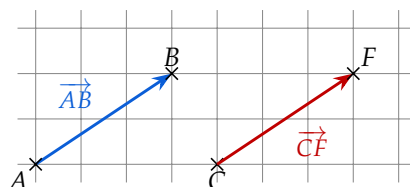
On nomme un quadrilatère en faisant le tour de la figure dans le sens choisi. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ donne ainsi le parallélogramme $ABDC$, et non $ABCD$: on va de A à B , puis à D , puis à C .

Méthode 3 — Placer un point défini par une égalité de vecteurs

On lit le déplacement du vecteur connu, puis on le reporte depuis l'origine imposée par l'égalité.

Exemples corrigés

Placer le point F tel que $\overrightarrow{CF} = \overrightarrow{AB}$, puis nommer le parallélogramme obtenu.



Résolution

$\overrightarrow{AB}$: 3 carreaux à droite et 2 vers le haut.

Depuis C , on avance de 3 à droite et 2 vers le haut : c'est F .

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CF}$, donc $ABFC$ est un parallélogramme.

on lit le déplacement

on le reporte depuis C

théorème 1

À vous de jouer

$ABCD$ est un parallélogramme. Construire les points E , F , G et H tels que

$$\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{AB} \quad \overrightarrow{CF} = \overrightarrow{BC} \quad \overrightarrow{DG} = \overrightarrow{CD} \quad \overrightarrow{HA} = \overrightarrow{AB}$$

Réponses : B est le milieu de $[AE]$; C celui de $[BF]$; D celui de $[CG]$; A celui de $[HB]$.

► **À faire** : fiche d'exercices du chapitre, exercices 11 à 14.

IV — Somme de deux vecteurs

Définition 4 — Somme

Enchaîner la translation de vecteur $\vec{u}$ puis celle de vecteur $\vec{v}$ revient à faire une seule translation, de vecteur $\vec{u} + \vec{v}$. On trace les deux vecteurs **bout à bout** (l'origine du second sur l'extrémité du premier) : la somme va du départ à l'arrivée.

La **différence** est la somme avec l'opposé : $\vec{u} - \vec{v} = \vec{u} + (-\vec{v})$.

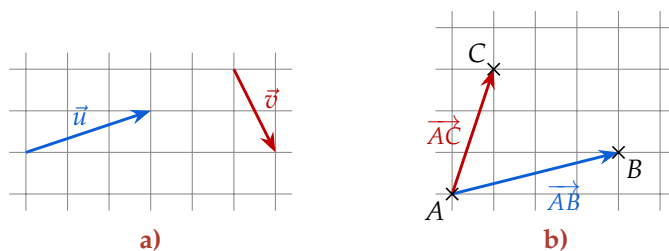
Méthode 4 — Construire une somme ou une différence

On met les vecteurs **l'un à la suite de l'autre** : l'origine du second sur l'extrémité du premier.

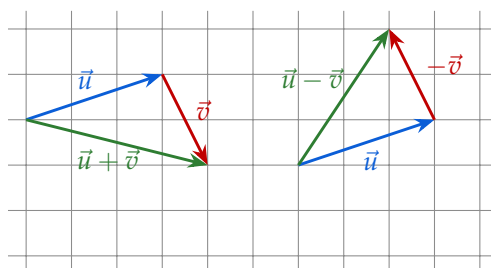
Exemples corrigés

a) Construire $\vec{u} + \vec{v}$, puis $\vec{u} - \vec{v}$.

b) Construire le point D tel que $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$. Quelle est la nature de $ABDC$?



a)



On lit les déplacements : $\vec{u}$, 3 carreaux à droite et 1 vers le haut ; $\vec{v}$, 1 à droite et 2 vers le bas.

on compte les carreaux

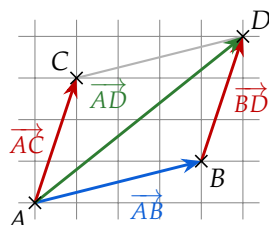
On trace $\vec{u}$, puis $\vec{v}$ à la suite : $\vec{u} + \vec{v}$ fait 4 carreaux à droite et 1 vers le bas.

l'un à la suite de l'autre

On trace $\vec{u}$, puis $-\vec{v}$ (1 à gauche, 2 vers le haut) : $\vec{u} - \vec{v}$ fait 2 carreaux à droite et 3 vers le haut.

on ajoute l'opposé

b)



$\vec{AC}$: 1 carreau à droite et 3 vers le haut ; on le reporte à la suite de $\vec{AB}$, depuis B : on arrive en D.

l'un à la suite de l'autre

$\vec{BD} = \vec{AC}$, donc ABDC est un parallélogramme.

théorème 1

Quand deux vecteurs ont la même origine, leur somme suit la diagonale du parallélogramme.

