

VARIATIONS, SIGNE ET INÉQUATIONS

Cours — Seconde

Version élève

Comment utiliser ce cours

Chaque partie commence par ce qu'il faut **savoir** (définitions, propriétés), puis vient ce qu'il faut **savoir faire** : une méthode, avec des **exemples** faits en classe, puis des exercices « **À vous de jouer** » à chercher seul.

Sur cette feuille, seuls les **énoncés** des exemples figurent : la résolution, signalée par la mention *(au tableau)*, est à rédiger dans le cahier.

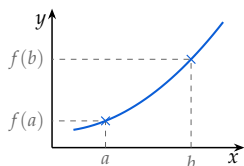
I — Fonction croissante, fonction décroissante

Une courbe se lit comme le profil d'une étape de montagne du Tour de France : en la parcourant **de gauche à droite**, on monte ou on descend.

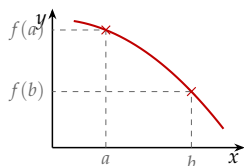
Définition 1 — Fonction croissante, décroissante, constante

Soit f une fonction définie sur un intervalle I .

- f est **croissante** sur I si, quand x augmente, $f(x)$ augmente : pour tous nombres a et b de I , si $a < b$ alors $f(a) \leq f(b)$. Sa courbe **monte**.
- f est **décroissante** sur I si, quand x augmente, $f(x)$ diminue : si $a < b$ alors $f(a) \geq f(b)$. Sa courbe **descend**.
- f est **constante** sur I si $f(x)$ garde toujours la même valeur. Sa courbe est horizontale.



croissante : $a < b$ et $f(a) \leq f(b)$



décroissante : $a < b$ et $f(a) \geq f(b)$

Une fonction croissante conserve l'ordre ; une fonction décroissante renverse l'ordre.

Exemple : $2 < 7$. Si f est croissante sur $[0; 10]$, alors $f(2) \leq f(7)$; si g est décroissante sur $[0; 10]$, alors $g(2) \geq g(7)$.

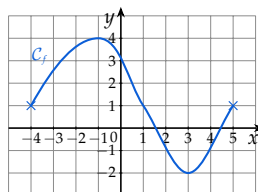
Donner les **variations** de f , c'est dire sur quels intervalles elle est croissante et sur lesquels elle est décroissante.

Méthode 1 — Lire les variations d'une fonction sur sa courbe

Exemples

La fonction f est représentée ci-contre par sa courbe C_f .

- Sur quel intervalle la fonction f est-elle définie ?
- Sur quels intervalles f est-elle croissante ? décroissante ?

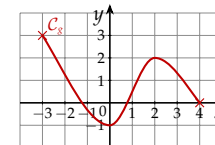


(au tableau)

À vous de jouer

La fonction g est représentée ci-contre par sa courbe C_g .

- Sur quel intervalle la fonction g est-elle définie ?
- Donner les variations de g .



► **À faire** : fiche d'exercices du chapitre, exercices 1 à 6.

II — Maximum, minimum

Définition 2 — Maximum, minimum

Soit f une fonction définie sur un intervalle I , et a un nombre de I .

- f admet un **maximum** M en a si $f(a) = M$ et si, pour tout x de I , $f(x) \leq M$: c'est la plus grande image, au point le plus haut de la courbe.
- f admet un **minimum** m en a si $f(a) = m$ et si, pour tout x de I , $f(x) \geq m$: c'est la plus petite image, au point le plus bas.

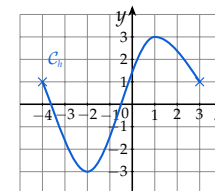
Un maximum ou un minimum s'appelle un **extremum**. On dit qu'il est **atteint** en a .

Méthode 2 — Lire les extremums d'une fonction sur sa courbe

Exemples

La fonction h , définie sur $[-4; 3]$, est représentée ci-contre par sa courbe C_h .

- Donner le maximum et le minimum de h sur $[-4; 3]$, et où ils sont atteints.
- Même question sur l'intervalle $[1; 3]$ seulement.



(au tableau)

À vous de jouer

Donner le maximum et le minimum de la fonction g de la méthode 1 sur $[-3; 4]$, et où ils sont atteints.

► **À faire** : fiche d'exercices du chapitre, exercices 7 à 9.

III — Tableau de variations

Définition 3 — Tableau de variations

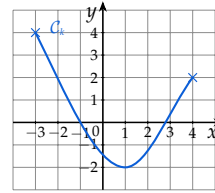
Le **tableau de variations** d'une fonction résume ses variations :

- sur la première ligne, les valeurs de x : les bornes de l'intervalle de définition et les valeurs où le sens de variation change ;
- sur la seconde ligne, une flèche qui monte (fonction croissante) ou qui descend (fonction décroissante), avec les images au bout des flèches.

