

VECTEURS

Cours — Seconde

Version élève

Comment utiliser ce cours

Chaque partie commence par ce qu'il faut **savoir** (définitions, propriétés), puis vient ce qu'il faut **savoir faire** : une méthode, avec des **exemples** faits en classe, puis des exercices « **À vous de jouer** » à chercher seul. Les figures se font au crayon et à la règle : un vecteur mal tracé est un vecteur faux.

Sur cette feuille, seuls les **énoncés** des exemples figurent : la résolution, signalée par la mention *(au tableau)*, est à rédiger dans le cahier.

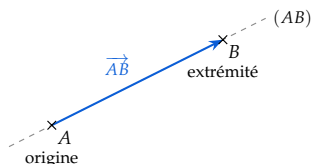
I — Caractéristiques d'un vecteur

Définition 1 — Vecteur

Deux points A et B définissent le **vecteur** $\overrightarrow{AB}$: il va de son **origine** A à son **extrémité** B . On le représente par une flèche de A vers B . Il a trois caractéristiques :

- une **direction**, celle de la droite (AB) ;
- un **sens**, de A vers B ;
- une **longueur**, appelée **norme** et notée $\|\overrightarrow{AB}\| = AB$.

On nomme aussi un vecteur par une seule lettre : $\vec{u}$, $\vec{v}$...



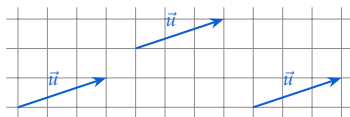
Deux confusions à éviter

- La **direction** n'est pas le **sens** : une direction a deux sens. $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BA}$ ont la même direction et des sens contraires.
- AB est un nombre (une distance), $\overrightarrow{AB}$ est un vecteur : on écrit $\|\overrightarrow{AB}\| = 3$, jamais $\overrightarrow{AB} = 3$.

Définition 2 — Vecteurs égaux, nul, opposés

- Deux vecteurs sont **égaux** s'ils ont même direction, même sens et même norme. Un vecteur peut donc être copié et déplacé : on dit qu'il a une infinité de **représentants**.
- Le vecteur $\overrightarrow{AA}$ est le **vecteur nul**, noté $\vec{0}$.
- Deux vecteurs sont **opposés** s'ils ont même direction, même norme et des sens contraires : $\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$.

Exemple — Trois représentants d'un même vecteur



Les trois flèches font le même déplacement (3 carreaux à droite et 1 vers le haut) : ce sont trois représentants du même vecteur $\vec{u}$.

Méthode 1 — Reconnaître des vecteurs égaux ou opposés

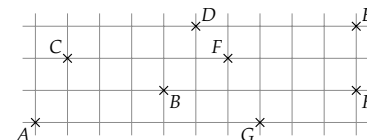
Sur un quadrillage, on lit le **déplacement** de chaque flèche : tant de carreaux horizontalement, tant de carreaux verticalement.

Exemples

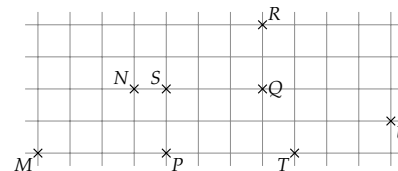
(au tableau)

1°) Tracer les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{EF}$ et $\overrightarrow{GH}$.

2°) Pour chaque vecteur $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{EF}$ et $\overrightarrow{GH}$, dire s'il est égal à $\overrightarrow{AB}$, opposé à $\overrightarrow{AB}$, ou ni l'un ni l'autre.



À vous de jouer



1°) Tracer les vecteurs $\overrightarrow{MN}$, $\overrightarrow{PQ}$, $\overrightarrow{RS}$ et $\overrightarrow{TU}$.

2°) Pour chaque vecteur $\overrightarrow{PQ}$, $\overrightarrow{RS}$ et $\overrightarrow{TU}$, dire s'il est égal à $\overrightarrow{MN}$, opposé à $\overrightarrow{MN}$, ou ni l'un ni l'autre.

3°) Comparer $\overrightarrow{SR}$ et $\overrightarrow{MN}$.

4°) Tracer le représentant de $\overrightarrow{MN}$ d'origine T .

► **À faire** : fiche d'exercices du chapitre, exercices 1 à 5.

II — Translation

Définition 3 — Translation de vecteur $\vec{u}$

La **translation de vecteur** $\vec{u}$, notée $t_{\vec{u}}$, fait glisser chaque point M jusqu'au point M' tel que $\overrightarrow{MM'} = \vec{u}$. Le point M' est l'**image** de M par $t_{\vec{u}}$.