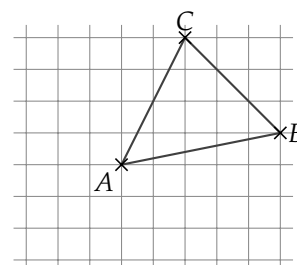
à retenir

À vous de jouer

Reproduire le triangle ABC ci-contre.

1°) Construire le point D tel que $\vec{BD} = \vec{BA} + \vec{BC}$. Quelle est la nature de BADC ?

2°) Construire le point E tel que $\vec{BE} = \vec{BA} - \vec{BC}$.

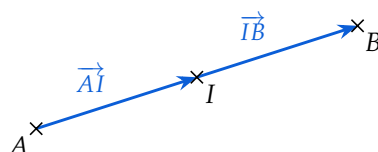


Réponses : 1°) depuis B, 8 carreaux à gauche et 2 vers le haut ; BADC est un parallélogramme. 2°) $\vec{BA} - \vec{BC} = \vec{BA} + \vec{CB} = \vec{CA}$: depuis B, 2 carreaux à gauche et 4 vers le bas.

V — Milieu d'un segment

Théorème 2 — Milieu

I est le milieu de $[AB]$ équivaut à $\vec{AI} = \vec{IB}$.



Pour démontrer que M est le milieu de $[XY]$, il suffit donc d'obtenir $\vec{XM} = \vec{MY}$.

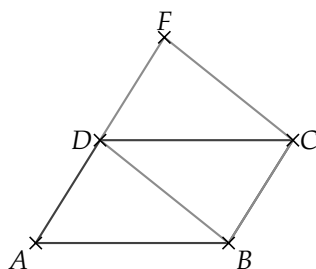
On l'écrit aussi $\vec{IA} = -\vec{IB}$, ou $\vec{IA} + \vec{IB} = \vec{0}$. Rappel : les diagonales d'un parallélogramme se coupent en leur milieu.

Méthode 5 — Démontrer qu'un point est un milieu

On traduit chaque parallélogramme de l'énoncé par une égalité de vecteurs, puis on les enchaîne jusqu'à obtenir $\vec{XM} = \vec{MY}$.

Exemples corrigés

$ABCD$ et $BCFD$ sont deux parallélogrammes. Démontrer que D est le milieu de $[AF]$.



Résolution

$ABCD$ est un parallélogramme, donc $\vec{AD} = \vec{BC}$.

côtés opposés

$BCFD$ est un parallélogramme, donc $\vec{BC} = \vec{DF}$.

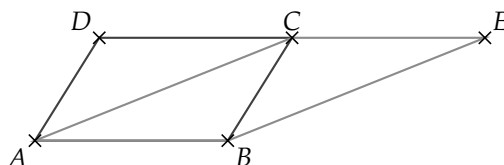
côtés opposés

Ainsi $\vec{AD} = \vec{DF}$: D est le milieu de $[AF]$.

théorème 2

À vous de jouer

$ABCD$ et $ABEC$ sont deux parallélogrammes. Démontrer que C est le milieu de $[DE]$.



Réponses : $\vec{DC} = \vec{AB}$ et $\vec{AB} = \vec{CE}$, donc $\vec{DC} = \vec{CE}$: C est le milieu de $[DE]$.

► **À faire** : fiche d'exercices du chapitre, exercices 21 à 23.

VI — Multiplier un vecteur par un réel

Définition 5 — Produit par un réel

Pour un vecteur $\vec{u}$ non nul et un réel k non nul, le vecteur $k\vec{u}$:

- a la **même direction** que $\vec{u}$;
- a le **même sens** si $k > 0$, le **sens contraire** si $k < 0$;
- est k fois plus long si $k > 0$ (et $-k$ fois plus long si $k < 0$).

Si $k = 0$ ou $\vec{u} = \vec{0}$, alors $k\vec{u} = \vec{0}$. Par exemple, $\vec{u} + \vec{u} + \vec{u} = 3\vec{u}$ et $(-1)\vec{u} = -\vec{u}$.

