

VECTEURS

Cours — Seconde

Version élève

Comment utiliser ce cours

Chaque partie commence par ce qu'il faut **savoir** (définitions, propriétés), puis vient ce qu'il faut **savoir faire** : une méthode, avec des **exemples** faits en classe, puis des exercices « **À vous de jouer** » à chercher seul. Les figures se font au crayon et à la règle : un vecteur mal tracé est un vecteur faux.

Sur cette feuille, seuls les **énoncés** des exemples figurent : la résolution, signalée par la mention (*au tableau*), est à rédiger dans le cahier.

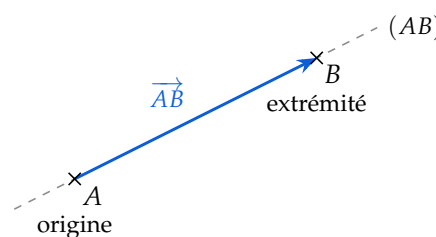
I — Caractéristiques d'un vecteur

Définition 1 — Vecteur

Deux points A et B définissent le **vecteur** $\overrightarrow{AB}$: il va de son **origine** A à son **extrémité** B . On le représente par une flèche de A vers B . Il a trois caractéristiques :

- une **direction**, celle de la droite (AB) ;
- un **sens**, de A vers B ;
- une **longueur**, appelée **norme** et notée $\|\overrightarrow{AB}\| = AB$.

On nomme aussi un vecteur par une seule lettre : $\vec{u}$, $\vec{v}$...



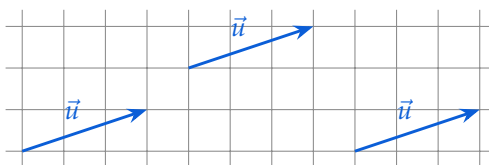
Deux confusions à éviter

- La **direction** n'est pas le **sens** : une direction a deux sens. $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BA}$ ont la même direction et des sens contraires.
- AB est un nombre (une distance), $\overrightarrow{AB}$ est un vecteur : on écrit $\|\overrightarrow{AB}\| = 3$, jamais $\overrightarrow{AB} = 3$.

Définition 2 — Vecteurs égaux, nul, opposés

- Deux vecteurs sont **égaux** s'ils ont même direction, même sens et même norme. Un vecteur peut donc être copié et déplacé : on dit qu'il a une infinité de **représentants**.
- Le vecteur $\overrightarrow{AA}$ est le **vecteur nul**, noté $\vec{0}$.
- Deux vecteurs sont **opposés** s'ils ont même direction, même norme et des sens contraires : $\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$.

Exemple — Trois représentants d'un même vecteur



Les trois flèches font le même déplacement (3 carreaux à droite et 1 vers le haut) : ce sont trois représentants du même vecteur $\vec{u}$.

Méthode 1 — Reconnaître des vecteurs égaux ou opposés

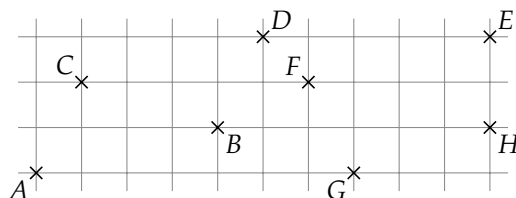
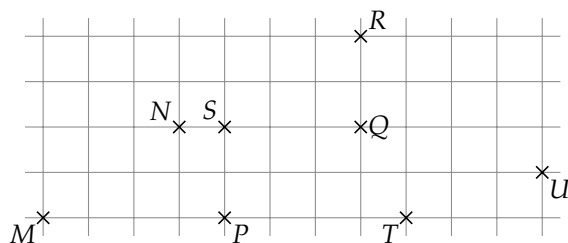
Sur un quadrillage, on lit le **déplacement** de chaque flèche : tant de carreaux horizontalement, tant de carreaux verticalement.

Exemples

(au tableau)

1°) Tracer les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{EF}$ et $\overrightarrow{GH}$.

