

CALCUL LITTÉRAL

Cours — Seconde

Version élève

Comment utiliser ce cours

Chaque partie commence par ce qu'il faut **savoir** (définitions, propriétés), puis vient ce qu'il faut **savoir faire** : une méthode, avec des **exemples** faits en classe, puis des exercices « **À vous de jouer** » à chercher seul. En calcul littéral, on écrit toutes les étapes : une ligne sautée est la première cause d'erreur de signe.

Sur cette feuille, seuls les **énoncés** des exemples figurent : la résolution, signalée par la mention (*au tableau*), est à rédiger dans le cahier.

I — Réduire, substituer

Définition 1 — Termes semblables

Dans une **expression littérale**, des lettres remplacent des nombres. On n'écrit pas le $\times$ devant une lettre ou une parenthèse : $5 \times x = 5x$; de plus $1x = x$ et $x \times x = x^2$.

Des termes **semblables** ont la même partie littérale : $4x$ et $-9x$ sont semblables ; $3x^2$ et $3x$ ne le sont pas.

Propriété 1 — Réduire

Réduire une somme, c'est regrouper les termes semblables en additionnant leurs nombres : $6a + 1 + 4a = 10a + 1$. **Réduire un produit**, c'est multiplier les nombres entre eux et les lettres entre elles : $3x \times (-2x) = -6x^2$.

On peut **toujours** réduire un produit. On ne peut **pas toujours** réduire une somme : $5 + 2x$ n'a pas de termes semblables, elle reste ainsi.

Trois pièges

$5 + 2x$ ne se réduit pas ; $5x + 2x = 7x$, mais $5x \times 2x = 10x^2$; $x^2 + x^2 = 2x^2$, et non x^4 .

Méthode 1 — Réduire une expression

Exemples

(au tableau)

Réduire :

a) $A = 4x + 7 - 9x + 3$

b) $B = 2x^2 + 5x - x^2 - 3x$

c) $C = 5x \times (-2x)$

À vous de jouer

Réduire, si possible :

$$D = 7a - 5 + 2a - 8 \quad E = -4y^2 + 5y - 3y^2 - 5y + 2 \quad F = 4x \times 7x$$

$$G = -5 \times (-3x) \quad H = 5 + 2x \quad K = x^2 + 5x^2$$

Méthode 2 — Substituer

Substituer, c'est remplacer la lettre par une valeur : on l'écrit **entre parenthèses**, on rétablit les $\times$, puis on calcule avec les priorités.

Exemples

(au tableau)

Calculer $B = 2x^2 - 5x + 3$ pour $x = 4$, pour $x = -1$, puis pour $x = \frac{1}{2}$.

Tester une égalité

Pour $x = 0$: $(x + 3)^2 = 9$ et $x^2 + 9 = 9$. Pour $x = 1$: $(x + 3)^2 = 16$ mais $x^2 + 9 = 10$. Un seul contre-exemple suffit : les deux expressions ne sont **pas** égales. Des tests réussis ne prouvent rien : pour prouver une égalité, on **développe**.

À vous de jouer

1°) Calculer $E = -x^2 + 4x - 2$ pour $x = 3$, pour $x = -2$, puis pour $x = \frac{1}{2}$.

2°) Calculer $F = 3x^2 - x + 5$ pour $x = 2$, puis pour $x = -1$.

► **À faire** : fiche d'exercices du chapitre, exercices 1 à 4.

II — Développer**Propriété 2 — Distributivité**

Développer, c'est transformer un produit en une somme. Pour tous nombres k, a, b, c, d :

$$k(a + b) = ka + kb \quad k(a - b) = ka - kb \quad (a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd$$

Un signe $-$ devant une parenthèse change le signe de chaque terme : $-(a - b) = -a + b$. Pour soustraire un produit, on le développe d'abord **entre crochets**.

Méthode 3 — Développer et réduire**Exemples**

(au tableau)

Développer et réduire :

a) $A = -4(3x - 2)$

b) $B = (2x + 5) \times 3$

c) $C = 7 - (2x - 3)$

d) $D = 3x(2x - 5) + 4x$

e) $E = (3x + 2)(x - 5)$

f) $F = 4x^2 - (3x - 2)(x + 4)$

g) $G = 3(x + 2)(x - 4)$

À vous de jouer

Développer et réduire :

$$H = -6(2x - 3) \quad K = (3x + 5) \times 4 \quad L = 9 - (5x - 2) \quad M = 2x(4x + 3) - 5x$$

$$N = (2x - 3)(5x + 1) \quad P = 3x - (x - 4)(2x + 3) \quad Q = 2(x - 3)(x + 5)$$

$$R = (3x + 1)(x + 2) - (x - 4)(2x + 1)$$

► **À faire** : fiche d'exercices du chapitre, exercices 5 à 9.

