

VARIATIONS, SIGNE ET INÉQUATIONS

Cours — Seconde

Comment utiliser ce cours

Chaque partie commence par ce qu'il faut **savoir** (définitions, propriétés), puis vient ce qu'il faut **savoir faire** : une méthode, avec des **exemples corrigés** faits en classe, puis des exercices « À vous de jouer » à chercher seul.

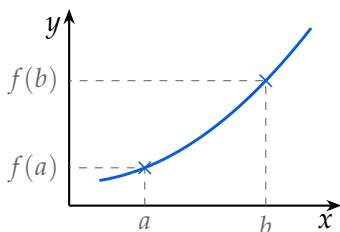
I — Fonction croissante, fonction décroissante

Une courbe se lit comme le profil d'une étape de montagne du Tour de France : en la parcourant **de gauche à droite**, on monte ou on descend.

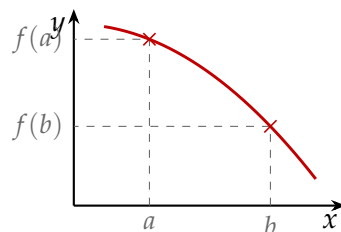
Définition 1 — Fonction croissante, décroissante, constante

Soit f une fonction définie sur un intervalle I .

- f est **croissante** sur I si, quand x augmente, $f(x)$ augmente : pour tous nombres a et b de I , si $a < b$ alors $f(a) \leq f(b)$. Sa courbe **monte**.
- f est **décroissante** sur I si, quand x augmente, $f(x)$ diminue : si $a < b$ alors $f(a) \geq f(b)$. Sa courbe **descend**.
- f est **constante** sur I si $f(x)$ garde toujours la même valeur. Sa courbe est horizontale.



croissante : $a < b$ et $f(a) \leq f(b)$



décroissante : $a < b$ et $f(a) \geq f(b)$

Une fonction croissante conserve l'ordre ; une fonction décroissante renverse l'ordre.

Exemple : $2 < 7$. Si f est croissante sur $[0; 10]$, alors $f(2) \leq f(7)$; si g est décroissante sur $[0; 10]$, alors $g(2) \geq g(7)$.

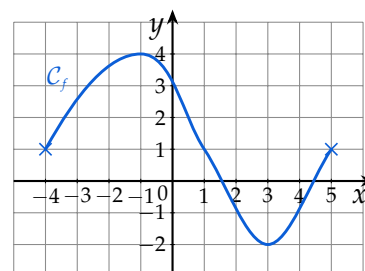
Donner les **variations** de f , c'est dire sur quels intervalles elle est croissante et sur lesquels elle est décroissante.

Méthode 1 — Lire les variations d'une fonction sur sa courbe

Exemples corrigés

La fonction f est représentée ci-contre par sa courbe $\mathcal{C}_f$.

- Sur quel intervalle la fonction f est-elle définie ?
- Sur quels intervalles f est-elle croissante ? décroissante ?



- f est définie sur $[-4; 5]$.

b)

la courbe commence en $x = -4$ et s'arrête en $x = 5$

f est croissante sur $[-4; -1]$.

f est décroissante sur $[-1; 3]$.

f est croissante sur $[3; 5]$.

Les intervalles s'écrivent avec des valeurs de x .

À vous de jouer

La fonction g est représentée ci-contre par sa courbe $\mathcal{C}_g$.

a) Sur quel intervalle la fonction g est-elle définie ?

b) Donner les variations de g .

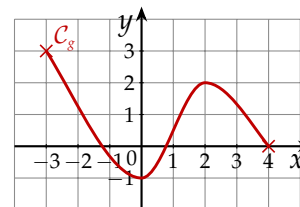
Réponses : a) $[-3; 4]$; b) g décroissante sur $[-3; 0]$, croissante sur $[0; 2]$, décroissante sur $[2; 4]$.

de $x = -4$ à $x = -1$, la courbe monte

de $x = -1$ à $x = 3$, elle descend

puis elle remonte jusqu'à $x = 5$

on ne recopie pas les hauteurs 4 ou -2



► **À faire** : fiche d'exercices du chapitre, exercices 1 à 6.

II — Maximum, minimum

Définition 2 — Maximum, minimum

Soit f une fonction définie sur un intervalle I , et a un nombre de I .

- f admet un **maximum** M en a si $f(a) = M$ et si, pour tout x de I , $f(x) \leq M$: c'est la plus grande image, au point le plus haut de la courbe.
- f admet un **minimum** m en a si $f(a) = m$ et si, pour tout x de I , $f(x) \geq m$: c'est la plus petite image, au point le plus bas.

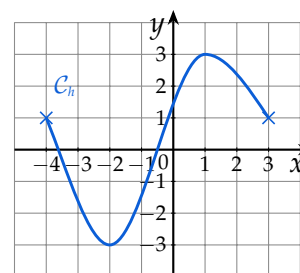
Un maximum ou un minimum s'appelle un **extremum**. On dit qu'il est **atteint** en a .

