

CORRIGÉ — VARIATIONS, SIGNE ET INÉQUATIONS

Chapitre 5 : fiche d'exercices — Seconde

Les résultats sont encadrés; les remarques en bleu signalent les erreurs fréquentes et les méthodes à retenir. Pour une courbe « pouvant représenter » une fonction, la figure donne une réponse possible parmi d'autres.

I) Fonction croissante, fonction décroissante

Exercice 1 — Lire les variations

- 1) f est définie sur $[-3; 5]$.
- 2) f est croissante sur $[-3; 0]$, décroissante sur $[0; 3]$ et croissante sur $[3; 5]$.

Les intervalles s'écrivent avec des valeurs de x , pas avec les hauteurs.

Exercice 2 — Une randonnée

- 1) f est croissante sur $[8; 11]$ (montée), constante sur $[11; 12]$ (pause) et décroissante sur $[12; 15]$ (descente).
- 2) $9 < 10$ et f croissante sur $[8; 11]$: $f(9) \leq f(10)$.
 $13 < 14$ et f décroissante sur $[12; 15]$: $f(13) \geq f(14)$.

Exercice 3 — Comparer des images

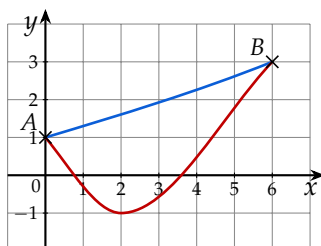
- 1) $2 < 5$, donc : a) $g(2) \leq g(5)$; b) $g(2) \geq g(5)$; c) $g(2) = g(5)$.
- 2) $-4 < -1$ et f croissante : $f(-4) \leq f(-1)$.

Exercice 4 — Conserver ou renverser l'ordre

- 1) $1 < 3 < 4 < 8$ et f croissante : $f(1) \leq f(3) \leq f(4) \leq f(8)$.
- 2) g décroissante : l'ordre est inversé, $g(8) \leq g(4) \leq g(3) \leq g(1)$.
- 3) Une fonction croissante conserve l'ordre; une fonction décroissante renverse l'ordre.
- 4) Non : si $a > b$, alors $f(b) \leq f(a)$ (f croissante), ce qui contredit $f(a) < f(b)$. Donc $a < b$.

Exercice 5 — Tracer une courbe

- 1) Courbe bleue : elle monte de A à B.
- 2) Courbe rouge : elle descend de A jusqu'à un point d'abscisse 2, par exemple $(2; -1)$, puis monte jusqu'à B.



Exercice 6 — Vrai ou faux

- 1) Vrai : $[2; 5]$ est contenu dans $[0; 10]$; la courbe y monte aussi.
- 2) Faux : la courbe peut monter, redescendre, puis remonter. Par exemple $f(1) = 0$, $f(2) = 3$, $f(3) = -1$ et $f(4) = 1$: $f(1) < f(4)$, mais $f(2) > f(3)$.
- 3) Faux : une fonction peut descendre puis monter; elle n'est alors ni croissante ni décroissante sur $[0; 5]$.

Pour montrer qu'une affirmation est fautive, un seul contre-exemple suffit.

II) Maximum, minimum

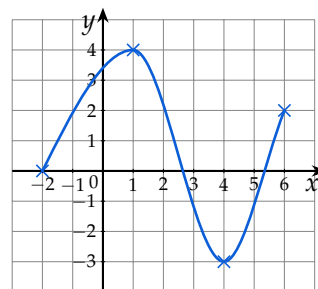
Exercice 7 — Lire des extremums

- 1) Sur $[-3; 5]$: maximum 3, atteint en 0; minimum -2, atteint en -3.
- 2) Sur $[0; 5]$: maximum 3, en 0; minimum -1, en 3.
- 3) Sur $[3; 5]$: minimum -1, en 3; maximum 2, en 5.

Sur un intervalle plus petit, on ne regarde que le morceau de courbe correspondant : un extremum peut être au bord.