III — Identités remarquables

Propriété 3 — Identités remarquables

Pour tous nombres a et b :

- 1^{re} identité remarquable : $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$;
- 2^e identité remarquable : $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$;
- 3^e identité remarquable : $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$.

Démonstration. $(a + b)^2 = (a + b)(a + b) = a^2 + ab + ba + b^2$, soit $a^2 + 2ab + b^2$; les deux autres se démontrent de même.

L'erreur la plus fréquente

$(a + b)^2 \neq a^2 + b^2$: on oublie le **double produit** $2ab$. Par exemple $(2 + 5)^2 = 49$, alors que $2^2 + 5^2 = 29$.

Méthode 4 — Développer avec une identité remarquable

Exemples

(au tableau)

Développer :

- $(x - 4)^2$
- $(5x + 2)^2$
- $(3x - 1)(3x + 1)$

À vous de jouer

Développer et réduire :

$$A = (x + 7)^2 \quad B = (4x - 3)^2 \quad C = (2 - 5x)^2 \quad D = (6x + 5)(6x - 5) \quad E = (3x + 2)^2 - (x - 2)(x + 2)$$

► **À faire** : fiche d'exercices du chapitre, exercices 10 à 13.

IV — Factoriser

Définition 2 — Factoriser

Factoriser, c'est transformer une somme en un produit : c'est l'inverse de développer. Le facteur présent dans chaque terme est le **facteur commun** :

$$\underbrace{ka + kb}_{\text{forme développée}} \xrightleftharpoons[\text{développer}]{\text{factoriser}} \underbrace{k(a + b)}_{\text{forme factorisée}}$$

Méthode 5 — Factoriser avec un facteur commun

On repère le facteur commun (un nombre, x ou une parenthèse entière), au besoin en décomposant chaque terme (les tables de multiplication à l'envers), puis on écrit ce qui reste de chaque terme entre crochets, avec son signe.

Exemples

(au tableau)

Factoriser :

- $A = 15x + 20$
- $B = 7x^2 - 2x$
- $C = (3x + 2)(x - 1) + (3x + 2)(2x + 5)$
- $D = (x + 4)(3x - 2) - (x + 4)(x - 5)$

Remarque

On factorise le plus possible : $8x^2 - 12x = x(8x - 12)$ est juste mais incomplet; on écrit $8x^2 - 12x = 4x(2x - 3)$.

À vous de jouer

Factoriser :

$$E = 6 \times x - 6 \times 5$$

$$F = 10a - 15b$$

$$G = 9x^2 + 4x$$

$$H = 10x^2 - 15x$$

$$K = (3x - 2)(x + 4) + (3x - 2)(2x - 5)$$

$$L = (x - 3)(4x + 1) - (x - 3)(x - 4)$$

► **À faire** : fiche d'exercices du chapitre, exercices 14 à 16.

V — Factoriser avec une identité remarquable**Propriété 4 — Les identités, de droite à gauche**

$$a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2 \quad a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2 \quad a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$$

Méthode 6 — Reconnaître une identité remarquable

Deux carrés séparés par un $-$: c'est $a^2 - b^2$. Trois termes dont deux carrés : on trouve d'abord a et b , puis on **contrôle le double produit** $2ab$.

Exemples

(au tableau)

Factoriser :

a) $A = x^2 - 36$

b) $B = 9x^2 - 49$

c) $C = 16x^2 + 24x + 9$

d) $D = 25x^2 - 20x + 4$

Ce qui ne se factorise pas

Une somme de deux carrés comme $4x^2 + 25$; ou $4x^2 - 10x + 25$: $(2x)^2$ et 5^2 , mais $2 \times 2x \times 5 = 20x \neq 10x$.

À vous de jouer

Factoriser, si possible :

$$E = 49x^2 - 1$$

$$F = 4 - 25x^2$$

$$G = x^2 + 10x + 25$$

$$H = 9x^2 - 12x + 4$$

$$K = 16x^2 + 9$$

$$L = 25 - 30x + 9x^2$$

► **À faire** : fiche d'exercices du chapitre, exercices 17 à 19.