Méthode 3 — Dresser le tableau de variations à partir de la courbe

Exemples

La fonction k , définie sur $[-3; 4]$, est représentée ci-contre par sa courbe C_k . Dresser son tableau de variations.



(au tableau)

À vous de jouer

Dresser le tableau de variations de la fonction g de la méthode 1.

Méthode 4 — Exploiter un tableau de variations

Exemples

La fonction s a le tableau de variations ci-contre.

- Comparer $s(-4)$ et $s(-2)$.
- Comparer $s(0)$ et $s(3)$.
- Donner le maximum et le minimum de s .

x	-5	-1	4	6
$s(x)$		7		0
	2		-3	

(au tableau)

À vous de jouer

La fonction t a le tableau de variations ci-contre.

- Comparer $t(-2)$ et $t(0)$, puis $t(2)$ et $t(4)$.
- Donner le maximum et le minimum de t .

x	-3	1	5
$t(x)$		5	
	-1		2

► À faire : fiche d'exercices du chapitre, exercices 10 à 14.

IV — Fonctions affines et linéaires

Définition 4 — Fonction affine, fonction linéaire

Une fonction f est **affine** s'il existe deux nombres a et b tels que, pour tout x de $\mathbb{R}$:

$$f(x) = ax + b$$

- Si $b = 0$, $f(x) = ax$: f est **linéaire** (elle traduit une situation de proportionnalité).
- Si $a = 0$, $f(x) = b$: f est **constante**.

Propriété 1 — Droite représentative

La courbe d'une fonction affine $f(x) = ax + b$ est une **droite** :

- b est l'**ordonnée à l'origine** : la droite coupe l'axe des ordonnées au point $(0; b)$;
- a est le **coefficient directeur** : quand x augmente de 1, y augmente de a (ou diminue, si a est négatif).

La droite d'une fonction linéaire passe par l'origine du repère.

Propriété 2 — Variations d'une fonction affine

Soit $f(x) = ax + b$ une fonction affine.

- Si $a > 0$, f est croissante sur $\mathbb{R}$.

- Si $a < 0$, f est décroissante sur $\mathbb{R}$.
- Si $a = 0$, f est constante sur $\mathbb{R}$.

Démonstration

(au tableau)

Méthode 5 — Reconnaître une fonction affine et donner ses variations

Exemples

Pour chaque fonction f, g, h , dire si elle est affine ; si oui, donner a, b et ses variations.

- $f(x) = 5 - 3x$
- $g(x) = (x + 2)^2 - x^2$
- $h(x) = x(x + 1)$

À vous de jouer

Même consigne pour les fonctions p, q et r :

$$p(x) = 2(x - 3) + x \quad q(x) = -\frac{x}{2} \quad r(x) = (x - 1)^2 - (x + 1)^2$$

Méthode 6 — Tracer la droite d'une fonction affine

Exemples

Dans un même repère, tracer les droites représentant les fonctions $f(x) = 2x - 3$ et $g(x) = -\frac{1}{2}x + 1$.

À vous de jouer

Tracer les droites représentant $h(x) = -x + 2$ et $k(x) = \frac{1}{3}x - 1$.

► À faire : fiche d'exercices du chapitre, exercices 15 à 19.

V — Fonction affine par lecture graphique

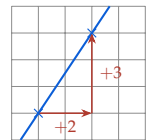
Lire le coefficient directeur a

On part d'un point de la droite situé sur un nœud du quadrillage et on va, vers la droite, jusqu'à un autre nœud de la droite :

$$a = \frac{\text{déplacement vertical}}{\text{déplacement horizontal}}$$

Le déplacement vertical est **positif** si l'on monte, **négatif** si l'on descend. Ci-contre : on avance de 2 et on monte de 3, donc

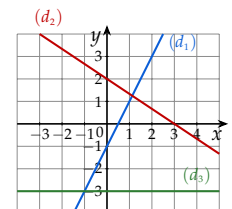
$$a = \frac{3}{2}.$$



Méthode 7 — Retrouver l'expression d'une fonction affine sur sa droite

Exemples

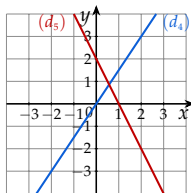
Les droites (d_1) , (d_2) et (d_3) représentent trois fonctions affines f, g et h . Donner l'expression de chacune.



(au tableau)

À vous de jouer

Les droites (d_4) et (d_5) représentent deux fonctions affines k et ℓ . Donner l'expression de chacune.



► À faire : fiche d'exercices du chapitre, exercices 20 à 22.

