

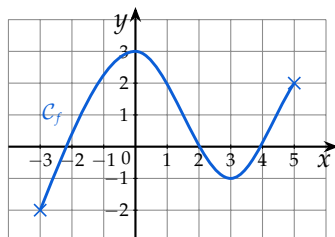
Seconde — Variations, signe et inéquations

Fiche d'exercices du chapitre

I — Fonction croissante, fonction décroissante

Exercice 1 : Lire les variations

La courbe C_f d'une fonction f est tracée ci-dessous.



1. Sur quel intervalle f est-elle définie ?
2. Sur quels intervalles f est-elle croissante ? décroissante ?

Exercice 2 : Une randonnée

À 8 h, Inès quitte le parking (altitude 1 200 m) et monte jusqu'à un refuge, qu'elle atteint à 11 h. Elle s'y repose jusqu'à 12 h, puis redescend au parking, où elle arrive à 15 h. On note $f(t)$ son altitude à l'heure t , pour t dans $[8; 15]$.

1. Sur quels intervalles f est-elle croissante ? constante ? décroissante ?
2. Comparer $f(9)$ et $f(10)$, puis $f(13)$ et $f(14)$.

Exercice 3 : Comparer des images

1. g est une fonction définie sur $\mathbb{R}$. Comparer $g(2)$ et $g(5)$ lorsque : a) g est croissante ; b) g est décroissante ; c) g est constante.
2. f est croissante sur $[-5; 5]$. Comparer $f(-4)$ et $f(-1)$.

Exercice 4 : Conserver ou renverser l'ordre

La fonction f est croissante sur $[0; 10]$; la fonction g est décroissante sur $[0; 10]$.

1. Ranger $f(1)$, $f(3)$, $f(4)$ et $f(8)$ dans l'ordre croissant.
2. Ranger $g(1)$, $g(3)$, $g(4)$ et $g(8)$ dans l'ordre croissant.
3. Recopier et compléter : « Une fonction croissante ... l'ordre ; une fonction décroissante ... l'ordre. »
4. On sait que $f(a) < f(b)$. Peut-on avoir $a > b$? Justifier.

Exercice 5 : Tracer une courbe

Dans un repère, tracer une courbe passant par $A(0; 1)$ et $B(6; 3)$ et pouvant représenter une fonction f définie sur $[0; 6]$:

1. croissante sur $[0; 6]$;
2. décroissante sur $[0; 2]$, puis croissante sur $[2; 6]$.

Exercice 6 : Vrai ou faux

Dire si chaque affirmation est vraie ou fausse, puis justifier (une courbe peut servir de contre-exemple).

1. Si f est croissante sur $[0; 10]$, alors elle est croissante sur $[2; 5]$.
2. Si $f(1) < f(4)$, alors f est croissante sur $[1; 4]$.
3. Si f n'est pas croissante sur $[0; 5]$, alors elle est décroissante sur $[0; 5]$.

II — Maximum, minimum

Exercice 7 : Lire des extremums

On reprend la fonction f de l'exercice 1. Donner son maximum et son minimum, et où ils sont atteints :

1. sur $[-3; 5]$;
2. sur $[0; 5]$;
3. sur $[3; 5]$.

Exercice 8 : Tracer à partir d'une description

Une fonction f est définie sur $[-2; 6]$. Elle est croissante sur $[-2; 1]$, décroissante sur $[1; 4]$ et croissante sur $[4; 6]$; son maximum est 4, atteint en 1, et son minimum est -3 , atteint en 4. De plus, $f(-2) = 0$ et $f(6) = 2$.

1. Placer dans un repère les points connus de la courbe, puis tracer une courbe pouvant représenter f .
2. Donner le maximum et le minimum de f sur $[4; 6]$.

Exercice 9 : Les marées

Un jour de grande marée, à Saint-Malo, la mer est haute à 2 h (hauteur d'eau 12 m), basse à 8 h (2 m), haute à 14 h (13 m) et basse à 20 h (1 m). Entre deux de ces instants, la hauteur varie toujours dans le même sens. On note $f(t)$ la hauteur d'eau (en m) à l'heure t , pour t dans $[2; 20]$.

1. Donner les variations de f .
2. Donner le maximum et le minimum de f sur $[2; 20]$, puis sur $[2; 8]$, et à quelle heure ils sont atteints.
3. Tracer une courbe pouvant représenter f : en abscisse, l'heure de 0 à 20 (1 carreau pour 2 h) ; en ordonnée, la hauteur de 0 à 14 m (1 carreau pour 1 m). Placer d'abord les quatre points connus.