VI — Factorisations avancées**Propriété 5 — Faire apparaître le facteur commun**

- Une identité sur des expressions : $(\dots)^2 - (\dots)^2$, avec a et b entre crochets.
- Le « 1 » caché : $(x + 4) = 1 \times (x + 4)$; il reste 1 dans le crochet, pas 0.
- Des facteurs opposés : $3 - x = -(x - 3)$.
- Une identité dans un seul morceau : $x^2 - 16 = (x + 4)(x - 4)$ fait apparaître $(x + 4)$.

Méthode 7 — Choisir une stratégie de factorisation

Exemples

(au tableau)

Factoriser :

a) $A = (x + 5)^2 - 16$

b) $B = 3(x + 1)(x + 4) - (x + 4)$

c) $C = (2x + 1)(x - 3) + x(3 - x)$

d) $D = x^2 - 16 + (x + 4)(3x - 1)$

À vous de jouer

Factoriser :

$$E = (2x + 3)^2 - (x - 1)^2 \quad F = (x + 2)^2 + (x + 2)(3x - 5) \quad G = (6x - 4)(x + 2) + (3x - 2)(x - 1)$$

$$H = (4x - 1) - 3(4x - 1)^2 \quad K = 9x^2 - 1 - (3x - 1)(x + 2)$$

► À faire : fiche d'exercices du chapitre, exercices 20 à 23.

VII — Fractions rationnelles

Définition 3 — Fraction rationnelle, valeur interdite

Une **fraction rationnelle** est un quotient d'expressions dont le dénominateur contient la lettre : $\frac{x-1}{x+3}$, $\frac{2}{5-x}$.

Une valeur de x qui **annule le dénominateur** est **interdite** : pour $\frac{x-1}{x+3}$, c'est -3 .

Propriété 6 — Mêmes règles que les fractions de nombres

Pour b et d non nuls : $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a \times d}{b \times d} + \frac{c \times b}{d \times b}$. On ne simplifie que des facteurs : $\frac{x+5}{5} \neq x$.

Méthode 8 — Écrire avec une seule fraction

On donne les valeurs interdites, on met au même dénominateur, puis on réduit le numérateur seulement.

Exemples

(au tableau)

Donner les valeurs interdites, puis écrire avec une seule fraction :

a) $A = 2 + \frac{3x}{x+2}$

b) $B = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+2}$

À vous de jouer

1°) Donner les valeurs interdites, puis écrire avec une seule fraction : $C = \frac{3}{x} + \frac{1}{2}$ $D = \frac{3}{x-2} - \frac{2}{x+1}$

$$E = x - \frac{4}{x}$$

2°) **Bonus.** À l'aide de B , calculer $\frac{2}{1 \times 3} + \frac{2}{3 \times 5} + \frac{2}{5 \times 7} + \cdots + \frac{2}{99 \times 101}$.

► À faire : fiche d'exercices du chapitre, exercices 24 à 27.

VIII — Équations du premier degré

Définition 4 — Équation, solution

Une **équation** est une égalité qui contient un nombre inconnu. Une **solution** est une valeur de l'inconnue qui rend l'égalité vraie. Résoudre, c'est trouver toutes les solutions ; on les écrit dans l'ensemble S .

Propriété 7 — Règles de résolution

On garde les mêmes solutions en ajoutant (ou soustrayant) un même nombre aux deux membres, et en multipliant (ou divisant) les deux membres par un même nombre **non nul**. On se ramène à $ax = b$:

- si $a \neq 0$: $S = \left\{ \frac{b}{a} \right\}$;
- si $a = 0$ et $b \neq 0$ ($0x = b$ est toujours faux) : $S = \emptyset$;
- si $a = 0$ et $b = 0$ ($0x = 0$ est toujours vrai) : $S = \mathbb{R}$.

Méthode 9 — Résoudre une équation du premier degré

On supprime les parenthèses, puis les fractions (on multiplie **chaque terme** par le dénominateur commun), on regroupe les x d'un côté et les nombres de l'autre, puis on divise par le coefficient de x .

Exemples

(au tableau)

Résoudre :

a) $4x - 5 = 9 - 2(3 - x)$

b) $\frac{x}{3} + \frac{1}{2} = \frac{x-1}{6} + 3$

c) $3(x+2) + 1 - 5x = 2(4-x) + 3$

Égalité de deux fractions

Pour $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, le produit en croix (chapitre 1) donne directement $a \times d = b \times c$.