Méthode 2 — Lire les extremums d'une fonction sur sa courbe

Exemples corrigés

La fonction h , définie sur $[-4; 3]$, est représentée ci-contre par sa courbe $\mathcal{C}_h$.

- a) Donner le maximum et le minimum de h sur $[-4; 3]$, et où ils sont atteints.
- b) Même question sur l'intervalle $[1; 3]$ seulement.



a)

Le maximum de h est 3, atteint en $x = 1$.

Le minimum de h est -3, atteint en $x = -2$.

b)

Sur $[1; 3]$, le maximum est 3, atteint en $x = 1$.

Le minimum est 1, atteint en $x = 3$.

À vous de jouer

Donner le maximum et le minimum de la fonction g de la méthode 1 sur $[-3; 4]$, et où ils sont atteints.

Réponses : maximum 3, atteint en $x = -3$ (au bord, plus haut que le sommet $(2; 2)$); minimum -1, atteint en $x = 0$.

point le plus haut : $(1; 3)$

point le plus bas : $(-2; -3)$

on ne regarde que la partie de la courbe entre $x = 1$ et $x = 3$

un extremum peut être au bord de l'intervalle

► **À faire** : fiche d'exercices du chapitre, exercices 7 à 9.

III — Tableau de variations

Définition 3 — Tableau de variations

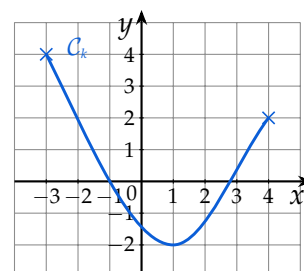
Le **tableau de variations** d'une fonction résume ses variations :

- sur la première ligne, les valeurs de x : les bornes de l'intervalle de définition et les valeurs où le sens de variation change ;
- sur la seconde ligne, une flèche qui monte (fonction croissante) ou qui descend (fonction décroissante), avec les images au bout des flèches.

Méthode 3 — Dresser le tableau de variations à partir de la courbe

Exemples corrigés

La fonction k , définie sur $[-3; 4]$, est représentée ci-contre par sa courbe C_k . Dresser son tableau de variations.



Résolution

Première ligne : $-3, 1$ et 4 .

Seconde ligne : une flèche qui descend, puis une qui monte.

Au bout des flèches : $k(-3) = 4, k(1) = -2$ et $k(4) = 2$.

bornes -3 et 4 ; changement de sens en 1
 décroissante sur $[-3; 1]$, croissante sur $[1; 4]$
 images lues sur la courbe

x	-3	1	4
$k(x)$	4	-2	2

À vous de jouer

Dresser le tableau de variations de la fonction g de la méthode 1.

Réponses : x : $-3, 0, 2, 4$; flèches : descend de 3 à -1 , monte jusqu'à 2 , descend jusqu'à 0 .

Méthode 4 — Exploiter un tableau de variations

Exemples corrigés

La fonction s a le tableau de variations ci-contre.

- Comparer $s(-4)$ et $s(-2)$.
- Comparer $s(0)$ et $s(3)$.
- Donner le maximum et le minimum de s .

a)

-4 et -2 sont dans $[-5; -1]$, où s est croissante.

$-4 < -2$, donc $s(-4) \leq s(-2)$.

b)

0 et 3 sont dans $[-1; 4]$, où s est décroissante.

$0 < 3$, donc $s(0) \geq s(3)$.

x	-5	-1	4	6
$s(x)$	2	7	-3	0

on cherche l'intervalle qui contient les deux nombres
 croissante : l'ordre est conservé

même intervalle
 décroissante : l'ordre est inversé

c)

 Le maximum de s est 7, atteint en $x = -1$.

 Le minimum de s est -3 , atteint en $x = 4$.

À vous de jouer

 La fonction t a le tableau de variations ci-contre.

 a) Comparer $t(-2)$ et $t(0)$, puis $t(2)$ et $t(4)$.

 b) Donner le maximum et le minimum de t .

Réponses : a) $t(-2) \leq t(0)$; $t(2) \geq t(4)$. b) maximum 5 en $x = 1$;
minimum -1 en $x = -3$.

plus grand nombre de la seconde ligne
plus petit nombre de la seconde ligne

x	-3	1	5
$t(x)$	-1	5	2

► **À faire** : fiche d'exercices du chapitre, exercices 10 à 14.

IV — Fonctions affines et linéaires

Définition 4 — Fonction affine, fonction linéaire

 Une fonction f est **affine** s'il existe deux nombres a et b tels que, pour tout x de $\mathbb{R}$:

$$f(x) = ax + b$$

- Si $b = 0$, $f(x) = ax$: f est **linéaire** (elle traduit une situation de proportionnalité).
- Si $a = 0$, $f(x) = b$: f est **constante**.