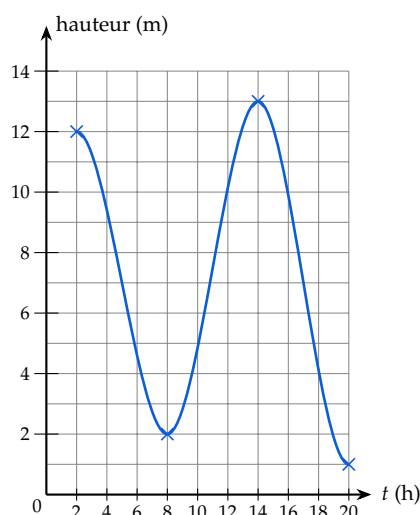
Exercice 8 — Tracer à partir d'une description

- 1) Points connus : $(-2; 0)$, $(1; 4)$, $(4; -3)$ et $(6; 2)$; la courbe monte, descend, puis remonte, avec une tangente horizontale en $(1; 4)$ et en $(4; -3)$.
- 2) Sur $[4; 6]$: minimum -3, en 4; maximum 2, en 6.



Exercice 9 — Les marées

- 1) f est décroissante sur $[2; 8]$, croissante sur $[8; 14]$ et décroissante sur $[14; 20]$.
- 2) Sur $[2; 20]$: maximum 13 m, à 14 h; minimum 1 m, à 20 h. Sur $[2; 8]$: maximum 12 m, à 2 h; minimum 2 m, à 8 h.
- 3) Une courbe possible, un carreau pour 2 h et pour 1 m (tangente horizontale aux pleines et basses mers) :



Sur $[3; 6]$: minimum -3 , en 5 ; maximum 1 , en 6 .
 2) Par exemple $m = -3$ et $M = 5$: $-3 \leq h(x) \leq 5$.

Exercice 14 — D'une description au tableau

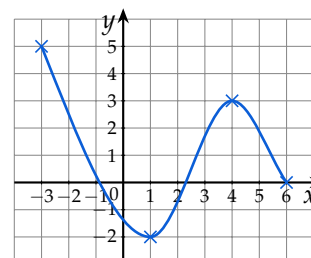
1)

x	-3	1	4	6
$f(x)$	5	-2	3	0

2) Maximum 5 , en -3 ;
 minimum -2 , en 1 .

3) Une courbe possible ci-contre.

Le maximum est au bord :
 $5 > 3$.



III) Tableau de variations

Exercice 10 — De la courbe au tableau

x	-3	0	3	5
$f(x)$	-2	3	-1	2

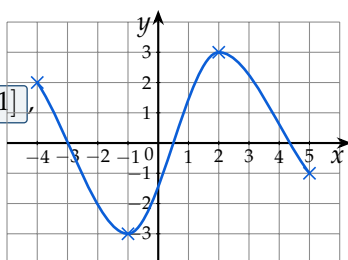
Sur la première ligne : les bornes -3 et 5 , et les valeurs 0 et 3 où le sens de variation change.

Exercice 11 — Du tableau à la courbe

1) g est définie sur $[-4; 5]$.

2) g est
 décroissante sur $[-4; -1]$;
 croissante sur $[-1; 2]$;
 et
 décroissante sur $[2; 5]$.

3) Une courbe possible ci-contre.



Exercice 12 — Exploiter un tableau

1) -4 et -2 sont dans $[-5; -1]$, où k est croissante ;
 $-4 < -2$, donc $k(-4) \leq k(-2)$.

1 et 3 sont dans $[-1; 4]$, où k est décroissante ; $1 < 3$,
 donc $k(1) \geq k(3)$.

2) -3 et 2 ne sont pas dans un même intervalle où k varie dans un seul sens : $k(-3)$ est entre -2 et 4 , $k(2)$ entre 0 et 4 ; on ne peut pas conclure .

3) Maximum 4 , en -1 ; minimum -2 , en -5 .

Exercice 13 — Extremums et tableau

1) Sur $[-4; 6]$: maximum 5 , en 0 ; minimum -3 , en 3 .

Sur $[-4; 0]$: maximum 5 , en 0 ; minimum 2 , en -4 .

IV) Fonctions affines et linéaires

Exercice 15 — Reconnaître une fonction affine

f : affine, $a = 5$ et $b = 2$; g : affine, $a = -2$ et $b = 6$

h : linéaire, $a = \frac{1}{3}$ et $b = 0$; k : constante, $a = 0$ et $b = -4$

m : non affine (x^2) ; p : affine, $a = \frac{1}{2}$ et $b = -\frac{1}{2}$

$g(x) = 6 - 2x = -2x + 6$: a est le nombre devant x , pas le premier nombre écrit. $p(x) = \frac{x-1}{2} = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$.