III — Tableau de variations

Exercice 10 : De la courbe au tableau

Dresser le tableau de variations de la fonction f de l'exercice 1.

Exercice 11 : Du tableau à la courbe

Une fonction g a le tableau de variations ci-dessous.

x	-4	-1	2	5
$g(x)$	2		3	-1
		↘	↗	↘
			-3	

1. Sur quel intervalle g est-elle définie ?
2. Décrire ses variations par des phrases.
3. Tracer, dans un repère, une courbe pouvant représenter g .

Exercice 12 : Exploiter un tableau

Une fonction k a le tableau de variations ci-dessous.

x	-5	-1	4
$k(x)$		4	0
	↗	↘	
	-2		

1. Comparer $k(-4)$ et $k(-2)$, puis $k(1)$ et $k(3)$.
2. Expliquer pourquoi on ne peut pas comparer $k(-3)$ et $k(2)$.
3. Donner le maximum et le minimum de k .

Exercice 13 : Extremums et tableau

Une fonction h a le tableau de variations ci-dessous.

x	-4	0	3	6
$h(x)$		5		1
	↗	↘	↗	
	2		-3	

1. Donner le maximum et le minimum de h sur $[-4; 6]$, sur $[-4; 0]$, puis sur $[3; 6]$, et où ils sont atteints.
2. Donner deux nombres m et M tels que $m \leq h(x) \leq M$ pour tout x de $[-4; 6]$.

Exercice 14 : D'une description au tableau

Une fonction f est définie sur $[-3; 6]$; elle est décroissante sur $[-3; 1]$, croissante sur $[1; 4]$ et décroissante sur $[4; 6]$. De plus, $f(-3) = 5$, $f(1) = -2$, $f(4) = 3$ et $f(6) = 0$.

1. Dresser le tableau de variations de f .
2. Donner son maximum et son minimum.
3. Tracer, dans un repère, une courbe pouvant représenter f .

IV — Fonctions affines et linéaires

Exercice 15 : Reconnaître une fonction affine

Pour chaque fonction, dire si elle est affine; si oui, donner a et b , et préciser si elle est linéaire ou constante.

$$f(x) = 5x + 2$$

$$g(x) = 6 - 2x$$

$$h(x) = \frac{x}{3}$$

$$k(x) = -4$$

$$m(x) = x^2 + 3$$

$$p(x) = \frac{x-1}{2}$$

Exercice 16 : Développer d'abord

Développer et réduire, puis dire si la fonction est affine et donner ses variations.

$$f(x) = (x+3)^2 - x^2$$

$$g(x) = (2x-1)(x+2) - 2x^2$$

$$h(x) = (x+1)(x-1) - x(x+2)$$

Exercice 17 : Sens de variation

1. Donner le sens de variation de chaque fonction :

$$f(x) = -3x + 1$$

$$g(x) = 0,5x - 4$$

$$h(x) = 7$$

$$k(x) = 2 - \frac{x}{5}$$

2. Sans calcul, comparer $f(-2)$ et $f(3)$, puis $g(-2)$ et $g(3)$.

Exercice 18 : Tracer des droites

Dans un même repère, tracer les droites représentant les fonctions $f(x) = 2x - 1$, $g(x) = -x + 3$, $h(x) = \frac{1}{2}x + 1$ et $k(x) = -2$.

Exercice 19 : Deux formules d'abonnement

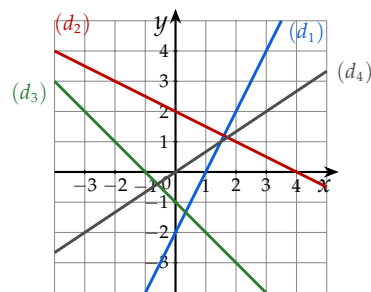
Une salle de sport propose deux formules mensuelles : A, 30 € par mois; B, 12 € par mois plus 3 € par séance. On note x le nombre de séances dans le mois, entre 0 et 10.

1. Exprimer les prix $A(x)$ et $B(x)$ en fonction de x .
2. Quelle est la nature de chaque fonction? Donner leurs variations.
3. Tracer leurs représentations dans un repère (1 carreau pour une séance en abscisse, 1 carreau pour 5 € en ordonnée).
4. Lire à partir de combien de séances la formule A est la moins chère.
5. Le confirmer en calculant $B(6)$.