Propriété 1 — Droite représentative

 La courbe d'une fonction affine $f(x) = ax + b$ est une **droite** :

- b est l'**ordonnée à l'origine** : la droite coupe l'axe des ordonnées au point $(0; b)$;
- a est le **coefficient directeur** : quand x augmente de 1, y augmente de a (ou diminue, si a est négatif).

La droite d'une fonction linéaire passe par l'origine du repère.

Propriété 2 — Variations d'une fonction affine

 Soit $f(x) = ax + b$ une fonction affine.

- Si $a > 0$, f est croissante sur $\mathbb{R}$.
- Si $a < 0$, f est décroissante sur $\mathbb{R}$.
- Si $a = 0$, f est constante sur $\mathbb{R}$.

Démonstration

 Soit u et v deux nombres tels que $u < v$; on compare $f(u)$ et $f(v)$ en étudiant le signe de leur différence.

$$f(v) - f(u) = (av + b) - (au + b) \quad \text{définition de } f$$

$$f(v) - f(u) = av + b - au - b \quad \text{on supprime les parenthèses}$$

$$f(v) - f(u) = a(v - u) \quad \text{on factorise par } a$$

$u < v$, donc $v - u > 0$: $f(v) - f(u)$ a le signe de a .

Si $a > 0$: $f(v) - f(u) > 0$, donc $f(u) < f(v)$ et f est croissante.

Si $a < 0$: $f(v) - f(u) < 0$, donc $f(u) > f(v)$ et f est décroissante.

Si $a = 0$: $f(v) - f(u) = 0$, donc $f(u) = f(v)$ et f est constante.

règle des signes d'un produit

l'ordre est conservé

l'ordre est inversé

Méthode 5 — Reconnaître une fonction affine et donner ses variations
Exemples corrigés

Pour chaque fonction f, g, h , dire si elle est affine ; si oui, donner a, b et ses variations.

a) $f(x) = 5 - 3x$

b) $g(x) = (x + 2)^2 - x^2$

c) $h(x) = x(x + 1)$

a)

$$f(x) = 5 - 3x \quad \text{on recopie l'expression}$$

$$f(x) = -3x + 5 \quad \text{on écrit d'abord le terme en } x$$

f est affine : $a = -3$ et $b = 5$.

forme $ax + b$

$a < 0$: f est décroissante sur $\mathbb{R}$.

propriété 2

b)

$$g(x) = (x + 2)^2 - x^2 \quad \text{on recopie l'expression}$$

$$g(x) = x^2 + 4x + 4 - x^2 \quad \text{identité remarquable}$$

$$g(x) = 4x + 4 \quad \text{les } x^2 \text{ s'annulent}$$

g est affine : $a = 4$ et $b = 4$; $a > 0$, donc g est croissante sur $\mathbb{R}$. *il fallait développer pour le voir*

c)

$$h(x) = x(x + 1) \quad \text{on recopie l'expression}$$

$$h(x) = x^2 + x \quad \text{on développe}$$

h n'est pas affine.

il reste un terme en } x^2

À vous de jouer

Même consigne pour les fonctions p, q et r :

$$p(x) = 2(x - 3) + x \quad q(x) = -\frac{x}{2} \quad r(x) = (x - 1)^2 - (x + 1)^2$$

Réponses : $p(x) = 3x - 6$, croissante ; q linéaire, $a = -\frac{1}{2}$ et $b = 0$, décroissante ; $r(x) = -4x$, linéaire, décroissante.

Méthode 6 — Tracer la droite d'une fonction affine
Exemples corrigés

Dans un même repère, tracer les droites représentant les fonctions $f(x) = 2x - 3$ et $g(x) = -\frac{1}{2}x + 1$.

Résolution

Deux points suffisent pour tracer une droite.

on calcule deux images

$$f(0) = -3 \text{ et } f(3) = 6 - 3 = 3.$$

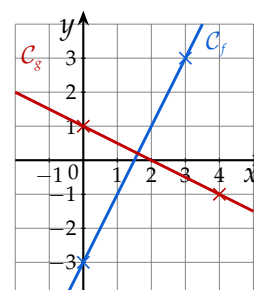
points (0 ; -3) et (3 ; 3)

$$g(0) = 1 \text{ et } g(4) = -2 + 1 = -1.$$

$x = 4$ est pair : la moitié est entière

On place les points, puis on trace chaque droite à la règle.

contrôle : f monte de 2 quand x avance de 1


À vous de jouer

Tracer les droites représentant $h(x) = -x + 2$ et $k(x) = \frac{1}{3}x - 1$.

Réponses : h : points (0 ; 2) et (2 ; 0) ; k : points (0 ; -1) et (3 ; 0).