Exercice 16 — Développer d'abord

$$f(x) = (x+3)^2 - x^2$$

$$f(x) = x^2 + 6x + 9 - x^2$$

$$f(x) = 6x + 9$$

f affine, $a = 6 > 0$: croissante .

$$g(x) = (2x-1)(x+2) - 2x^2$$

$$g(x) = 2x^2 + 4x - x - 2 - 2x^2$$

$$g(x) = 3x - 2$$

g affine, $a = 3 > 0$: croissante .

$$h(x) = (x+1)(x-1) - x(x+2)$$

$$h(x) = x^2 - 1 - x^2 - 2x$$

$$h(x) = -2x - 1$$

h affine, $a = -2 < 0$: décroissante .

Exercice 17 — Sens de variation

1) f : $a = -3 < 0$, décroissante ; g : $a = 0,5 > 0$, croissante ; h : constante ; $k(x) = -\frac{1}{5}x + 2$: $a < 0$, décroissante .

2) $-2 < 3$ et f décroissante : $f(-2) \geq f(3)$. g croissante : $g(-2) \leq g(3)$.

Contrôle : $f(-2) = 7$ et $f(3) = -8$; $g(-2) = -5$ et $g(3) = -2,5$.

Exercice 18 — Tracer des droites

Deux points par droite :

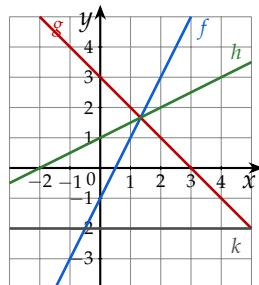
$f : (0; -1)$ et $(2; 3)$;

$g : (0; 3)$ et $(3; 0)$;

$h : (0; 1)$ et $(2; 2)$;

k : droite horizontale passant par $(0; -2)$.

Pour h , on choisit x pair : $\frac{1}{2}x$ est entier.

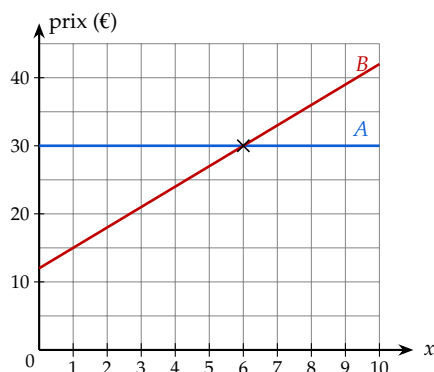


Exercice 19 — Deux formules d'abonnement

1) $A(x) = 30$ et $B(x) = 3x + 12$.

2) A est constante; B est affine, croissante ($a = 3 > 0$).

3) Droite horizontale pour A ; droite passant par $(0; 12)$ et $(10; 42)$ pour B .



4) Les droites se coupent en $x = 6$; au-delà, celle de B est au-dessus : A est la moins chère à partir de 7 séances.

5) $B(6) = 3 \times 6 + 12 = 30$: à 6 séances, les deux formules coûtent 30 €.

V) Fonction affine par lecture graphique

Exercice 20 — Lire l'expression

1) $(d_1) : b = -2$; de $(0; -2)$ à $(1; 0)$, on avance de 1 et on monte de 2 : $f_1(x) = 2x - 2$.

$(d_2) : b = 2$; de $(0; 2)$ à $(2; 1)$: $a = -\frac{1}{2}$,

$f_2(x) = -\frac{1}{2}x + 2$.

$(d_3) : b = -1$; de $(0; -1)$ à $(1; -2)$: $a = -1$,

$f_3(x) = -x - 1$.

$(d_4) : b = 0$; de $(0; 0)$ à $(3; 2)$: $a = \frac{2}{3}$, $f_4(x) = \frac{2}{3}x$.

2) f_4 est linéaire : sa droite passe par l'origine.

Exercice 21 — Associer fonctions et droites

f et g ont le même $a = 2$: les deux droites qui montent le plus. f passe par $(0; 1)$: $f \rightarrow (D_2)$; g passe par $(0; -3)$: $g \rightarrow (D_4)$.

h et k descendent et passent par $(0; 1)$; h descend plus vite ($a = -1$) : $h \rightarrow (D_1)$ et $k \rightarrow (D_3)$.