V — Fonction affine par lecture graphique

Exercice 20 : Lire l'expression

Les droites (d_1) à (d_4) représentent des fonctions affines f_1 à f_4 .



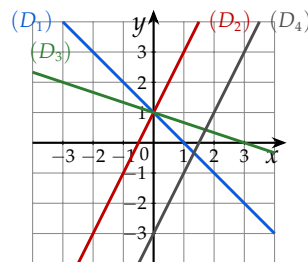
1. Donner l'expression de f_1 , f_2 , f_3 et f_4 .
2. Laquelle est linéaire?

Exercice 21 : Associer fonctions et droites

Associer chaque fonction à sa droite, en justifiant :

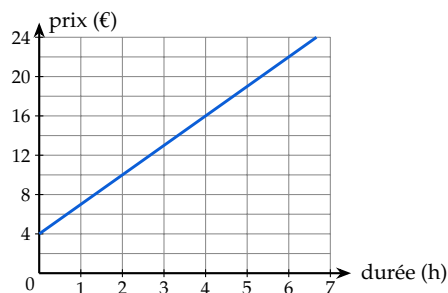
$$f(x) = 2x + 1, g(x) = 2x - 3, h(x) = -x + 1 \text{ et}$$

$$k(x) = -\frac{1}{3}x + 1.$$



Exercice 22 : Location de vélo

La droite ci-dessous donne le prix $p(x)$, en euros, de la location d'un vélo électrique pendant x heures.



1. Lire le prix pour 2 h de location.
2. Lire l'ordonnée à l'origine b . Que représente-t-elle?
3. Lire le coefficient directeur a . Que représente-t-il?
4. En déduire $p(x)$, puis calculer le prix pour 8 h.

VI — Fonction affine passant par deux points

Exercice 23 : Deux images connues

Trouver la fonction affine qui vérifie :

$$f(1) = 4 \text{ et } f(3) = 10$$

$$g(-2) = 7 \text{ et } g(2) = -1$$

$$h(0) = 5 \text{ et } h(4) = 3$$

$$k(-3) = -4 \text{ et } k(6) = 2$$

Exercice 24 : Droite passant par deux points

1. Trouver la fonction affine f dont la droite passe par $A(2; 1)$ et $B(6; 3)$. Que remarque-t-on?
2. Le point $E(10; 5)$ est-il sur la droite (AB) ?
3. Trouver la fonction affine g dont la droite passe par $C(-1; 5)$ et $D(2; -4)$.
4. Le point $F(3; -6)$ est-il sur la droite (CD) ?

Exercice 25 : Température

Un matin de printemps, il fait 6°C à 8 h et 18°C à 14 h. On admet que la température $T(h)$ est une fonction affine de l'heure h sur $[8; 14]$.

1. Donner $T(8)$ et $T(14)$, puis l'expression de $T(h)$.
2. Calculer la température à 11 h.
3. À quelle heure fait-il 14°C ?

Exercice 26 : Facture d'électricité

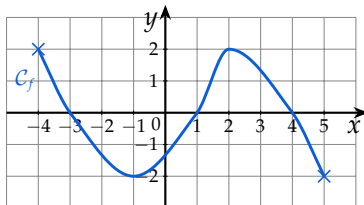
Une facture d'électricité est une fonction affine f de la consommation x (en kWh) : pour 300 kWh, on paie 72 € ; pour 500 kWh, on paie 102 €.

1. Trouver $f(x)$.
2. Que représentent a et b ?
3. Combien paie-t-on pour 800 kWh ?

VII — Signe d'une fonction par lecture graphique

Exercice 27 : Signe d'une fonction

La courbe C_f d'une fonction f définie sur $[-4; 5]$ est tracée ci-dessous.



1. Résoudre graphiquement $f(x) = 0$.
2. Dresser le tableau de signes de f .
3. Résoudre graphiquement $f(x) > 0$.
4. Dresser le tableau de variations de f .

Exercice 28 : Signe de fonctions affines

Dresser le tableau de signes des fonctions f_1, f_2, f_3 et f_4 de l'exercice 20.

Exercice 29 : Des variations au signe

Une fonction f , définie sur $[-3; 5]$, a le tableau de variations ci-dessous ; de plus, $f(-1) = 0$ et $f(3) = 0$. Dresser son tableau de signes.

x	-3	1	5
$f(x)$	-2	4	-1

VIII — Propriétés des inégalités, encadrer une quantité

Exercice 30 : Règles des inégalités

On sait que $a < b$. Compléter par $<$ ou $>$.