► **À faire** : fiche d'exercices du chapitre, exercices 15 à 19.

V — Fonction affine par lecture graphique

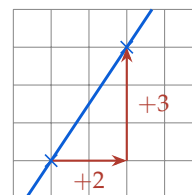
Lire le coefficient directeur a

On part d'un point de la droite situé sur un nœud du quadrillage et on va, vers la droite, jusqu'à un autre nœud de la droite :

$$a = \frac{\text{déplacement vertical}}{\text{déplacement horizontal}}$$

Le déplacement vertical est **positif** si l'on monte, **négatif** si l'on descend. Ci-contre : on avance de 2 et on monte de 3, donc

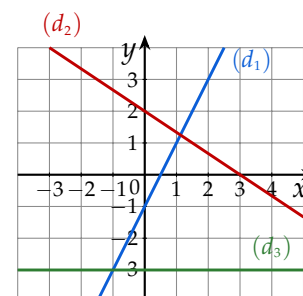
$$a = \frac{3}{2}.$$



Méthode 7 — Retrouver l'expression d'une fonction affine sur sa droite

Exemples corrigés

Les droites (d_1) , (d_2) et (d_3) représentent trois fonctions affines f , g et h . Donner l'expression de chacune.



(d_1)

$$b = -1.$$

$$a = \frac{2}{1} = 2.$$

$$f(x) = 2x - 1.$$

(d_2)

$$b = 2.$$

$$a = \frac{-2}{3} = -\frac{2}{3}.$$

$$g(x) = -\frac{2}{3}x + 2.$$

(d_3)

$$h(x) = -3.$$

À vous de jouer

Les droites (d_4) et (d_5) représentent deux fonctions affines k et ℓ . Donner l'expression de chacune.

Réponses : $k(x) = \frac{3}{2}x$ (linéaire); $\ell(x) = -2x + 2$.

la droite coupe l'axe des ordonnées en $(0; -1)$

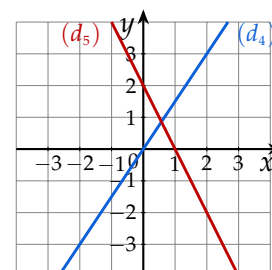
de $(0; -1)$ à $(1; 1)$: on avance de 1 et on monte de 2

elle coupe l'axe des ordonnées en $(0; 2)$

de $(0; 2)$ à $(3; 0)$: on avance de 3 et on descend de 2 (déplacement vertical -2)

en avançant de 1, on ne tombe pas sur un nœud : on avance de 3

droite horizontale : $a = 0$, fonction constante



► **À faire** : fiche d'exercices du chapitre, exercices 20 à 22.

VI — Fonction affine passant par deux points

Propriété 3 — Coefficient directeur

Si $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$ sont deux points de la droite d'une fonction affine $f(x) = ax + b$, avec $x_A \neq x_B$, alors :

$$a = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} \quad (\text{différence des ordonnées sur différence des abscisses})$$

Démonstration

$$\begin{aligned} y_B - y_A &= f(x_B) - f(x_A) && A \text{ et } B \text{ sont sur la droite} \\ y_B - y_A &= (ax_B + b) - (ax_A + b) && \text{définition de } f \\ y_B - y_A &= a(x_B - x_A) && \text{les } b \text{ s'annulent ; on factorise par } a \end{aligned}$$

On divise par $x_B - x_A$, qui n'est pas nul.

on obtient la formule

Méthode 8 — Trouver la fonction affine qui passe par deux points

Exemples corrigés

- a) Trouver la fonction affine f telle que $f(1) = 5$ et $f(3) = -1$.
 b) Une course de taxi de 4 km coûte 11 € ; une course de 10 km coûte 20 €. Le prix est une fonction affine p de la distance x (en km). Trouver $p(x)$.

a)

La droite passe par $A(1; 5)$ et $B(3; -1)$.

$f(1) = 5$: point d'abscisse 1 et d'ordonnée 5

$$a = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} \quad \text{propriété 3}$$

$$a = \frac{-1 - 5}{3 - 1} \quad \text{on remplace}$$

$$a = -3 \quad -6 \div 2$$

Donc $f(x) = -3x + b$; on cherche b avec le point A.