Le signe de a dit si la droite monte ou descend; b dit où elle coupe l'axe des ordonnées.

Exercice 22 — Location de vélo

1) $p(2) = 10$ €.

2) $b = 4$: le prix fixe, payé même pour une durée nulle.

3) De $(0; 4)$ à $(2; 10)$: on avance de 2 et on monte de 6, donc $a = \frac{6}{2} = 3$: le prix d'une heure de location.

4) $p(x) = 3x + 4$; $p(8) = 3 \times 8 + 4 = 28$ €.

VI) Fonction affine passant par deux points

Exercice 23 — Deux images connues

$f : a = \frac{10-4}{3-1} = 3$; $f(1) = 3 + b = 4$, donc $b = 1$:

$f(x) = 3x + 1$.

$g : a = \frac{-1-7}{2-(-2)} = -2$; $g(-2) = 4 + b = 7$, donc $b = 3$:

$g(x) = -2x + 3$.

$h : b = h(0) = 5$; $a = \frac{3-5}{4-0} = -\frac{1}{2}$: $h(x) = -\frac{1}{2}x + 5$.

$k : a = \frac{2-(-4)}{6-(-3)} = \frac{6}{9}$, soit $a = \frac{2}{3}$; $k(6) = 4 + b = 2$, donc

$b = -2$: $k(x) = \frac{2}{3}x - 2$.

Attention aux soustractions de nombres négatifs : $2 - (-2) = 4$.

Contrôle avec l'autre point : $k(-3) = -2 - 2 = -4$.

Exercice 24 — Droite passant par deux points

1) $a = \frac{3-1}{6-2} = \frac{1}{2}$; $f(2) = 1 + b = 1$, donc $b = 0$:

$f(x) = \frac{1}{2}x$. La fonction est linéaire : la droite passe par l'origine.

2) $f(10) = 5$: oui, E est sur (AB) .

3) $a = \frac{-4-5}{2-(-1)} = -3$; $g(-1) = 3 + b = 5$, donc $b = 2$:

$g(x) = -3x + 2$.

4) $g(3) = -9 + 2 = -7 \neq -6$: non, F n'est pas sur (CD) .

Exercice 25 — Température

1) $T(8) = 6$ et $T(14) = 18$. $a = \frac{18-6}{14-8} = 2$;

$T(8) = 16 + b = 6$, donc $b = -10$: $T(h) = 2h - 10$.

2) $T(11) = 22 - 10 = 12$ °C.

3)

$$2h - 10 = 14$$

$$2h = 24$$

$$h = 12$$

Il fait 14 °C à 12 h.

Exercice 26 — Facture d'électricité

- 1) $a = \frac{102-72}{500-300} = \frac{30}{200}$, soit $a = 0,15$;
 $f(300) = 45 + b = 72$, donc $b = 27$:
 $f(x) = 0,15x + 27$.
- 2) a : le **prix d'un kWh** (0,15 €); b : l'**abonnement** (27 €), payé même sans consommer.
- 3) $f(800) = 120 + 27 = \mathbf{147}$ €.

VII) Signe d'une fonction par lecture graphique

Exercice 27 — Signe d'une fonction

- 1) C_f coupe l'axe des abscisses en -3 , 1 et 4 :
 $S = \{-3; 1; 4\}$.
- 2)

x	-4	-3	1	4	5			
$f(x)$		+	0	-	0	+	0	-

- 3) $S = [-4; -3[\cup]1; 4[$.
- 4)

x	-4	-1	2	5
$f(x)$	2		2	
		-2		-2

Ne pas confondre les deux tableaux : le signe dit si la courbe est au-dessus ou au-dessous de l'axe ; les variations, si elle monte ou descend.

Exercice 28 — Signe de fonctions affines

On lit où chaque droite coupe l'axe des abscisses :
 f_1 : - avant **1**, + après; f_2 : + avant **4**, - après;
 f_3 : + avant **-1**, - après; f_4 : - avant **0**, + après.

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f_1(x)$		- 0 +	
x	$-\infty$	4	$+\infty$
$f_2(x)$		+ 0 -	

Même présentation pour f_3 et f_4 .