Propriété 1

Une translation conserve les longueurs, les angles et les aires : une figure et son image sont superposables. Une droite a pour image une droite **parallèle**.

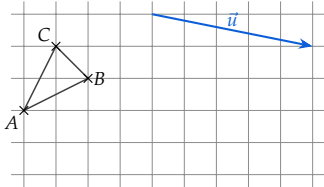
Méthode 2 — Construire l'image d'un point, d'une figure

On reporte le déplacement de $\vec{u}$ à partir du point à transformer ; pour une figure, on transforme chaque sommet, puis on relie les images dans le même ordre.

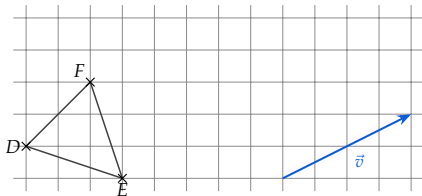
(au tableau)

Exemples

Construire l'image $A'B'C'$ du triangle ABC par la translation de vecteur $\vec{u}$.

**À vous de jouer**

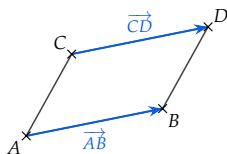
Construire l'image $D'E'F'$ du triangle DEF par la translation de vecteur $\vec{v}$.



► **À faire** : fiche d'exercices du chapitre, exercices 6 à 10.

III — Parallélogramme et égalité de vecteurs**Théorème 1 — Parallélogramme**

Pour quatre points A, B, C, D : $\vec{AB} = \vec{CD}$ équivaut à $ABDC$ est un parallélogramme (éventuellement aplati, si les points sont alignés).

**L'ordre des lettres**

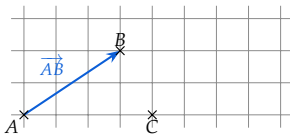
On nomme un quadrilatère en faisant le tour de la figure dans le sens choisi. $\vec{AB} = \vec{CD}$ donne ainsi le parallélogramme $ABDC$, et non $ABCD$: on va de A à B , puis à D , puis à C .

Méthode 3 — Placer un point défini par une égalité de vecteurs

On lit le déplacement du vecteur connu, puis on le reporte depuis l'origine imposée par l'égalité.

Exemples

Placer le point F tel que $\vec{CF} = \vec{AB}$, puis nommer le parallélogramme obtenu.

**À vous de jouer**

$ABCD$ est un parallélogramme. Construire les points E, F, G et H tels que

$$\vec{BE} = \vec{AB} \quad \vec{CF} = \vec{BC} \quad \vec{DG} = \vec{CD} \quad \vec{HA} = \vec{AB}$$

► **À faire** : fiche d'exercices du chapitre, exercices 11 à 14.

IV — Somme de deux vecteurs**Définition 4 — Somme**

Enchaîner la translation de vecteur $\vec{u}$ puis celle de vecteur $\vec{v}$ revient à faire une seule translation, de vecteur $\vec{u} + \vec{v}$. On trace les deux vecteurs **bout à bout** (l'origine du second sur l'extrémité du premier) : la somme va du départ à l'arrivée.

La **différence** est la somme avec l'opposé : $\vec{u} - \vec{v} = \vec{u} + (-\vec{v})$.

Méthode 4 — Construire une somme ou une différence

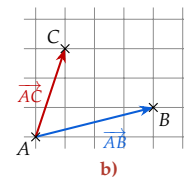
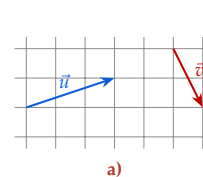
On met les vecteurs **l'un à la suite de l'autre** : l'origine du second sur l'extrémité du premier.

Exemples

(au tableau)

a) Construire $\vec{u} + \vec{v}$, puis $\vec{u} - \vec{v}$.

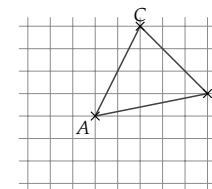
b) Construire le point D tel que $\vec{AD} = \vec{AB} + \vec{AC}$. Quelle est la nature de $ABDC$?

**À vous de jouer**

Reproduire le triangle ABC ci-contre.

1°) Construire le point D tel que $\vec{BD} = \vec{BA} + \vec{BC}$. Quelle est la nature de $BADC$?

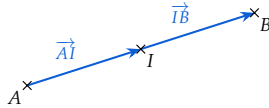
2°) Construire le point E tel que $\vec{BE} = \vec{BA} - \vec{BC}$.