$f(1) = 5$

$$f(1) = -3 \times 1 + b \quad \text{on remplace } x \text{ par } 1$$

$$5 = -3 + b \quad \text{car } f(1) = 5$$

$$b = 5 + 3 \quad \text{on ajoute 3 des deux côtés}$$

$$b = 8$$

$$f(x) = -3x + 8.$$

contrôle avec B : $f(3) = -9 + 8 = -1$

b)

La droite passe par $A(4; 11)$ et $B(10; 20)$.

distance en abscisse, prix en ordonnée

$$a = \frac{20 - 11}{10 - 4} \quad \text{propriété 3}$$

$$a = \frac{9}{6}$$

$$a = 1,5 \quad \text{le prix augmente de 1,5 € par km}$$

$$p(4) = 1,5 \times 4 + b \quad \text{on remplace } x \text{ par } 4$$

$$11 = 6 + b \quad \text{car } p(4) = 11$$

$$b = 5 \quad \text{on enlève 6 des deux côtés}$$

$$p(x) = 1,5x + 5.$$

5 € de prise en charge, plus 1,5 € par km

À vous de jouer

- a) Trouver la fonction affine f telle que $f(-1) = 6$ et $f(3) = -2$.
 b) Trouver la fonction affine g dont la droite passe par $A(-2;0)$ et $B(4;3)$.

Réponses : a) $f(x) = -2x + 4$; b) $g(x) = \frac{1}{2}x + 1$.

► **À faire** : fiche d'exercices du chapitre, exercices 23 à 26.

VII — Signe d'une fonction par lecture graphique

Définition 5 — Signe d'une fonction, tableau de signes

Étudier le **signe** d'une fonction f , c'est trouver pour quels x :

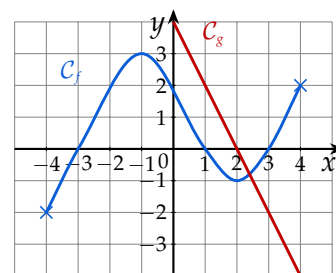
- $f(x) > 0$: la courbe est **au-dessus** de l'axe des abscisses ;
- $f(x) < 0$: la courbe est **au-dessous** de l'axe des abscisses ;
- $f(x) = 0$: la courbe **coupe** l'axe des abscisses.

On le résume dans un **tableau de signes** : les valeurs de x sur la première ligne, les signes $+$ ou $-$ et les 0 sur la seconde.

Méthode 9 — Lire le signe d'une fonction sur sa courbe

Exemples corrigés

La courbe $\mathcal{C}_f$ représente une fonction f définie sur $[-4;4]$; la droite $\mathcal{C}_g$ représente une fonction affine g définie sur $\mathbb{R}$.
 Dresser le tableau de signes de f , puis celui de g .



Signe de f

$\mathcal{C}_f$ coupe l'axe des abscisses en $x = -3$, en $x = 1$ et en $x = 3$.

là, $f(x) = 0$

De gauche à droite : au-dessous, au-dessus, au-dessous, au-dessus.

signes $-$ puis $+$ puis $-$ puis $+$

x	-4	-3	1	3	4		
$f(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

Signe de g

$\mathcal{C}_g$ coupe l'axe en $x = 2$; au-dessus avant, au-dessous après.

la droite descend

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$g(x)$	+	0	-

À vous de jouer

Dresser le tableau de signes des fonctions k et ℓ de la méthode 7 (droites (d_4) et (d_5)).

Réponses : k : $-$ avant 0, $+$ après ; ℓ : $+$ avant 1, $-$ après.

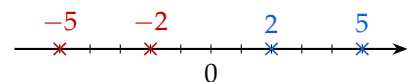
► **À faire** : fiche d'exercices du chapitre, exercices 27 à 29.

VIII — Propriétés des inégalités, encadrer une quantité

Propriété 4 — Opérations sur les inégalités

Soit $a < b$, et c un nombre.

- Ajouter ou soustraire c **conserve** le sens : $a + c < b + c$ et $a - c < b - c$.
Exemple : $2 < 5$, donc $2 + 3 < 5 + 3$, soit $5 < 8$.
- Multiplier ou diviser par $c > 0$ **conserve** le sens :
 $a \times c < b \times c$.
Exemple : $2 < 5$, donc $2 \times 4 < 5 \times 4$, soit $8 < 20$.
- Multiplier ou diviser par $c < 0$ **change** le sens :
 $a \times c > b \times c$.
Exemple : $2 < 5$, donc $2 \times (-3) > 5 \times (-3)$, soit $-6 > -15$.



$2 < 5$, mais $-2 > -5$:
multiplier par -1 renverse l'ordre

Méthode 10 — Encadrer une quantité

Exemples corrigés

On sait que $2 \leq x \leq 5$. Encadrer chaque expression A , B .

a) $A = 3x - 1$

b) $B = -2x + 4$

a)

$$2 \leq x \leq 5 \quad \text{on recopie l'encadrement}$$

$$6 \leq 3x \leq 15 \quad \text{on multiplie par } 3 > 0 : \text{ même sens}$$

$$5 \leq 3x - 1 \leq 14 \quad \text{on enlève 1}$$

$$5 \leq A \leq 14.$$

conclusion

b)

$$2 \leq x \leq 5 \quad \text{on recopie l'encadrement}$$

$$-4 \geq -2x \geq -10 \quad \text{on multiplie par } -2 < 0 : \text{ le sens change}$$

$$0 \geq -2x + 4 \geq -6 \quad \text{on ajoute 4}$$

$$-6 \leq B \leq 0.$$

on réécrit l'encadrement dans l'ordre croissant

À vous de jouer

On sait que $-1 \leq x \leq 3$. Encadrer $C = 4x + 2$, puis $D = 5 - x$.