Exercice 29 — Des variations au signe

f monte de -2 à 4 en passant par 0 en -1 , puis descend de 4 à -1 en passant par 0 en 3 :

x	-3	-1	3	5		
$f(x)$		-	0	+	0	-

VIII) Propriétés des inégalités, encadrer une quantité

Exercice 30 — Règles des inégalités

- a) $a + 4 < b + 4$; b) $a - 7 < b - 7$: ajouter ou soustraire conserve le sens.
 c) $3a < 3b$; e) $\frac{a}{2} < \frac{b}{2}$: multiplier ou diviser par un nombre positif conserve le sens.
 d) $-5a > -5b$; f) $-a > -b$: multiplier par un nombre négatif change le sens.

Exercice 31 — Encadrer

$A : 2 \leq 2x \leq 8$, puis $\mathbf{5 \leq A \leq 11}$.

$B :$

$$1 \leq x \leq 4$$

$$-3 \geq -3x \geq -12 \quad \times (-3) : \text{le sens change}$$

$$-2 \geq -3x + 1 \geq -11$$

$$\text{donc } \mathbf{-11 \leq B \leq -2}.$$

$$C : -2 \geq -2x \geq -8, \text{ puis } 3 \geq 5 - 2x \geq -3 :$$

$$\mathbf{-3 \leq C \leq 3}.$$

$$D : \frac{1}{2} \leq \frac{1}{2}x \leq 2, \text{ puis } \mathbf{-\frac{1}{2} \leq D \leq 1}.$$

Après une multiplication par un nombre négatif, on réécrit l'encadrement dans l'ordre croissant.

Exercice 32 — Mesures imprécises

- 1) $20 \leq 2x \leq 24$, donc $\mathbf{32 \leq P \leq 36}$ (en m);
 $\mathbf{60 \leq A \leq 72}$ (en m²).
 2) $27 \leq 1,8C \leq 45$, donc $\mathbf{59 \leq F \leq 77}$.

IX) Résoudre une inéquation du premier degré

Exercice 33 — Est-ce une solution ?

- a) $2 \times 3 - 1 = 5$ et $5 > 4$: **oui**.
 b) $-3 + 5 = 2$ et $2 \geq 2$: **oui**.
 c) $4 \times 3 - 9 = 3$ et $3 < 3$ est faux : **non**.
 d) $5 - 2 \times 3 = -1$ et $-1 \leq -1$: **oui**.

Avec $\leq$ ou $\geq$, l'égalité convient (b et d).

Exercice 34 — Résoudre

- a) $x > 2 - 6$, donc $x > -4$: $\mathbf{S =]-4; +\infty[}$.
 b) On divise par $-3 < 0$: $x > -5$, $\mathbf{S =]-5; +\infty[}$.
 c) $2x \geq 12$, donc $x \geq 6$: $\mathbf{S = [6; +\infty[}$.
 d) $-4x > -8$, donc $x < 2$: $\mathbf{S =]-\infty; 2[}$.
 e)
 $3x + 2 \leq 5x - 6$
 $3x - 5x \leq -6 - 2$
 $-2x \leq -8$
 $x \geq 4 \quad \div (-2) : \text{le sens change}$
 $\mathbf{S = [4; +\infty[}$.
 f) $-4x \geq -12$, donc $x \leq 3$: $\mathbf{S =]-\infty; 3]}$.

Exercice 35 — Parenthèses et fractions

a) $2x - 6 < x + 1$, donc $x < 7$: $S =]-\infty; 7[$.

b)

$3(2 - x) \geq 2(x + 8)$

$6 - 3x \geq 2x + 16$

$-5x \geq 10$

$x \leq -2 \quad \div (-5) : \text{le sens change}$

$S =]-\infty; -2]$.

c) $\frac{x}{2} > 3$, donc $x > 6$: $S =]6; +\infty[$.

d)

$\frac{2x - 1}{3} \leq x$

$2x - 1 \leq 3x \quad \times 3 > 0$

$-x \leq 1$

$x \geq -1 \quad \times (-1) : \text{le sens change}$

$S = [-1; +\infty[$.

Exercice 36 — Corriger les erreurs

 1) On a divisé par -2 sans changer le sens : $-2x > 6$ donne $x < -3$, soit $S =]-\infty; -3[$.

 2) On a changé le sens en divisant par $5 > 0$: $x \leq -2$, soit $S =]-\infty; -2]$.

Le sens ne change que si l'on multiplie ou divise par un nombre négatif; le signe du résultat ne compte pas.