VI — Fonction affine passant par deux points

Propriété 3 — Coefficient directeur

Si $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$ sont deux points de la droite d'une fonction affine $f(x) = ax + b$, avec $x_A \neq x_B$, alors :

$$a = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} \quad (\text{différence des ordonnées sur différence des abscisses})$$

Démonstration

(au tableau)

Méthode 8 — Trouver la fonction affine qui passe par deux points

Exemples

- Trouver la fonction affine f telle que $f(1) = 5$ et $f(3) = -1$.
- Une course de taxi de 4 km coûte 11 € ; une course de 10 km coûte 20 €. Le prix est une fonction affine p de la distance x (en km). Trouver $p(x)$.

À vous de jouer

- Trouver la fonction affine f telle que $f(-1) = 6$ et $f(3) = -2$.
- Trouver la fonction affine g dont la droite passe par $A(-2; 0)$ et $B(4; 3)$.

► À faire : fiche d'exercices du chapitre, exercices 23 à 26.

VII — Signe d'une fonction par lecture graphique

Définition 5 — Signe d'une fonction, tableau de signes

Étudier le **signe** d'une fonction f , c'est trouver pour quels x :

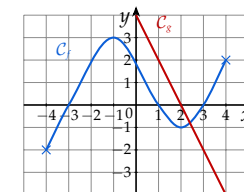
- $f(x) > 0$: la courbe est **au-dessus** de l'axe des abscisses ;
- $f(x) < 0$: la courbe est **au-dessous** de l'axe des abscisses ;
- $f(x) = 0$: la courbe **coupe** l'axe des abscisses.

On le résume dans un **tableau de signes** : les valeurs de x sur la première ligne, les signes $+$ ou $-$ et les 0 sur la seconde.

Méthode 9 — Lire le signe d'une fonction sur sa courbe

Exemples

La courbe C_f représente une fonction f définie sur $[-4; 4]$; la droite C_g représente une fonction affine g définie sur $\mathbb{R}$. Dresser le tableau de signes de f , puis celui de g .



(au tableau)

À vous de jouer

Dresser le tableau de signes des fonctions k et ℓ de la méthode 7 (droites (d_4) et (d_5)).

► À faire : fiche d'exercices du chapitre, exercices 27 à 29.

VIII — Propriétés des inégalités, encadrer une quantité

Propriété 4 — Opérations sur les inégalités

Soit $a < b$, et c un nombre.

- Ajouter ou soustraire c **conserve** le sens : $a + c < b + c$ et $a - c < b - c$.

Exemple : $2 < 5$, donc $2 + 3 < 5 + 3$, soit $5 < 8$.

- Multiplier ou diviser par $c > 0$ **conserve** le sens :

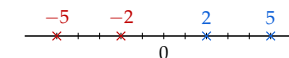
$$a \times c < b \times c.$$

Exemple : $2 < 5$, donc $2 \times 4 < 5 \times 4$, soit $8 < 20$.

- Multiplier ou diviser par $c < 0$ **change** le sens :

$$a \times c > b \times c.$$

Exemple : $2 < 5$, donc $2 \times (-3) > 5 \times (-3)$, soit $-6 > -15$.



$2 < 5$, mais $-2 > -5$:
multiplier par -1 renverse l'ordre

Méthode 10 — Encadrer une quantité

Exemples

On sait que $2 \leq x \leq 5$. Encadrer chaque expression A , B .

- $A = 3x - 1$
- $B = -2x + 4$

À vous de jouer

On sait que $-1 \leq x \leq 3$. Encadrer $C = 4x + 2$, puis $D = 5 - x$.

► À faire : fiche d'exercices du chapitre, exercices 30 à 32.

IX — Résoudre une inéquation du premier degré

Une inéquation du **premier degré** ne contient que des termes en x et des nombres. On la résout comme une équation, avec la propriété 4 : les x d'un côté, les nombres de l'autre, puis on divise par le coefficient de x , **en changeant le sens s'il est négatif**. On conclut par un intervalle.

Changer le sens, c'est remplacer $<$ par $>$, $>$ par $<$, $\leq$ par $\geq$ et $\geq$ par $\leq$. Exemple : $-2x < 6$ devient $x > -3$.

Méthode 11 — Résoudre une inéquation du premier degré

Exemples

Résoudre chaque inéquation.

a) $3x - 7 < 8$

b) $5 - 2x \geq 11$

c) $4x + 1 > 7x - 8$

À vous de jouer

Résoudre $2x + 9 \leq 1$, puis $6 - 3x > 0$, puis $5x - 4 \geq 2x + 11$.

► À faire : fiche d'exercices du chapitre, exercices 33 à 36.