2°) Pour chaque vecteur $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{EF}$ et $\overrightarrow{GH}$, dire s'il est égal à $\overrightarrow{AB}$, opposé à $\overrightarrow{AB}$, ou ni l'un ni l'autre.

**À vous de jouer**

1°) Tracer les vecteurs $\overrightarrow{MN}$, $\overrightarrow{PQ}$, $\overrightarrow{RS}$ et $\overrightarrow{TU}$.

2°) Pour chaque vecteur $\overrightarrow{PQ}$, $\overrightarrow{RS}$ et $\overrightarrow{TU}$, dire s'il est égal à $\overrightarrow{MN}$, opposé à $\overrightarrow{MN}$, ou ni l'un ni l'autre.

3°) Comparer $\overrightarrow{SR}$ et $\overrightarrow{MN}$.

4°) Tracer le représentant de $\overrightarrow{MN}$ d'origine T.

► **À faire** : fiche d'exercices du chapitre, exercices 1 à 5.

II — Translation**Définition 3 — Translation de vecteur $\vec{u}$**

La **translation de vecteur** $\vec{u}$, notée $t_{\vec{u}}$, fait glisser chaque point M jusqu'au point M' tel que $\overrightarrow{MM'} = \vec{u}$. Le point M' est l'**image** de M par $t_{\vec{u}}$.

Propriété 1

Une translation conserve les longueurs, les angles et les aires : une figure et son image sont superposables. Une droite a pour image une droite **parallèle**.

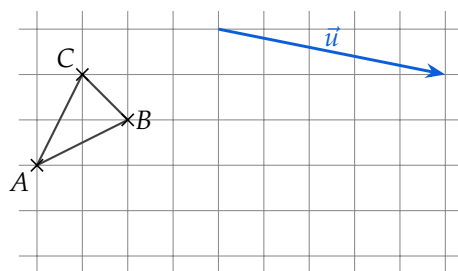
Méthode 2 — Construire l'image d'un point, d'une figure

On reporte le déplacement de $\vec{u}$ à partir du point à transformer ; pour une figure, on transforme chaque sommet, puis on relie les images dans le même ordre.

Exemples

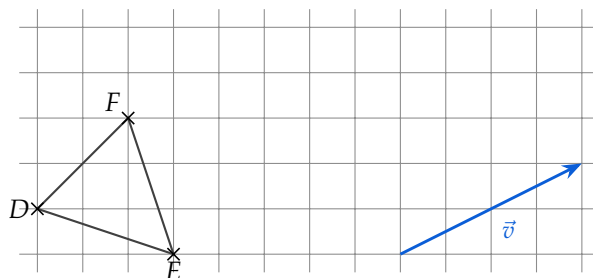
(au tableau)

Construire l'image $A'B'C'$ du triangle ABC par la translation de vecteur $\vec{u}$.



À vous de jouer

Construire l'image $D'E'F'$ du triangle DEF par la translation de vecteur $\vec{v}$.

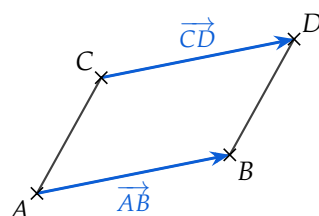


► **À faire :** fiche d'exercices du chapitre, exercices 6 à 10.

III — Parallélogramme et égalité de vecteurs

Théorème 1 — Parallélogramme

Pour quatre points A, B, C, D : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ équivaut à $ABDC$ est un parallélogramme (éventuellement aplati, si les points sont alignés).



L'ordre des lettres

On nomme un quadrilatère en faisant le tour de la figure dans le sens choisi. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ donne ainsi le parallélogramme $ABDC$, et non $ABCD$: on va de A à B , puis à D , puis à C .