X) Signe d'une fonction affine par le calcul

Exercice 37 — Tableaux de signes

 On cherche la valeur qui annule l'expression, puis le signe de a donne l'ordre des signes.

A : $2x - 8 = 0$ pour $x = 4$; $a = 2 > 0$:

- avant 4, + après.

B : $-3x + 9 = 0$ pour $x = 3$; $a < 0$:

+ avant 3, - après.

C : $5x + 15 = 0$ pour $x = -3$; $a > 0$:

- avant -3, + après.

D : $-\frac{1}{2}x + 4 = 0$ pour $x = 8$; $a < 0$:

+ avant 8, - après.

E : $7x = 0$ pour $x = 0$; $a > 0$: - avant 0, + après.

F : $-6x + 4 = 0$ pour $x = \frac{2}{3}$; $a < 0$:

 + avant $\frac{2}{3}$, - après.

x	$-\infty$	$\frac{2}{3}$	$+\infty$
$-6x + 4$	+	0	-

 Pour D : $-\frac{1}{2}x = -4$, puis $x = -4 \times (-2) = 8$.

Exercice 38 — Variations, droite et signe

1) $f : a = 3 > 0$,

croissante;

$g(x) = -2x + 8$:

$a = -2 < 0$, décroissante.

 2) f : points $(1; -3)$ et $(3; 3)$; g : points $(1; 6)$ et $(4; 0)$.

3) $3x - 6 = 0$ pour $x = 2$:

 f : - avant 2, + après.

$8 - 2x = 0$ pour $x = 4$:

 g : + avant 4, - après.

Sur le graphique, les droites coupent l'axe en 2 et en 4.



Exercice 39 — Associer

 $f(3) = 0$ et $g(3) = 0$: les deux s'annulent en 3.

 $f : a = 4 > 0$, - puis + : tableau 2. $g : a = -2 < 0$, + puis - : tableau 1.

Exercice 40 — Bénéfice

 1) $B(0) = -480$: sans vente, l'artisane perd 480 € (matériel, frais).

2) $12x - 480 = 0$ pour $x = 40$; $a = 12 > 0$:

x	0	40	100
$B(x)$	-	0	+

 3) $B(x) > 0$ pour $x > 40$: elle gagne de l'argent à partir de 41 bougies.

XI) Inéquations produit

Exercice 41 — Signe d'un produit

 A : $x - 2 = 0$ pour $x = 2$; $3x + 6 = 0$ pour $x = -2$; $a > 0$ pour les deux.

x	$-\infty$	-2	2	$+\infty$	
$x - 2$	$-$	$-$	0	$+$	
$3x + 6$	$-$	0	$+$	$+$	
$A(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

 B : $4x - 12 = 0$ pour $x = 3$ ($a > 0$); $-x + 1 = 0$ pour $x = 1$ ($a < 0$).

x	$-\infty$	1	3	$+\infty$	
$4x - 12$	-	-	0	+	
$-x + 1$	+	0	-	-	
$B(x)$	-	0	+	0	-

 C : $5 - x = 0$ pour $x = 5$ ($a < 0$); $2x + 8 = 0$ pour $x = -4$ ($a > 0$).

x	$-\infty$	-4	5	$+\infty$		
$5 - x$		+	+	0	-	
$2x + 8$		-	0	+	+	
$C(x)$		-	0	+	0	-

Exercice 42 — Résoudre

Tableau de signes du produit dans chaque cas (valeurs rangées dans l'ordre), puis lecture.

a) Produit $+$, 0 , $-$, 0 , $+$ (valeurs -1 et 4); « < 0 » :

$$S =]-1; 4[.$$

b) Produit $+$, 0 , $-$, 0 , $+$ (valeurs -3 et 5); « ≥ 0 » :

$$S =]-\infty; -3] \cup [5; +\infty[.$$

c) Produit $-$, 0 , $+$, 0 , $-$ (valeurs -2 et 3); « > 0 » :

$$S =]-2; 3[.$$

d) Produit $-$, 0 , $+$, 0 , $-$ (valeurs 2 et 3); « ≤ 0 » :

$$S =]-\infty; 2] \cup [3; +\infty[.$$

x	$-\infty$	2	3	$+\infty$
$-2x + 4$		$+$	0	$-$
$3x - 9$		$-$	$-$	0
$(-2x + 4)(3x - 9)$		$-$	0	$+$

« $\leq$ » ou « $\geq$ » : les valeurs où le produit s'annule sont des solutions (crochets fermés).