Réponses : $-2 \leq C \leq 14$; $2 \leq D \leq 6$.

► **À faire** : fiche d'exercices du chapitre, exercices 30 à 32.

IX — Résoudre une inéquation du premier degré

Une inéquation du **premier degré** ne contient que des termes en x et des nombres. On la résout comme une équation, avec la propriété 4 : les x d'un côté, les nombres de l'autre, puis on divise par le coefficient de x , **en changeant le sens s'il est négatif**. On conclut par un intervalle.

Changer le sens, c'est remplacer $<$ par $>$, $>$ par $<$, $\leq$ par $\geq$ et $\geq$ par $\leq$. Exemple : $-2x < 6$ devient $x > -3$.

Méthode 11 — Résoudre une inéquation du premier degré

Exemples corrigés

Résoudre chaque inéquation.

a) $3x - 7 < 8$

b) $5 - 2x \geq 11$

c) $4x + 1 > 7x - 8$

a)

$3x - 7 < 8$ on recopie l'inéquation

$3x < 15$ on ajoute 7

$x < 5$ on divise par $3 > 0$: même sens

$S =]-\infty; 5[.$

inégalité stricte : 5 exclu

b)

$5 - 2x \geq 11$ on recopie l'inéquation

$-2x \geq 6$ on enlève 5

$x \leq -3$ on divise par $-2 < 0$: le sens change

$S =]-\infty; -3].$

« $\leq$ » : -3 compris

c)

$4x + 1 > 7x - 8$ on recopie l'inéquation

$4x - 7x > -8 - 1$ les x à gauche, les nombres à droite

$-3x > -9$ on réduit

$x < 3$ on divise par $-3 < 0$: le sens change

$S =]-\infty; 3[.$

contrôle avec $x = 0$: $1 > -8$ est vrai

À vous de jouer

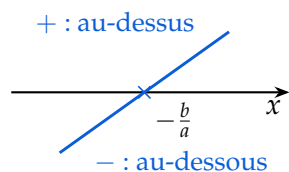
Résoudre $2x + 9 \leq 1$, puis $6 - 3x > 0$, puis $5x - 4 \geq 2x + 11$.Réponses : $S =]-\infty; -4]$; $S =]-\infty; 2[$; $S = [5; +\infty[$.

► À faire : fiche d'exercices du chapitre, exercices 33 à 36.

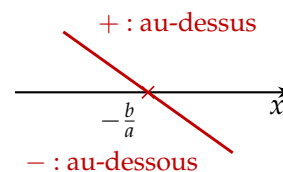
X — Signe d'une fonction affine par le calcul

Propriété 5 — Signe de $ax + b$ Soit $f(x) = ax + b$ avec $a \neq 0$. On trouve d'abord la valeur qui annule $f(x)$, en résolvant $ax + b = 0$; le signe de a donne ensuite l'ordre des signes : $a > 0$: droite qui monte

x	$-\infty$	$-\frac{b}{a}$	$+\infty$
$ax + b$	-	0	+

 $a < 0$: droite qui descend

x	$-\infty$	$-\frac{b}{a}$	$+\infty$
$ax + b$	+	0	-



Pourquoi ? Pour $a > 0$, on résout $ax + b > 0$ (méthode 11) :

$$ax + b > 0 \quad f(x) \text{ strictement positif}$$

$$ax > -b \quad \text{on enlève } b$$

$$x > -\frac{b}{a} \quad \text{on divise par } a > 0 : \text{ même sens}$$

Donc + après $-\frac{b}{a}$. Pour $a < 0$, la division change le sens : + avant $-\frac{b}{a}$.

Méthode 12 — Dresser le tableau de signes de $ax + b$

Exemples corrigés

Dresser le tableau de signes de chaque expression A , B .

a) $A(x) = 3x - 12$

b) $B(x) = -2x + 5$

a)

$$3x - 12 = 0 \quad \text{valeur qui annule } A(x)$$

$$3x = 12 \quad \text{on ajoute 12}$$

$$x = 4 \quad \text{on divise par 3}$$

$a = 3 > 0$: - avant 4, + après.

propriété 5 : la droite monte

x	$-\infty$	4	$+\infty$
$3x - 12$	-	0	+

b)

$$-2x + 5 = 0 \quad \text{valeur qui annule } B(x)$$

$$-2x = -5 \quad \text{on enlève 5}$$

$$x = \frac{5}{2} \quad \text{on divise par } -2$$

$a = -2 < 0$: + avant $\frac{5}{2}$, - après.

la droite descend

x	$-\infty$	$\frac{5}{2}$	$+\infty$
$-2x + 5$	+	0	-

À vous de jouer

Dresser le tableau de signes de chaque expression C , D , E :

$$C(x) = 5x + 10 \quad D(x) = 6 - 4x \quad E(x) = \frac{1}{2}x - 3$$

Réponses : C : - avant -2 , + après ; D : + avant $\frac{3}{2}$, - après ; E : - avant 6, + après.