► **À faire** : fiche d'exercices du chapitre, exercices 15 à 20.

V — Milieu d'un segment**Théorème 2 — Milieu**

I est le milieu de $[AB]$ équivaut à $\vec{AI} = \vec{IB}$.



Pour démontrer que M est le milieu de $[XY]$, il suffit donc d'obtenir $\overrightarrow{XM} = \overrightarrow{MY}$.

On l'écrit aussi $\overrightarrow{IA} = -\overrightarrow{IB}$, ou $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0}$. Rappel : les diagonales d'un parallélogramme se coupent en leur milieu.

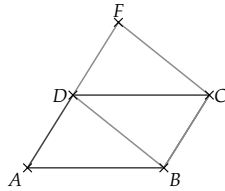
Méthode 5 — Démontrer qu'un point est un milieu

On traduit chaque parallélogramme de l'énoncé par une égalité de vecteurs, puis on les enchaîne jusqu'à obtenir $\overrightarrow{XM} = \overrightarrow{MY}$.

Exemples

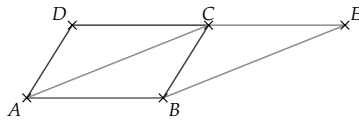
$ABCD$ et $BCFD$ sont deux parallélogrammes. Démontrer que D est le milieu de $[AF]$.

(au tableau)



À vous de jouer

$ABCD$ et $ABEC$ sont deux parallélogrammes. Démontrer que C est le milieu de $[DE]$.



► À faire : fiche d'exercices du chapitre, exercices 21 à 23.

VI — Multiplier un vecteur par un réel

Définition 5 — Produit par un réel

Pour un vecteur $\vec{u}$ non nul et un réel k non nul, le vecteur $k\vec{u}$:

- a la **même direction** que $\vec{u}$;
- a le **même sens** si $k > 0$, le **sens contraire** si $k < 0$;
- est k fois plus long si $k > 0$ (et $-k$ fois plus long si $k < 0$).

Si $k = 0$ ou $\vec{u} = \vec{0}$, alors $k\vec{u} = \vec{0}$. Par exemple, $\vec{u} + \vec{u} + \vec{u} = 3\vec{u}$ et $(-1)\vec{u} = -\vec{u}$.

À retenir

Si I est le milieu de $[AB]$: $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{AI}$. On développe comme en calcul littéral : $k(\vec{u} + \vec{v}) = k\vec{u} + k\vec{v}$.

Méthode 6 — Construire $k\vec{u}$

On multiplie par k les deux nombres de carreaux du déplacement de $\vec{u}$; si $k < 0$, on change le sens.

Exemples

$\vec{u}$: 2 carreaux à droite et 2 vers le haut. Tracer $2\vec{u}$ et $-1,5\vec{u}$.

(au tableau)

À vous de jouer

$\vec{v}$: 2 carreaux à droite et 2 vers le bas. Tracer $3\vec{v}$ et $-1,5\vec{v}$.

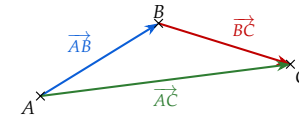
► À faire : fiche d'exercices du chapitre, exercices 24 à 26.

VII — Relation de Chasles

Théorème 3 — Relation de Chasles

Pour tous points A , B et C : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$.

- Aller de A à B , puis de B à C , c'est aller de A à C .
- $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AA} = \vec{0}$, donc $-\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BA}$.
- On peut passer par n'importe quel point de son choix : $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MC}$.



Méthode 7 — Simplifier une somme de vecteurs

On remplace chaque $-\overrightarrow{XY}$ par $\overrightarrow{YX}$, puis on range les vecteurs pour que l'extrémité de chacun soit l'origine du suivant.

Exemples

Simplifier :

- $\overrightarrow{KL} + \overrightarrow{JK}$
- $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{CD}$
- $\overrightarrow{PQ} - \overrightarrow{RQ} + \overrightarrow{RP}$

(au tableau)

Erreur à éviter

Chasles ne s'applique que si la lettre d'arrivée du premier vecteur est la lettre de départ du second : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}$ ne se simplifie pas.

À vous de jouer

Simplifier :

$$\overrightarrow{UV} + \overrightarrow{VW} \quad \overrightarrow{GH} + \overrightarrow{FG} \quad \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NP} + \overrightarrow{PM} \quad \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CB} \quad \overrightarrow{EF} - \overrightarrow{GF}$$

► À faire : fiche d'exercices du chapitre, exercices 27 à 33.