À vous de jouer

Résoudre :

1°) $5x - 4 = 2x + 14$ 2°) $2(x - 3) - (x + 5) = 4x - 2$ 3°) $\frac{7}{6} - \frac{x}{4} = \frac{1}{3}$

4°) $\frac{x+2}{3} = \frac{3x-1}{4}$ 5°) $2(3x+5) - 4x = 12 - 2(1-x)$

Méthode 10 — Inconnue au dénominateur

On donne les valeurs interdites, on fait un produit en croix, on résout, puis on vérifie que la solution n'est pas interdite.

Exemples

(au tableau)

Résoudre $\frac{3x-2}{x-2} = \frac{5}{2}$.

À vous de jouer

Résoudre $\frac{3x+1}{x+2} = 2$ puis $\frac{4}{x+3} = \frac{1}{x}$.

► **À faire** : fiche d'exercices du chapitre, exercices 28 à 33.

IX — Équations produit

Propriété 8 — Produit nul

Un produit est nul si et seulement si l'un au moins de ses facteurs est nul : $A \times B = 0$ équivaut à $A = 0$ ou $B = 0$.

Méthode 11 — Résoudre une équation produit, ou s'y ramener

On met tout dans le membre de gauche ($\dots = 0$), on factorise, puis on écrit « facteur = 0 » pour chaque facteur.

Exemples

(au tableau)

Résoudre :

a) $(x + 3)(3x - 7) = 0$

b) $4x^2 - 6x = 0$

c) $(x + 2)(3x - 1) = (x + 2)(x + 5)$

d) $(2x - 1)^2 - 9 = 0$

À vous de jouer

Résoudre :

1°) $(4x - 3)(5 - 2x) = 0$ 2°) $2x^2 + 8x = 0$ 3°) $(x + 4)(3x - 2) - (1 - x)(3x - 2) = 0$ 4°) $(x - 2)(2x + 1) = 3$

Méthode 12 — Choisir la forme adaptée

Pour calculer une image : la forme où le calcul est le plus simple ; pour $f(x) = 0$: la forme factorisée ; pour $f(x) = k$: la forme où les nombres s'éliminent.

Exemples

(au tableau)

Soit $f(x) = (x + 1)^2 - 9$.

a) Développer, puis factoriser $f(x)$.b) Calculer $f(0)$, puis résoudre $f(x) = 0$, $f(x) = -8$ et $f(x) = -9$.

À vous de jouer

Soit $g(x) = (2x - 1)^2 - 16$.

1°) Développer, puis factoriser $g(x)$.2°) Avec la forme adaptée : calculer $g(0)$; résoudre $g(x) = 0$, $g(x) = -15$ et $g(x) = -16$.

► **À faire** : fiche d'exercices du chapitre, exercices 34 à 38.

X — Équations $x^2 = a$ et équations quotient

Propriété 9 — Deux cas particuliers

- $x^2 = a$: pas de solution si $a < 0$ (un carré est positif) ; la seule solution 0 si $a = 0$; deux solutions $\sqrt{a}$ et $-\sqrt{a}$ si $a > 0$.
- $\frac{A}{B} = 0$ équivaut à $A = 0$ et $B \neq 0$: un quotient est nul si et seulement si son numérateur est nul et son dénominateur est non nul.

Pourquoi deux solutions ?

$5^2 = 25$ et $(-5)^2 = 25$: deux nombres opposés ont le même carré. En factorisant : $x^2 - 25 = (x - 5)(x + 5)$.

Méthode 13 — Résoudre $x^2 = a$ **Exemples**

(au tableau)

Résoudre :

- a) $x^2 = 25$
- b) $x^2 = -3$
- c) $3x^2 - 15 = 0$
- d) $(x - 1)^2 = 16$

À vous de jouer

Résoudre :

$$x^2 = 64 \quad x^2 + 9 = 0 \quad 2x^2 = 72 \quad (x + 2)^2 = 9$$

Méthode 14 — Résoudre une équation quotient $A/B = 0$

On cherche d'abord la valeur interdite ($B = 0$), puis on résout $A = 0$, et on retire la valeur interdite des solutions.

Exemples

(au tableau)

Résoudre :

- a) $\frac{2x - 5}{x + 3} = 0$
- b) $\frac{x^2 - 16}{x - 4} = 0$

À vous de jouer

Résoudre :

$$\frac{(3x - 1)(x + 5)}{x - 2} = 0 \quad \frac{x^2 - 1}{x + 1} = 0$$

► **À faire** : fiche d'exercices du chapitre, exercices 39 à 41.

XI — Mise en équation**Méthode 15 — Résoudre un problème par une équation**

On choisit l'inconnue et on l'annonce (« Soit $x \dots$ »), on traduit l'énoncé par une équation, on la résout, puis on conclut par une phrase, après avoir vérifié que le résultat a un sens.