X — Signe d'une fonction affine par le calcul

Propriété 5 — Signe de $ax + b$

Soit $f(x) = ax + b$ avec $a \neq 0$. On trouve d'abord la valeur qui annule $f(x)$, en résolvant $ax + b = 0$; le signe de a donne ensuite l'ordre des signes :

$a > 0$: droite qui monte

x	$-\infty$	$-\frac{b}{a}$	$+\infty$
$ax + b$	$-$	0	$+$

$+$: au-dessus

$-\frac{b}{a}$ x

$-$: au-dessous

$a < 0$: droite qui descend

x	$-\infty$	$-\frac{b}{a}$	$+\infty$
$ax + b$	$+$	0	$-$

$+$: au-dessus

$-\frac{b}{a}$ x

$-$: au-dessous

Pourquoi? Pour $a > 0$, on résout $ax + b > 0$ (méthode 11) :

$ax + b > 0$ $f(x)$ strictement positif

$ax > -b$ on enlève b

$x > -\frac{b}{a}$ on divise par $a > 0$: même sens

Donc $+$ après $-\frac{b}{a}$. Pour $a < 0$, la division change le sens : $+$ avant $-\frac{b}{a}$.

Méthode 12 — Dresser le tableau de signes de $ax + b$

Exemples

Dresser le tableau de signes de chaque expression A, B .

a) $A(x) = 3x - 12$

b) $B(x) = -2x + 5$

À vous de jouer

Dresser le tableau de signes de chaque expression C, D, E :

$C(x) = 5x + 10$ $D(x) = 6 - 4x$ $E(x) = \frac{1}{2}x - 3$

► À faire : fiche d'exercices du chapitre, exercices 37 à 40.

XI — Inéquations produit

Propriété 6 — Signe d'un produit

Le signe d'un produit suit la **règle des signes** : deux facteurs de même signe donnent un produit positif, deux facteurs de signes contraires un produit négatif.

Dans un tableau de signes, on met une ligne par facteur, puis une dernière ligne pour le produit; un 0 dans une colonne donne un 0 au produit.

Méthode 13 — Résoudre une inéquation produit

Exemples

Résoudre chaque inéquation.

a) $(x - 3)(2x + 4) < 0$

b) $(5 - x)(3x + 3) \geq 0$

À vous de jouer

Résoudre $(2x - 6)(x + 1) \leq 0$, puis $x(4 - x) > 0$.

► À faire : fiche d'exercices du chapitre, exercices 41 à 43.

XII — Inéquations quotient

Propriété 7 — Signe d'un quotient

Un quotient suit la même règle des signes qu'un produit. Le dénominateur ne peut pas être nul : la valeur qui l'annule est une **valeur interdite**. Dans le tableau, on la marque d'une **double barre**, et elle n'est jamais solution.

Méthode 14 — Résoudre une inéquation quotient

Exemples

Résoudre chaque inéquation.

a) $\frac{3x - 6}{x + 1} \geq 0$

b) $\frac{4 - 2x}{x + 3} > 0$

À vous de jouer

Résoudre $\frac{x - 5}{x + 2} \leq 0$, puis $\frac{2x + 1}{3 - x} \geq 0$.

► À faire : fiche d'exercices du chapitre, exercices 44 à 46.

XIII — Inéquations avancées

Le tableau de signes ne sert qu'à comparer un produit ou un quotient à 0. Sinon, on s'y ramène : on passe tout dans le membre de gauche, puis on factorise ou on met au même dénominateur.

Méthode 15 — Se ramener à une comparaison avec 0

Exemples

Résoudre chaque inéquation.

a) $x^2 \geq 5x$

b) $\frac{x+4}{x-2} \leq 3$

À vous de jouer

Résoudre $(x+2)^2 < 9$, puis $\frac{6}{x+1} \geq 2$.

► À faire : fiche d’exercices du chapitre, exercices 47 à 50.

XIV — Problèmes d’inéquations

Méthode 16 — Résoudre un problème avec une inéquation

Exemples

(au tableau)

Pour une fête, la salle A coûte 200 € plus 15 € par invité ; la salle B coûte 50 € plus 20 € par invité. On note x le nombre d’invités.

a) Exprimer les prix $A(x)$ et $B(x)$ des deux salles.

b) Traduire « la salle A est moins chère que la salle B » par une inéquation.

c) Résoudre cette inéquation.

d) Conclure par une phrase.

À vous de jouer

Le taxi A facture 4 € de prise en charge, puis 1,50 € par kilomètre ; le taxi B facture 10 € de prise en charge, puis 1 € par kilomètre. On note x la distance parcourue, en km.

1°) Exprimer les prix $A(x)$ et $B(x)$ des deux taxis.

2°) Traduire « le taxi A est moins cher que le taxi B » par une inéquation.

3°) Résoudre cette inéquation.

4°) Conclure par une phrase.

► À faire : fiche d’exercices du chapitre, exercices 51 à 53.