► **À faire** : fiche d'exercices du chapitre, exercices 37 à 40.

XI — Inéquations produit

Propriété 6 — Signe d'un produit

Le signe d'un produit suit la **règle des signes** : deux facteurs de même signe donnent un produit positif, deux facteurs de signes contraires un produit négatif.

Dans un tableau de signes, on met une ligne par facteur, puis une dernière ligne pour le produit ; un 0 dans une colonne donne un 0 au produit.

Méthode 13 — Résoudre une inéquation produit

Exemples corrigés

Résoudre chaque inéquation.

a) $(x - 3)(2x + 4) < 0$

b) $(5 - x)(3x + 3) \geq 0$

a)

On cherche les x pour lesquels le produit $(x - 3)(2x + 4)$ est **négatif** : on étudie son signe.

$x - 3 = 0$ pour $x = 3$; $a = 1 > 0$: $-$ puis $+$.

« < 0 » veut dire « strictement négatif »

signe du premier facteur

$$2x + 4 = 0 \quad \text{second facteur}$$

$$2x = -4$$

$$x = -2 \quad a = 2 > 0 : - \text{ puis } +$$

Valeurs rangées dans l'ordre : -2 puis 3 .

première ligne du tableau

x	$-\infty$	-2	3	$+\infty$
$x - 3$	$-$	$-$	0	$+$
$2x + 4$	$-$	0	$+$	$+$
$(x - 3)(2x + 4)$	$+$	0	$-$	$+$

$$S =]-2; 3[.$$

on lit les signes $-$; inégalité stricte : -2 et 3 exclus

b)

On cherche les x pour lesquels le produit est **positif ou nul**.

« ≥ 0 » veut dire « positif ou nul »

$$5 - x = 0 \quad \text{premier facteur}$$

$$x = 5 \quad a = -1 < 0 : + \text{ puis } -$$

$$3x + 3 = 0 \quad \text{second facteur}$$

$$3x = -3$$

$$x = -1 \quad a = 3 > 0 : - \text{ puis } +$$

x	$-\infty$	-1	5	$+\infty$
$5 - x$	+	+	0	-
$3x + 3$	-	0	+	+
$(5 - x)(3x + 3)$	-	0	+	-

$$S = [-1; 5].$$

on lit les signes + ; « $\geq$ » : les 0 sont compris

À vous de jouer

Résoudre $(2x - 6)(x + 1) \leq 0$, puis $x(4 - x) > 0$.

Réponses : $S = [-1; 3]$; $S =]0; 4[$.

► **À faire** : fiche d'exercices du chapitre, exercices 41 à 43.

XII — Inéquations quotient

Propriété 7 — Signe d'un quotient

Un quotient suit la même règle des signes qu'un produit. Le dénominateur ne peut pas être nul : la valeur qui l'annule est une **valeur interdite**. Dans le tableau, on la marque d'une **double barre**, et elle n'est jamais solution.

Méthode 14 — Résoudre une inéquation quotient

Exemples corrigés

Résoudre chaque inéquation.

a) $\frac{3x - 6}{x + 1} \geq 0$

b) $\frac{4 - 2x}{x + 3} > 0$

a)

Valeur interdite : $x + 1 = 0$ pour $x = -1$.

dénominateur nul

$3x - 6 = 0$ pour $x = 2$; $a = 3 > 0$: - puis +.

$$3x = 6$$

$x + 1 : a = 1 > 0$: - puis +.

signe du dénominateur

x	$-\infty$	-1	2	$+\infty$
$3x - 6$	-	-	0	+
$x + 1$	-	0	+	+
$\frac{3x - 6}{x + 1}$	+	-	0	+

$$S =]-\infty; -1[\cup [2; +\infty[.$$

signes + ; 2 compris ($\geq$) ; -1 exclu (interdite)

b)

Valeur interdite : $x + 3 = 0$ pour $x = -3$.

dénominateur nul

$4 - 2x = 0$ pour $x = 2$; $a = -2 < 0$: + puis -.

$$-2x = -4$$

x	$-\infty$	-3	2	$+\infty$
$4 - 2x$	+	+	0	-
$x + 3$	-	0	+	+
$\frac{4 - 2x}{x + 3}$	-	+	0	-

$$S =]-3; 2[.$$

signes + ; inégalité stricte

À vous de jouer

Résoudre $\frac{x-5}{x+2} \leq 0$, puis $\frac{2x+1}{3-x} \geq 0$.