Exemples

(au tableau)

- a) Trois amies vendent des gâteaux pour financer une sortie. Léa récolte 30 € de plus que Nina, et Inès le double de Léa. À elles trois, elles récoltent 330 €. Combien chacune a-t-elle récolté ?
- b) Une salle d'escalade propose deux tarifs : 12 € l'entrée, ou un abonnement de 40 € puis 7 € l'entrée. Pour combien d'entrées les deux tarifs coûtent-ils autant ?

À vous de jouer

- 1°) La somme de trois entiers consécutifs vaut 258. Quels sont-ils ?
- 2°) Un classeur coûte 2 € de plus qu'un cahier. Quatre cahiers et trois classeurs coûtent 27 €. Quel est le prix d'un cahier ?

► **À faire** : fiche d'exercices du chapitre, exercices 42 à 44.

XII — Problèmes de géométrie

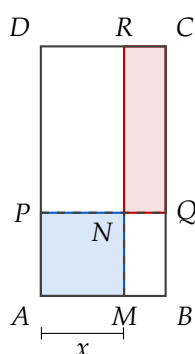
Méthode 16 — Mettre en équation un problème de géométrie

On place x sur la figure et on précise ses valeurs possibles, on exprime les longueurs, puis les aires ou les périmètres, on écrit l'équation et on la résout ; souvent, les x^2 s'éliminent. On vérifie enfin que la solution est possible.

Exemples

(au tableau)

- Un rectangle a pour longueur 10 cm et pour largeur x cm ; un carré a pour côté $x + 3$ cm. Pour quelle valeur de x ont-ils le même périmètre ?
- Le rectangle $ABCD$ a pour dimensions $AB = 3$ cm et $BC = 6$ cm. Le point M est sur $[AB]$ avec $AM = x$ ($x \neq 0$). On construit le carré $AMNP$ et le rectangle $NQCR$ (figure). Où placer M pour que le carré et le rectangle aient la même aire ?



À vous de jouer

- La longueur d'un rectangle dépasse sa largeur de 5 cm, et son périmètre vaut 42 cm. Quelles sont ses dimensions ?
- Quand on augmente de 2 cm le côté d'un carré, son aire augmente de 32 cm^2 . Quelle est l'aire du carré de départ ?
- Un rectangle a pour dimensions $x + 8$ et x ; un carré a pour côté $x + 3$ (en cm, $x > 0$). a) Pour quelle valeur de x ont-ils la même aire ? b) Peuvent-ils avoir le même périmètre ?

► **À faire** : fiche d'exercices du chapitre, exercices 45 à 50.

XIII — Isoler une grandeur

Définition 5 — Isoler une grandeur

Une formule relie plusieurs grandeurs. **Isoler** une grandeur, c'est réécrire la formule sous la forme « grandeur = ... » : on résout une équation dont l'inconnue est cette grandeur, les autres lettres jouant le rôle de nombres connus.

Méthode 17 — Isoler une grandeur

On ajoute, on soustrait, on multiplie ou on divise les deux membres par une même quantité non nulle ; pour deux fractions égales, le produit en croix est souvent le plus rapide ; pour une grandeur positive au carré, on finit par une racine carrée.

Exemples

(au tableau)

- Puissance $P = \frac{W}{t}$: isoler W , puis t .

- b) $\frac{h}{H} = \frac{\ell}{L}$: isoler L .
c) Périmètre d'un triangle isocèle $P = 2a + b$: isoler a .
d) Volume d'un cône $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$: isoler le rayon r .

À vous de jouer

- 1°) Loi d'Ohm $U = RI$: isoler I , puis R .
2°) Périmètre d'un cercle $C = 2\pi r$: isoler r .
3°) Masse volumique $\rho = \frac{m}{V}$: isoler m , puis V .
4°) Aire d'un trapèze $\mathcal{A} = \frac{(B+b) \times h}{2}$: isoler h .
5°) Conversion des températures $F = \frac{9}{5}C + 32$: isoler C .
6°) Énergie cinétique $E = \frac{1}{2}mv^2$: isoler v (avec $v > 0$).
7°) On a $3x - 2y + 5z = 12$. Exprimer x en fonction de y et z , puis calculer x pour $y = 3$ et $z = 0$.

► **À faire** : fiche d'exercices du chapitre, exercices 51 à 54 ; pour préparer le devoir commun : exercices 55 à 60.