- a) $a + 4 \dots b + 4$
- b) $a - 7 \dots b - 7$
- c) $3a \dots 3b$
- d) $-5a \dots -5b$
- e) $\frac{a}{2} \dots \frac{b}{2}$
- f) $-a \dots -b$

Exercice 31 : Encadrer

On sait que $1 \leq x \leq 4$. Encadrer chaque expression.

$$\begin{aligned} A &= 2x + 3 & B &= -3x + 1 \\ C &= 5 - 2x & D &= \frac{1}{2}x - 1 \end{aligned}$$

Exercice 32 : Mesures imprécises

1. Un potager rectangulaire mesure 6 m de large ; sa longueur x , en mètres, vérifie $10 \leq x \leq 12$. Encadrer son périmètre $P = 2x + 12$, puis son aire $\mathcal{A} = 6x$.
2. Une température C en degrés Celsius vaut $F = 1,8C + 32$ en degrés Fahrenheit. Au printemps, $15 \leq C \leq 25$. Encadrer F .

IX — Résoudre une inéquation du premier degré

Exercice 33 : Est-ce une solution ?

Le nombre 3 est-il solution de chaque inéquation ? Justifier.

- a) $2x - 1 > 4$
- b) $-x + 5 \geq 2$
- c) $4x - 9 < x$
- d) $5 - 2x \leq -1$

Exercice 34 : Résoudre

Résoudre chaque inéquation ; donner S sous forme d'intervalle.

- a) $x + 6 > 2$
- b) $-3x < 15$
- c) $2x - 5 \geq 7$
- d) $9 - 4x > 1$
- e) $3x + 2 \leq 5x - 6$
- f) $-x + 4 \geq 3x - 8$

Exercice 35 : Parenthèses et fractions

Résoudre chaque inéquation.

- a) $2(x - 3) < x + 1$
- b) $3(2 - x) \geq 2(x + 8)$
- c) $\frac{x}{2} + 1 > 4$
- d) $\frac{2x - 1}{3} \leq x$

Exercice 36 : Corriger les erreurs

Chaque résolution ci-dessous est fautive. Trouver l'erreur, puis corriger.

1. $-2x + 3 > 9$, donc $-2x > 6$, donc $x > -3$.
2. $5x \leq -10$, donc $x \geq -2$.

X — Signe d'une fonction affine par le calcul

Exercice 37 : Tableaux de signes

Dresser le tableau de signes de chaque expression.

$$\begin{aligned} A(x) &= 2x - 8 & B(x) &= -3x + 9 \\ C(x) &= 5x + 15 & D(x) &= -\frac{1}{2}x + 4 \\ E(x) &= 7x & F(x) &= -6x + 4 \end{aligned}$$

Exercice 38 : Variations, droite et signe

On considère $f(x) = 3x - 6$ et $g(x) = 8 - 2x$.

1. Donner le sens de variation de f et de g .
2. Tracer leurs droites dans un même repère.
3. Dresser le tableau de signes de f et de g par le calcul, puis le vérifier sur le graphique.

Exercice 39 : Associer

Associer chaque fonction $f(x) = 4x - 12$ et $g(x) = 6 - 2x$ à son tableau de signes, en justifiant.

x	$-\infty$	3	$+\infty$
Tableau 1	+	0	-
x	$-\infty$	3	$+\infty$
Tableau 2	-	0	+

Exercice 40 : Bénéfice

Une artisanne fabrique des bougies. Pour x bougies vendues dans le mois (de 0 à 100), son bénéfice, en euros, est

$$B(x) = 12x - 480.$$

1. Calculer $B(0)$. Que représente ce nombre ?
2. Dresser le tableau de signes de $B(x)$ sur $[0; 100]$.
3. À partir de combien de bougies vendues gagne-t-elle de l'argent ?

XI — Inéquations produit

Exercice 41 : Signe d'un produit

Dresser le tableau de signes de chaque produit.

$$\begin{aligned} A(x) &= (x - 2)(3x + 6) \\ B(x) &= (4x - 12)(-x + 1) \\ C(x) &= (5 - x)(2x + 8) \end{aligned}$$

Exercice 42 : Résoudre

Résoudre chaque inéquation.

$$\begin{aligned} (x - 4)(x + 1) &< 0 & (2x + 6)(x - 5) &\geq 0 \\ (3 - x)(x + 2) &> 0 & (-2x + 4)(3x - 9) &\leq 0 \end{aligned}$$

Exercice 43 : Trouver l'erreur

Pour étudier le signe de $(x+1)(2-x)$, Lina a dressé le tableau ci-dessous. Trouver son erreur, puis dresser le bon tableau.