Réponses : $S =]-2; 5]$; $S = [-\frac{1}{2}; 3[$.

► **À faire** : fiche d'exercices du chapitre, exercices 44 à 46.

XIII — Inéquations avancées

Le tableau de signes ne sert qu'à comparer un produit ou un quotient à 0. Sinon, on s'y ramène : on passe tout dans le membre de gauche, puis on factorise ou on met au même dénominateur.

Méthode 15 — Se ramener à une comparaison avec 0

Exemples corrigés

Résoudre chaque inéquation.

a) $x^2 \geq 5x$

b) $\frac{x+4}{x-2} \leq 3$

a)

$$x^2 \geq 5x \quad \text{on recopie l'inéquation}$$

$$x^2 - 5x \geq 0 \quad \text{on passe } 5x \text{ à gauche}$$

$$x(x-5) \geq 0 \quad \text{facteur commun } x$$

x s'annule en 0, $x-5$ en 5 ; tous deux : - puis +.

coefficients de x positifs

x	$-\infty$	0	5	$+\infty$
x	-	0	+	+
$x-5$	-	-	0	+
$x(x-5)$	+	0	-	+

$$S =]-\infty; 0] \cup [5; +\infty[.$$

signes + et les 0 ; diviser par x aurait perdu des solutions

b)

Valeur interdite : $x = 2$.

$$x - 2 = 0$$

$$\frac{x+4}{x-2} - 3 \leq 0 \quad \text{on passe 3 à gauche}$$

$$\frac{x+4}{x-2} - \frac{3 \times (x-2)}{1 \times (x-2)} \leq 0 \quad \text{même dénominateur}$$

$$\frac{x+4-3x+6}{x-2} \leq 0 \quad \text{attention au signe - devant la fraction}$$

$$\frac{-2x+10}{x-2} \leq 0 \quad \text{on réduit}$$

$$-2x+10=0 \text{ pour } x=5; a=-2 < 0 : + \text{ puis } -.$$

$$x-2 : - \text{ puis } +$$

x	$-\infty$	2	5	$+\infty$
$-2x+10$	+	+	0	-
$x-2$	-	0	+	+
$\frac{-2x+10}{x-2}$	-	+	0	-

$$S =]-\infty; 2[\cup [5; +\infty[.$$

signes - ; 5 compris ; 2 interdit

À vous de jouer

$$\text{Résoudre } (x+2)^2 < 9, \text{ puis } \frac{6}{x+1} \geq 2.$$

$$\text{Réponses : } (x-1)(x+5) < 0, S =]-5; 1[; \frac{4-2x}{x+1} \geq 0, S =]-1; 2].$$

► **À faire** : fiche d'exercices du chapitre, exercices 47 à 50.

XIV — Problèmes d'inéquations

Méthode 16 — Résoudre un problème avec une inéquation

Exemples corrigés

Pour une fête, la salle A coûte 200 € plus 15 € par invité; la salle B coûte 50 € plus 20 € par invité. On note x le nombre d'invités.

- Exprimer les prix $A(x)$ et $B(x)$ des deux salles.
- Traduire « la salle A est moins chère que la salle B » par une inéquation.
- Résoudre cette inéquation.
- Conclure par une phrase.

a) $A(x) = 15x + 200$ et $B(x) = 20x + 50$. prix par invité fois x , plus le prix fixe

b) $A(x) < B(x)$, soit $15x + 200 < 20x + 50$. « moins cher » : strictement inférieur

c)

$$15x + 200 < 20x + 50 \quad \text{on recopie l'inéquation}$$

$$15x - 20x < 50 - 200 \quad \text{les } x \text{ à gauche, les nombres à droite}$$

$$-5x < -150 \quad \text{on réduit}$$

$$x > 30 \quad \text{on divise par } -5 < 0 : \text{le sens change}$$

d)

La salle A est moins chère à partir de 31 invités.

x est un nombre entier ; pour 30 invités, les prix sont égaux

À vous de jouer

Le taxi A facture 4 € de prise en charge, puis 1,50 € par kilomètre; le taxi B facture 10 € de prise en charge, puis 1 € par kilomètre. On note x la distance parcourue, en km.

1°) Exprimer les prix $A(x)$ et $B(x)$ des deux taxis.

2°) Traduire « le taxi A est moins cher que le taxi B » par une inéquation.

3°) Résoudre cette inéquation.

4°) Conclure par une phrase.

Réponses : 1°) $A(x) = 1,5x + 4$ et $B(x) = x + 10$; 2°) $1,5x + 4 < x + 10$; 3°) $x < 12$; 4°) le taxi A est moins cher pour moins de 12 km.

► **À faire** : fiche d'exercices du chapitre, exercices 51 à 53.