Exercice 43 — Trouver l'erreur

Lina a mal rangé les valeurs :

-1 doit être écrit avant 2 .

x	$-\infty$	-1	2	$+\infty$
$x + 1$		$-$	0	$+$
$2 - x$		$+$	$+$	0
$(x + 1)(2 - x)$		$-$	0	$+$

x	$-\infty$	-4	3	$+\infty$
$6 - 2x$	$+$	$+$	0	$-$
$x + 4$	$-$	0	$+$	$+$
$B(x)$	$-$	$+$	0	$-$

C : valeur interdite 5 ; $3x = 0$ pour $x = 0$.

x	$-\infty$	0	5	$+\infty$
$3x$		$-$	0	$+$
$5-x$		$+$	$+$	0
$C(x)$		$-$	0	$+$

Exercice 45 — Résoudre

a) Interdite -3 , s'annule en 1 ; quotient $+$, $||$, $-$, 0 , $+$:

$$S =]-\infty; -3[\cup [1; +\infty[.$$

b) Interdite 6 , s'annule en -4 ; quotient $+$, 0 , $-$, $||$, $+$:

$$S =]-4; 6[.$$

c) Interdite 1 , s'annule en 4 ; quotient $-$, $||$, $+$, 0 , $-$:

$$S =]-\infty; 1[\cup [4; +\infty[.$$

d) Interdite -5 , s'annule en -2 ; quotient $-$, $||$, $+$, 0 , $-$:

$$S =]-5; -2[.$$

La valeur interdite est toujours exclue : crochet ouvert de son côté, même avec « $\leq$ » ou « $\geq$ ».

Exercice 46 — Produit, puis quotient

1) $3x + 6$: $-$ puis $+$ autour de -2 ; $-x + 4$: $+$ puis $-$ autour de 4 .

x	$-\infty$	-2	4	$+\infty$
$3x + 6$	$-$	0	$+$	$+$
$-x + 4$	$+$	$+$	0	$-$
$(3x + 6)(-x + 4)$	$-$	0	$+$	0
$\frac{3x + 6}{-x + 4}$	$-$	0	$+$	$-$

$$S =]-2; 4[.$$

2) Pour $x = 4$: le dénominateur $-x + 4$ est nul.

$$3) S =]-\infty; -2] \cup [4; +\infty[.$$

Même tableau de signes que le produit, sauf en 4 : double barre.

XII) Inéquations quotient
Exercice 44 — Signe d'un quotient

A : valeur interdite 2 ; $x + 3 = 0$ pour $x = -3$.

x	$-\infty$	-3	2	$+\infty$
$x + 3$		$-$	0	$+$
$x - 2$		$-$	$-$	0
$A(x)$		$+$	0	$-$

B : valeur interdite -4 ; $6 - 2x = 0$ pour $x = 3$ ($a < 0$).

XIII) Inéquations avancées
Exercice 47 — Factoriser d'abord

a) $x^2 - 3x \geq 0$, soit $x(x - 3) \geq 0$; produit $+$, 0 , $-$, 0 , $+$:

$$S =]-\infty; 0] \cup [3; +\infty[.$$

b) $2x^2 - 8x < 0$, soit $2x(x - 4) < 0$: $S =]0; 4[.$

c) $x^2 + 5x \leq 0$, soit $x(x + 5) \leq 0$: $S = [-5; 0].$

Ne jamais diviser par x : son signe est inconnu, et on perdrait la solution 0.

Exercice 48 — Avec une identité remarquable

- a) $x^2 - 25 < 0$, soit $(x - 5)(x + 5) < 0$: $S =]-5; 5[$.
 b) $(x - 3)^2 - 4 \geq 0$, soit $(x - 3 - 2)(x - 3 + 2) \geq 0$,
 donc $(x - 5)(x - 1) \geq 0$: $S =]-\infty; 1] \cup [5; +\infty[$.
 c) $(2x + 1)^2 - 9 \leq 0$, soit $(2x + 1 - 3)(2x + 1 + 3) \leq 0$,
 donc $(2x - 2)(2x + 4) \leq 0$: $S = [-2; 1]$.

On passe tout à gauche pour comparer à 0, puis on factorise avec $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$.