À retenir

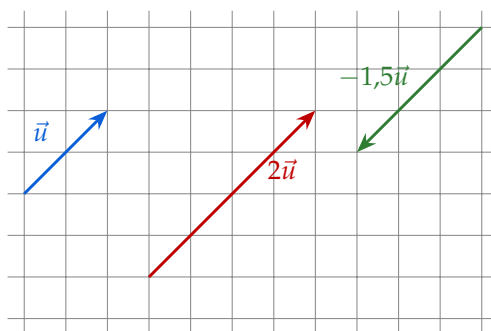
Si I est le milieu de $[AB]$: $\vec{AI} = \frac{1}{2}\vec{AB}$ et $\vec{AB} = 2\vec{AI}$. On développe comme en calcul littéral : $k(\vec{u} + \vec{v}) = k\vec{u} + k\vec{v}$.

Méthode 6 — Construire $k\vec{u}$

On multiplie par k les deux nombres de carreaux du déplacement de $\vec{u}$; si $k < 0$, on change le sens.

Exemples corrigés

$\vec{u}$: 2 carreaux à droite et 2 vers le haut. Tracer $2\vec{u}$ et $-1,5\vec{u}$.



$2\vec{u}$: 4 carreaux à droite et 4 vers le haut.

$-1,5\vec{u}$: 3 carreaux à gauche et 3 vers le bas.

même sens, deux fois plus long

sens contraire, une fois et demie plus long

À vous de jouer

$\vec{v}$: 2 carreaux à droite et 2 vers le bas. Tracer $3\vec{v}$ et $-1,5\vec{v}$.

Réponses : $3\vec{v}$: 6 carreaux à droite et 6 vers le bas ; $-1,5\vec{v}$: 3 carreaux à gauche et 3 vers le haut.

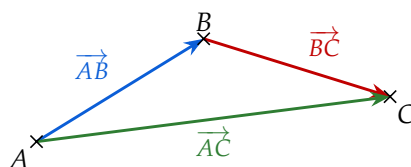
► **À faire** : fiche d'exercices du chapitre, exercices 24 à 26.

VII — Relation de Chasles

Théorème 3 — Relation de Chasles

Pour tous points A, B et C : $\vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AC}$.

- Aller de A à B , puis de B à C , c'est aller de A à C .
- $\vec{AB} + \vec{BA} = \vec{AA} = \vec{0}$, donc $-\vec{AB} = \vec{BA}$.
- On peut passer par n'importe quel point de son choix : $\vec{AC} = \vec{AM} + \vec{MC}$.



Méthode 7 — Simplifier une somme de vecteurs

On remplace chaque $-\overrightarrow{XY}$ par $\overrightarrow{YX}$, puis on range les vecteurs pour que l'extrémité de chacun soit l'origine du suivant.

Exemples corrigés

Simplifier :

- a) $\overrightarrow{KL} + \overrightarrow{JK}$
- b) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{CD}$
- c) $\overrightarrow{PQ} - \overrightarrow{RQ} + \overrightarrow{RP}$

a)

$$\begin{aligned}\overrightarrow{KL} + \overrightarrow{JK} &= \overrightarrow{JK} + \overrightarrow{KL} && \text{on range : } J \rightarrow K \rightarrow L \\ \overrightarrow{KL} + \overrightarrow{JK} &= \overrightarrow{JL} && \text{Chasles}\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{CD} &= \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AB} && \text{on range : } C \rightarrow D \rightarrow A \rightarrow B \\ \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{CD} &= \overrightarrow{CB}\end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned}\overrightarrow{PQ} - \overrightarrow{RQ} + \overrightarrow{RP} &= \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR} + \overrightarrow{RP} && -\overrightarrow{RQ} = \overrightarrow{QR} \\ \overrightarrow{PQ} - \overrightarrow{RQ} + \overrightarrow{RP} &= \overrightarrow{PP} = \vec{0} && \text{on revient au point de départ}\end{aligned}$$

Erreur à éviter

Chasles ne s'applique que si la lettre d'arrivée du premier vecteur est la lettre de départ du second : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}$ ne se simplifie pas.

À vous de jouer

Simplifier :

$$\overrightarrow{UV} + \overrightarrow{VW} \quad \overrightarrow{GH} + \overrightarrow{FG} \quad \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NP} + \overrightarrow{PM} \quad \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CB} \quad \overrightarrow{EF} - \overrightarrow{GF}$$

Réponses : $\overrightarrow{UW}$; $\vec{0}$; $\vec{0}$; $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} = \vec{0}$; $\overrightarrow{EF} + \overrightarrow{FG} = \overrightarrow{EG}$.

► **À faire** : fiche d'exercices du chapitre, exercices 27 à 33.