x	$-\infty$	2	-1	$+\infty$
$x+1$	-	-	0	+
$2-x$	+	0	-	-
$(x+1)(2-x)$	-	0	+	-

XII — Inéquations quotient**Exercice 44 : Signe d'un quotient**

Pour chaque quotient, donner la valeur interdite, puis dresser le tableau de signes.

$$A(x) = \frac{x+3}{x-2} \quad B(x) = \frac{6-2x}{x+4} \quad C(x) = \frac{3x}{5-x}$$

Exercice 45 : Résoudre

Résoudre chaque inéquation.

$$\begin{array}{ll} \frac{x-1}{x+3} \geq 0 & \frac{2x+8}{x-6} < 0 \\ \frac{4-x}{2x-2} \leq 0 & \frac{-3x-6}{x+5} > 0 \end{array}$$

Exercice 46 : Produit, puis quotient

- Résoudre $(3x+6)(-x+4) > 0$.
- Pour quelle valeur de x le quotient $\frac{3x+6}{-x+4}$ n'existe-t-il pas ?
- Résoudre $\frac{3x+6}{-x+4} \leq 0$.

XIII — Inéquations avancées**Exercice 47 : Factoriser d'abord**

Résoudre chaque inéquation.

$$x^2 \geq 3x \quad 2x^2 < 8x \quad x^2 \leq -5x$$

Exercice 48 : Avec une identité remarquable

Résoudre chaque inéquation.

$$x^2 < 25 \quad (x-3)^2 \geq 4 \quad (2x+1)^2 \leq 9$$

Exercice 49 : Comparer un quotient à un nombre

Résoudre chaque inéquation.

$$\frac{x+5}{x-1} \geq 2 \quad \frac{3}{x+2} < 1$$

Exercice 50 : Coût moyen

Une imprimante 3D fabrique des figurines : x figurines coûtent $2x + 60$ € (matière et réglages). Le coût moyen d'une figurine est $M(x) = \frac{2x+60}{x}$, pour $x > 0$.

- Calculer $M(10)$ et $M(30)$.
- Montrer que $M(x) \leq 5$ revient à $\frac{60-3x}{x} \leq 0$.
- À partir de combien de figurines le coût moyen est-il d'au plus 5 € ?

XIV — Problèmes d'inéquations**Exercice 51 : Moyenne trimestrielle**

Une élève a obtenu 9, 12 et 10 sur 20 aux trois premiers devoirs du trimestre. On note n sa note au quatrième devoir.

- Exprimer la moyenne $M(n)$ de ses quatre notes.
- Quelles notes doit-elle obtenir pour avoir au moins 12 de moyenne ?
- Peut-elle encore obtenir au moins 15 de moyenne ?

Exercice 52 : Rectangle ou carré

Un rectangle a pour longueur $x+5$ et pour largeur 3 ; un carré a pour côté x (longueurs en cm, $x > 0$).

- Exprimer le périmètre $P(x)$ du rectangle et le périmètre $Q(x)$ du carré.
- Pour quelles valeurs de x le périmètre du carré est-il plus grand que celui du rectangle ?
- Vérifier avec $x = 10$.

Exercice 53 : Trotinettes en libre-service

Deux opérateurs louent des trotinettes. Opérateur A : 1 € pour débloquer, puis 0,20 € par minute ; opérateur B : 0,30 € par minute, sans déblocage. On note x la durée du trajet en minutes, entre 0 et 30.

- Exprimer les prix $A(x)$ et $B(x)$.
- Calculer le prix d'un trajet de 5 minutes, puis de 20 minutes, avec chaque opérateur.
- Résoudre l'inéquation $A(x) < B(x)$ sur $[0; 30]$.
- Quel opérateur choisir, selon la durée du trajet ?

Problème de synthèse**Exercice 54 : Étude complète d'une fonction**

On considère la fonction f définie sur $[0; 6]$ par $f(x) = (x-1)(x-5)$.

- Dresser le tableau de valeurs de f de $x = 0$ à $x = 6$, avec un pas de 1.
- Tracer la courbe de f dans un repère orthonormé (unité : 1 carreau).
- Donner les variations de f , puis dresser son tableau de variations.
- Donner le maximum et le minimum de f sur $[0; 6]$.
- Dresser, par le calcul, le tableau de signes de $f(x)$ sur $[0; 6]$.
- Résoudre $f(x) < 0$, puis le vérifier sur la courbe.