Exercice 49 — Comparer un quotient à un nombre

- a) Valeur interdite : 1.

$$\frac{x+5}{x-1} - 2 \geq 0$$

$$\frac{x+5}{x-1} - \frac{2 \times (x-1)}{1 \times (x-1)} \geq 0$$

$$\frac{x+5-2x+2}{x-1} \geq 0$$

$$\frac{-x+7}{x-1} \geq 0$$

Quotient $-$, $\parallel$, $+$, 0 , $-$ (valeurs 1 et 7) : $S =]1; 7]$.

- b) Valeur interdite : -2 .

$$\frac{3}{x+2} - 1 < 0$$

$$\frac{3}{x+2} - \frac{1 \times (x+2)}{1 \times (x+2)} < 0$$

$$\frac{1-x}{x+2} < 0$$

Quotient $-$, $\parallel$, $+$, 0 , $-$ (valeurs -2 et 1) :

$$S =]-\infty; -2[\cup]1; +\infty[$$

Contrôle de a) avec $x = 3$: $\frac{8}{2} = 4 \geq 2$, et 3 est bien dans S .

Exercice 50 — Coût moyen

- 1) $M(10) = \frac{80}{10} = 8$ € et $M(30) = \frac{120}{30} = 4$ €.
 2)

$$\frac{2x+60}{x} - 5 \leq 0$$

$$\frac{2x+60}{x} - \frac{5 \times x}{1 \times x} \leq 0$$

$$\frac{60-3x}{x} \leq 0$$

- 3) Pour $x > 0$, le dénominateur est positif; $60 - 3x$ s'annule en 20 et $a = -3 < 0$:

x	0	20	$+\infty$	
$60 - 3x$	+	0	-	
x	0	+	+	
$\frac{60 - 3x}{x}$		+	0	-

Le coût moyen est d'au plus 5 €
à partir de 20 figurines.

XIV Problèmes d'inéquations

Exercice 51 — Moyenne trimestrielle

1) $M(n) = \frac{31+n}{4}$.

2) $\frac{31+n}{4} \geq 12$

$$31+n \geq 48 \quad \times 4 > 0$$

$$n \geq 17$$

Il lui faut au moins 17 sur 20.

- 3) $31 + n \geq 60$ donne $n \geq 29$: impossible, car une note ne dépasse pas 20.

Exercice 52 — Rectangle ou carré

- 1)

$$P(x) = 2(x+5) + 2 \times 3$$

$$P(x) = 2x + 16$$

et $Q(x) = 4x$.

- 2) $4x > 2x + 16$, donc $2x > 16$, puis $x > 8$:

pour $x > 8$.

- 3) $P(10) = 36$ et $Q(10) = 40$: on a bien $40 > 36$.

Exercice 53 — Trottinettes en libre-service

1) $A(x) = 0,2x + 1$ et $B(x) = 0,3x$.

2) 5 minutes : $A(5) = 2$ € et $B(5) = 1,50$ € ; 20 minutes : $A(20) = 5$ € et $B(20) = 6$ €.

- 3)

$$0,2x + 1 < 0,3x$$

$$0,2x - 0,3x < -1$$

$$-0,1x < -1$$

$$x > 10 \quad \div (-0,1) : \text{le sens change}$$

Avec $0 \leq x \leq 30$: $S =]10; 30]$.

- 4) B est moins cher pour moins de 10 minutes, A pour plus de 10 minutes ; à 10 minutes, les deux coûtent 3 €.

Problème de synthèse

Exercice 54 — Étude complète d'une fonction

- 1)

x	0	1	2	3	4	5	6
$f(x)$	5	0	-3	-4	-3	0	5

- 2) Courbe ci-contre.

- 3) f est

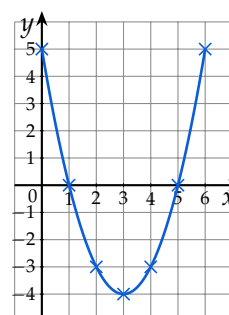
décroissante sur $[0; 3]$

et croissante sur $[3; 6]$.

- 4) Maximum

5, en 0 et en 6 ;

minimum -4, en 3.



5) $x - 1$ s'annule en 1, $x - 5$ en 5; tous deux $-$ puis $+$.

6) $S =]1; 5[$: sur la courbe, c'est là qu'elle est au-dessous de l'axe des abscisses.