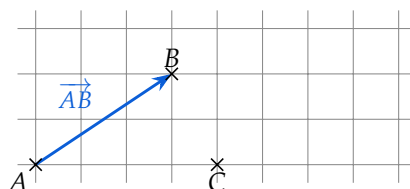
Méthode 3 — Placer un point défini par une égalité de vecteurs

On lit le déplacement du vecteur connu, puis on le reporte depuis l'origine imposée par l'égalité.

Exemples

(au tableau)

Placer le point F tel que $\overrightarrow{CF} = \overrightarrow{AB}$, puis nommer le parallélogramme obtenu.



À vous de jouer

$ABCD$ est un parallélogramme. Construire les points E , F , G et H tels que

$$\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{AB} \quad \overrightarrow{CF} = \overrightarrow{BC} \quad \overrightarrow{DG} = \overrightarrow{CD} \quad \overrightarrow{HA} = \overrightarrow{AB}$$

► **À faire** : fiche d'exercices du chapitre, exercices 11 à 14.

IV — Somme de deux vecteurs

Définition 4 — Somme

Enchaîner la translation de vecteur $\vec{u}$ puis celle de vecteur $\vec{v}$ revient à faire une seule translation, de vecteur $\vec{u} + \vec{v}$. On trace les deux vecteurs **bout à bout** (l'origine du second sur l'extrémité du premier) : la somme va du départ à l'arrivée.

La **différence** est la somme avec l'opposé : $\vec{u} - \vec{v} = \vec{u} + (-\vec{v})$.

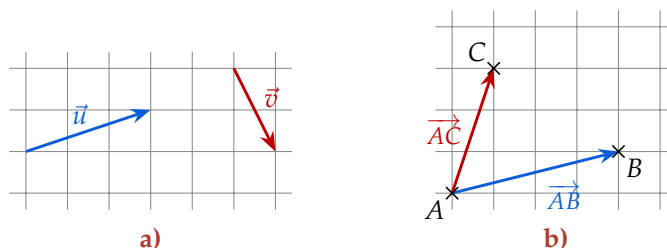
Méthode 4 — Construire une somme ou une différence

On met les vecteurs **l'un à la suite de l'autre** : l'origine du second sur l'extrémité du premier.

Exemples

(au tableau)

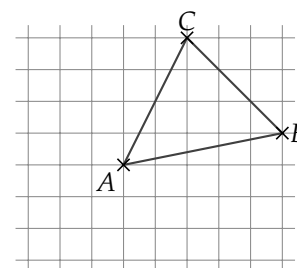
- Construire $\vec{u} + \vec{v}$, puis $\vec{u} - \vec{v}$.
- Construire le point D tel que $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$. Quelle est la nature de $ABDC$?



À vous de jouer

Reproduire le triangle ABC ci-contre.

- Construire le point D tel que $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}$. Quelle est la nature de $BADC$?
- Construire le point E tel que $\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{BA} - \overrightarrow{BC}$.

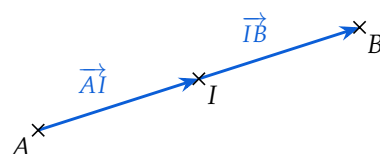


► **À faire** : fiche d'exercices du chapitre, exercices 15 à 20.

V — Milieu d'un segment

Théorème 2 — Milieu

I est le milieu de $[AB]$ équivaut à $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IB}$.



Pour démontrer que M est le milieu de $[XY]$, il suffit donc d'obtenir $\overrightarrow{XM} = \overrightarrow{MY}$.

On l'écrit aussi $\overrightarrow{IA} = -\overrightarrow{IB}$, ou $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0}$. Rappel : les diagonales d'un parallélogramme se coupent en leur milieu.

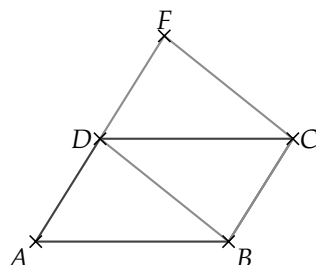
Méthode 5 — Démontrer qu'un point est un milieu

On traduit chaque parallélogramme de l'énoncé par une égalité de vecteurs, puis on les enchaîne jusqu'à obtenir $\overrightarrow{XM} = \overrightarrow{MY}$.

Exemples

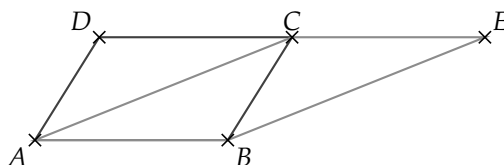
(au tableau)

$ABCD$ et $BCFD$ sont deux parallélogrammes. Démontrer que D est le milieu de $[AF]$.



À vous de jouer

$ABCD$ et $ABEC$ sont deux parallélogrammes. Démontrer que C est le milieu de $[DE]$.



► **À faire** : fiche d'exercices du chapitre, exercices 21 à 23.

VI — Multiplier un vecteur par un réel

Définition 5 — Produit par un réel

Pour un vecteur $\vec{u}$ non nul et un réel k non nul, le vecteur $k\vec{u}$:

- a la **même direction** que $\vec{u}$;
- a le **même sens** si $k > 0$, le **sens contraire** si $k < 0$;
- est k fois plus long si $k > 0$ (et $-k$ fois plus long si $k < 0$).

Si $k = 0$ ou $\vec{u} = \vec{0}$, alors $k\vec{u} = \vec{0}$. Par exemple, $\vec{u} + \vec{u} + \vec{u} = 3\vec{u}$ et $(-1)\vec{u} = -\vec{u}$.

À retenir

Si I est le milieu de $[AB]$: $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{AI}$. On développe comme en calcul littéral : $k(\vec{u} + \vec{v}) = k\vec{u} + k\vec{v}$.

Méthode 6 — Construire $k\vec{u}$

On multiplie par k les deux nombres de carreaux du déplacement de $\vec{u}$; si $k < 0$, on change le sens.

Exemples

(au tableau)

$\vec{u}$: 2 carreaux à droite et 2 vers le haut. Tracer $2\vec{u}$ et $-1,5\vec{u}$.

À vous de jouer

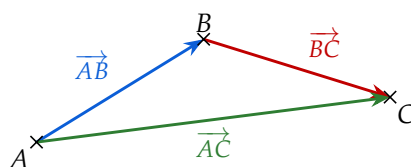
$\vec{v}$: 2 carreaux à droite et 2 vers le bas. Tracer $3\vec{v}$ et $-1,5\vec{v}$.

► **À faire** : fiche d'exercices du chapitre, exercices 24 à 26.

VII — Relation de Chasles**Théorème 3 — Relation de Chasles**

Pour tous points A , B et C : $\vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AC}$.

- Aller de A à B , puis de B à C , c'est aller de A à C .
- $\vec{AB} + \vec{BA} = \vec{AA} = \vec{0}$, donc $-\vec{AB} = \vec{BA}$.
- On peut passer par n'importe quel point de son choix : $\vec{AC} = \vec{AM} + \vec{MC}$.

**Méthode 7 — Simplifier une somme de vecteurs**

On remplace chaque $-\vec{XY}$ par $\vec{YX}$, puis on range les vecteurs pour que l'extrémité de chacun soit l'origine du suivant.

Exemples

(au tableau)

Simplifier :

- $\vec{KL} + \vec{JK}$
- $\vec{AB} + \vec{DA} + \vec{CD}$
- $\vec{PQ} - \vec{RQ} + \vec{RP}$

Erreur à éviter

Chasles ne s'applique que si la lettre d'arrivée du premier vecteur est la lettre de départ du second : $\vec{AB} + \vec{CD}$ ne se simplifie pas.

À vous de jouer

Simplifier :

$$\vec{UV} + \vec{VW} \quad \vec{GH} + \vec{FG} \quad \vec{MN} + \vec{NP} + \vec{PM} \quad \vec{AC} + \vec{BA} + \vec{CB} \quad \vec{EF} - \vec{GF}$$

► **À faire** : fiche d'exercices du chapitre, exercices 27 à 33.